

道路交通における通勤混雑緩和のための最適勤務開始時刻分布 Optimal Dispersion of Morning Commuters in Road Networks with Queuing

赤松 隆**・早崎 俊和***・前田 祐希***

by Takashi AKAMATSU, Toshikazu HAYAZAKI and Yuki MAEDA

1. はじめに

時差出勤、フレックスタイムなどによる勤務開始時刻の分散は、重要な交通需要管理（TDM）施策の一つである。従来、この問題を考えるために、勤務開始時刻分布を与件とした時の通勤者の出発時刻分布、および渋滞の待ち時間を導く理論が数多く研究されてきた^{1)~7)}。そして、通勤者集団が経験する渋滞の待ち時間や不効用の総和は、勤務開始時刻曲線の形状に大きく依存していることが明らかにされている。

これらの研究は、記述的モデルとして重要な知見を与えている。しかし、どのような勤務開始時刻分布が効率的に社会的交通費用を最小化するのかについては、明らかにしていない（鉄道通勤者を対象とした場合については、最適勤務開始時刻分布に関する研究^{9)~10)}がある。しかし、これは道路交通におけるボトルネック渋滞を対象とした場合とは全く性質が異なる問題である）。むしろ、現実には、勤務開始時刻分布を完全に制御することは不可能である。しかし、具体的な TDM 施策の方向／指針を考える上で、そのような規範モデルの性質を知っておくことは重要である。なお、我々の研究とは独立に、最近、越⁸⁾は、時差出勤の効果について、示唆に富んだ考察を行っている。しかし、この研究は、利用者の不効用関数が線形、勤務開始時刻の分布が明示的に扱われていない、経路選択が考慮されていない等の点で課題が残る。

そこで、本稿では道路交通における通勤フロー・パターンが社会的に最適な状態となるような勤務開始時刻曲線を導き、その性質を考察する。これは、数学的には均衡制約付き最適制御問題（Leader-Follower 2 段階最適制御問題）として表現される：下位問題では、各利用者の勤務開始時刻を与件とし、利用者のフローパターンを動的利用者均衡状態として表現する。上位問題は、下位問題を考慮した上で、利用者全体の総不効用を最小化する勤務開始時刻の累積曲線を導出する。

本稿の構成は以下の通りである。第2章では、均一の通勤者が単一ボトルネックを利用すると想定した場合

（“基本問題”）の下位問題を記述する。そして、第3章では、第2章で導出した利用者のフローパターンが社会的に最適状態となるような勤務開始時刻曲線を導出する。第4章では、基本問題に利用者の経路選択を導入した拡張問題、すなわち、利用者が経路と出発時刻を同時に選択する場合の最適勤務開始時刻曲線を導出する。さらに、導出した最適解を用いて、勤務開始時刻の時間帯の幅と総待ち行列時間との関係を議論する。

2. フローパターンを記述する均衡モデル

(1) 基本問題の枠組み

いま、居住地から勤務地へ通勤する Q 人の通勤者を想定しよう。基本問題では、その経路は単一のボトルネックを含む道路である。ボトルネックのサービスは、FIFO（First-In-First-Out）原則に従い、ボトルネックの最大流出率は μ とする。また、議論の展開をわかりやすくするために、待ち行列の物理的長さを無視した point-queue モデルによってボトルネックのサービスを記述する。すなわち、ボトルネックに待ち行列が存在する場合、ボトルネックに流入したフローは、流入順に最大流出率 μ で流出する。一方、待ち行列が存在しない場合、流入フローは、流入率と同じ流率で、待ち時間無しに流出する。

この道路の通過の様子は、図-1 に示すように自由走行速度での移動とボトルネックにおける待ち行列待ちとして表現される。したがって、利用者の起終点間の移動所要時間は、自由走行時間 m と待ち行列時間 T^D の和で表現できる。

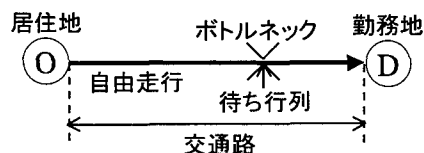


図-1 一起点-終点単一ボトルネック

ボトルネックへ q 番目に到着（流入）する利用者の到着時刻を $t_A(q)$ 、ボトルネックから q 番目に出発（流出）する利用者の出発時刻を $t_D(q)$ と書く。このボトルネックでは、FIFO 原則より、 q 番目に到着する利用者（通勤者）は q 番目に出発する。従って、この q 番目利用者の待ち時間 $T^D(q)$ は、

$$T^D(q) = t_D(q) - t_A(q). \quad \forall q \quad (2.1)$$

* Keywords：通勤交通、勤務開始時刻、動的均衡、TDM

** 正会員 工博 豊橋技術科学大学 知識情報工学系

(〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)

***学生会員 豊橋技術科学大学大学院 知識情報工学専攻

本研究の下位問題では、利用者ごとにある勤務開始時刻 t_w が与えられていると仮定する。このとき、利用者の勤務開始時刻と勤務地到着時刻は、必ずしも一致しない。このようなズレ時間を *Schedule Delay* と呼ぶ。 q 番目利用者の *Schedule Delay* は、勤務開始時刻とボトルネック出発時刻を用いて、

$$T^{SD}(q, t_w) = t_w - t_D(q) \quad \forall q \quad (2.2)$$

と表現できる。すなわち、勤務開始時刻より早く勤務地に到着（早着）する利用者の *Schedule Delay* T^{SD} は正、勤務開始時刻に到着する利用者の T^{SD} はゼロ、勤務開始時刻より遅く到着（遅刻）する利用者の T^{SD} は負となる。

(2) 利用者の行動モデル

勤務開始時刻が与えられた利用者は、自分の不効用が最小となるように居住地出発時刻 $t_A(q) - m$ を選択する（なお、 m は定数なので、 $t_A(q)$ を選択するとも考えても等価である）。本問題では、各利用者の不効用は、自由走行時間、待ち行列時間、*Schedule Delay* の和と仮定する。すなわち、 q 番目の利用者の不効用は、

$$UC(q, t_w) = T^{QD}(q) + p(T^{SD}(q, t_w)) + m \quad \forall q \quad (2.3)$$

と表される。ここで $p(T^{SD})$ は、*Schedule Delay* の値に応じた不効用を返す“ペナルティ関数”である。

(3) 均衡状態

本稿では、観測されるフローパターンは、日々の利用者の通勤行動の繰返しの結果、均衡状態に達していると仮定する。そして、その様な均衡状態を“どの利用者也自分だけがボトルネック到着時刻 t_A を変更することによって自分の不効用を改善できない状態”と定義する。その均衡条件は、次のように表現される：

$$\frac{\partial UC(t_A, t_w)}{\partial t_A} = 0 \quad \forall t_w \quad (2.4)$$

この均衡状態を求める問題は、図-2の累積図を用いて考えることができる。ここでの問題は、勤務開始時刻曲線 $t_w(q)$ と与えた時のボトルネック到着時刻曲線 $t_A(q)$ および出発時刻曲線 $t_D(q)$ を求めることである。

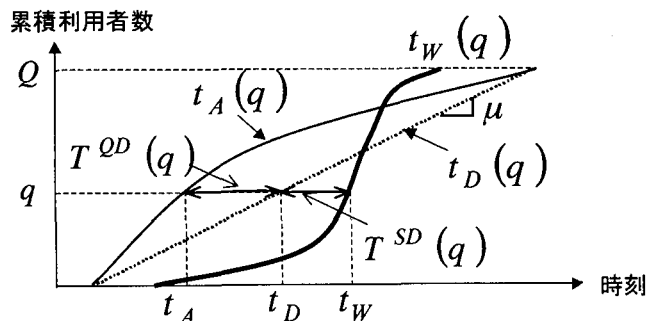


図-2 均衡状態における時刻-累積曲線

均衡解の存在は、勤務開始時刻曲線がS字型曲線であると仮定することによって保証される (Smith³⁾)。また、ペナルティ関数が狭義凸関数であると仮定すれば、均衡解は一意に決定し、FIFW (First-In-First-Work) 原則が成り立つことが Daganzo⁴⁾ によって証明されている。FIFWのもとでは、与件である勤務開始時刻 t_w の早い順にボトルネックを流出する。すなわち、 q 番目の勤務開始時刻を持つ利用者は q 番目に出発する。したがって、均衡状態における $T^{SD}(q, t_w)$ 、 $UC(q, t_w)$ は利用者 q のみの関数として表現できる。

(4) 均衡解の導出

以下では、ある勤務開始時刻曲線を与えた時の均衡解を導出する。

(a) ボトルネック出発時刻曲線

最初の利用者は、待ち行列がはじめて発生する瞬間にボトルネックに到着（＝出発）すると仮定しよう。このとき、均衡状態では全ての利用者に対して待ち行列が存在することになるので、ボトルネックは最大の流出率 μ で稼動する。したがって、ボトルネック出発（＝勤務地到着）時刻曲線は、

$$t_D(q) = \frac{q}{\mu} + t_D(0) \quad \forall q \quad (2.5)$$

(b) 待ち行列時間およびボトルネック到着時刻曲線

ボトルネック到着時刻 t_A は、ボトルネック出発時刻 t_D と T^{QD} の差で表される。いま、時刻 t_A と累積利用者数 q は一対一対応するので、式(2.4)は、

$$\frac{\partial UC(q)}{\partial q} = \frac{dT^{QD}(q)}{dq} + \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \frac{dT^{SD}(q)}{dq} = 0 \quad (2.6)$$

と表される。下位問題では、勤務開始時刻 t_w が与件であるので、式(2.6)は以下のように書き直せる：

$$\frac{\partial UC(q)}{\partial q} = \frac{dT^{QD}(q)}{dq} - \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \frac{dt_D(q)}{dq} = 0 \quad (2.7)$$

したがって、式(2.5)より、待ち行列時間と*Schedule Delay*に関する以下の式が得られる：

$$\frac{dT^{QD}(q)}{dq} = \frac{1}{\mu} \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \quad \forall q \quad (2.8)$$

この式(2.8) と以下の境界条件（最初と最後の利用者は待ち行列時間を負わないことを意味する）：

$$T^{QD}(0) = 0, T^{QD}(Q) = 0 \quad (2.9)$$

を組み合わせることによって、各利用者に対する待ち行列時間を導出することができる。導出した待ち行列時間とボトルネック出発時刻曲線より、以下のボトルネック到着時刻曲線が得られる：

$$t_A(q) = \frac{1}{\mu} \int_0^q \{1 - p'(t_W(\omega) - t_D(\omega))\} d\omega + t_A(0) \quad \forall q \quad (2.10)$$

$$\text{where } p'(T^{SD}(q)) = \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}}.$$

以上により、均衡状態における利用者のフローパターンが記述された。

この均衡解の具体例として、ペナルティ関数を以下のような2次関数とした場合を考えてみよう：

$$p(T^{SD}(q)) = a \{t_W(q) - t_D(q)\}^2 \quad \forall q \quad (2.11)$$

$$\text{where } a = \begin{cases} a_E & \text{if } T^{SD}(q) > 0 \\ a_L & \text{if } T^{SD}(q) < 0 \end{cases}$$

この場合、式(2.10)より、以下のような到着時刻曲線が得られる：

$$t_A(q) = \frac{1}{\mu} \int_0^q \{1 - 2a(t_W(\omega) - t_D(\omega))\} d\omega + t_A(0) \quad \forall q \quad (2.12)$$

ここで $t_A(0)$ は境界条件式(2.9)より内生的に決められる。

3. 勤務開始時刻曲線の最適化

下位問題で導出した関係式から明らかなように、均衡状態における利用者の待ち行列時間や総不効用は、勤務開始時刻曲線の形状に大きく依存している。そこで、上位問題では、どのように勤務開始時刻曲線を制御すれば、利用者のフローパターンが社会的に最適状態となるかを考える。ただし、ここでは“社会的最適状態”を“利用者全体の総不効用が最小となる状態”と定義する。なお、総利用者数 Q および最初と最後の利用者の勤務開始時刻 B_0 および B_f は与件とする。

(1) 定式化

この問題は、勤務開始時刻曲線を制御関数、利用者均衡状態での関係式を制約条件とし、利用者全体の総不効用を最小化する最適制御問題として定式化される：

$$\min_{t_W(\cdot)} \int_0^Q UC(t_W(q), T^{QD}(q), q) dq \quad (3.1)$$

subject to

$$\frac{dT^{QD}(q)}{dq} = \frac{1}{\mu} \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \quad \forall q \quad (3.2)$$

$$S(q) = \frac{dt_W(q)}{dq} \geq 0 \quad \forall q \quad (3.3)$$

$$T^{QD}(0) = 0, T^{QD}(Q) = 0 \quad (3.4)$$

$$t_W(0) = B_0, t_W(Q) = B_f \quad (3.5)$$

なお、この問題は、未知変数（関数）に関して凸な許容領域と狭義凸な目的関数を持つ最適制御問題であるので、その解は一意に決まることが保証される。

(2) 最適条件

最適解のLagrangianを次のように定義する。

$$L = \int_0^Q \left[-UC(q) + \pi(q) \left\{ \frac{1}{\mu} \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} - \frac{dT^{QD}}{dq} \right\} + \psi(q) S(q) \right] dq \quad (3.6)$$

ここで、 $\pi(q)$ 、 $\psi(q)$ は、各々、制約条件(3.2)、(3.3)に対応するLagrangian定数である。

また、Hamiltonianを

$$H(q) = -UC(q) + \pi(q) \frac{1}{\mu} \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \quad (3.7)$$

とすると、ポントリャーギンの最大値原理より以下のような最適条件を得る：

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t_W} = 0, \frac{\partial T^{QD}(q)}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial \pi}, \frac{\partial \pi(q)}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial T^{QD}}, \\ \psi(q) S(q) = 0, \psi(q) \geq 0, S(q) \geq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

(3) 最適解の導出

最適条件式(3.8)を解くと、最適な勤務開始時刻曲線は以下のように導出される（詳細は付録1を参照）：

$$t_W(q) = \begin{cases} B_0 & (0 \leq q \leq Q_a) \\ t_D(q) & (Q_a < q < Q_b) \\ B_f & (Q_b \leq q \leq Q) \end{cases} \quad (3.9)$$

ここで、 Q_a 、 Q_b は、各々、利用者が早着、遅刻に変わる境界時点での累積利用者数である。これらの変数は、以下の連立方程式の解として決定される：

$$\begin{aligned} \mu \int_{Q_a}^Q \frac{dp(T^{SD}(Q_b - \omega))}{dT^{SD}} d\omega + \int_0^{Q_a} \frac{dp(T^{SD}(Q_a - \omega))}{dT^{SD}} d\omega &= 0 \\ Q_a = Q_b - (B_f - B_0)\mu & \end{aligned} \quad (3.10)$$

式(3.9)は、最適な勤務開始時刻曲線が図-3のような形状となることを意味している。すなわち、勤務開始時刻曲線と勤務地到着時刻曲線が可能な限り一致する状態が最適状態である。ただし、ここで注意すべきは、最適な勤務開始時刻曲線の絶対的位置は、 Q_a 、 Q_b によって規定されている点である。その最適な勤務開始時刻曲線に対応する Q_a 、 Q_b の値は、(関数 $t_d(q)$ の絶対位置が均衡条件から内生的に決まることに対応した) 条件式(3.10)を解いた結果、初めてわかるものである。

この Q_a 、 Q_b が決定されれば、最適な勤務開始時刻パタ

ーンが決まる。従って、TDM施策によって、勤務開始時刻分布を最適パターンへ近づけることを考える際には、 Q_a, Q_b がどのような性質を持っているかを知ることが重要である。これらの変数は、一般に、ペナルティ関数のパラメータと物理的条件 (μ, B_0, B_f, Q) に依存して値が決定される。例えば、ペナルティ関数のパラメータである遅刻の重み (例えば、2次関数なら a_L) に注目してみると、その増加に対して、 Q_a, Q_b は増加する。これは、利用者が遅刻を避けるためにより早く出発し、 $t_D(q)$ 全体が左へシフトすることを意味している。その他のパラメータに対する依存関係の詳細については、付録2にまとめて記しておく。

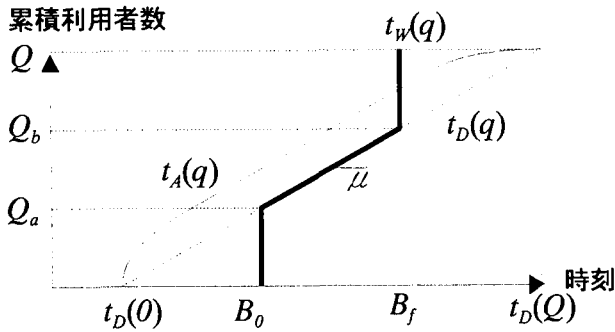


図-3 最適勤務開始時刻の累積曲線(基本問題)

4. 経路選択も考慮した最適勤務開始時刻曲線

前章では、利用者は出発時刻の選択のみを行なう場合について、利用者のフローパターンが社会的に最適状態となるような勤務開始時刻曲線を導出した。本章では、問題をより現実的にするために、利用者が経路と出発時刻を同時に選択するとした場合の最適勤務開始時刻曲線を導出する。

(1) 拡張問題の枠組み

拡張問題では、基本問題と同様、居住地から勤務地へ通勤する Q 人の通勤者がいると想定する。本問題では、一起点一終点間を2本の道路でつないだ図-4のような道路網を想定する。

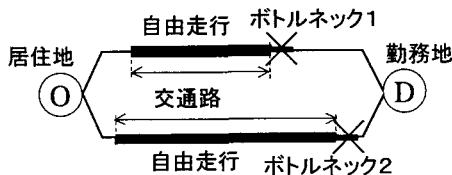


図-4 一起点一終点複数ボトルネック

単一ボトルネックを含む各道路を経路1、経路2と呼び、各ボトルネックの最大流出率は $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ とする。各ボトルネックのサービスは、基本問題と同様、FIFO 原則に従うとし、待ち行列の物理的長さを無視した point-queue モ

デルで表現する。

本問題では、 q 番目に居住地を出発する利用者 (利用者 q) がボトルネック j ($j=1,2$) へ到着 (流入) したときの累積利用者数を $q_j(q)$ と表す。さらに、利用者 q の居住地出発時刻を $t_A(q)$ 、その利用者が経路 j を走行した時の勤務地到着時刻を $t_{Dj}(q_j(q))$ と書く。このボトルネックでは、FIFO 原則より、 $q_j(q)$ 番目にボトルネック j に到着する利用者は、 $q_j(q)$ 番目に出発する。したがって、利用者 q が経路 j を走行した時の移動所要時間 $T_j^{QD}(t_A(q))$ は、

$$T_j^{QD}(t_A(q)) = t_{Dj}(q_j(q)) - t_A(q), \quad (j=1,2) \quad \forall q \quad (4.1)$$

ボトルネック j に待ち行列が存在しない場合は、

$$T_j^{QD}(t_A(q)) = m_j \quad (j=1,2) \quad \forall q \quad (4.2)$$

と表される。ここで、 m_j は経路 j ($j=1,2$) の自由走行時間である。ただし、本問題では $m_1 < m_2$ とする。

(2) 動的なネットワークフローが満たす条件

以下では、動的なネットワークフローが満たすべき条件を定式化する。これらの条件の本質的な意味内容は、基本問題の場合と同じである。基本問題では累積人数を用いた表現であったのに対し、本問題では流入・流出率を用いた表現となっているのは、経路選択条件を簡潔に表現するためである。

(c) フロー保存則

利用者 q がボトルネック j ($j=1,2$) に到着する時刻を t_{Aj} と表すと、居住地出発時刻とボトルネック j 到着時刻との間には、以下の関係式が必ず成り立つ：

$$t_A(q) = t_{Aj}(q_j(q)). \quad (j=1,2) \quad \forall q \quad (4.3)$$

$q_j(q)$ は、ボトルネック j への到着時刻 t_{Aj} の逆関数を定義することによって、以下のように表される：

$$q_j(q) = t_{Aj}^{-1}(t_A(q)). \quad (j=1,2) \quad \forall q \quad (4.4)$$

利用者 q は、各ボトルネックの累積到着利用者数の和であるので、以下の関係式が成り立つ：

$$q = t_{A1}^{-1}(t_A(q)) + t_{A2}^{-1}(t_A(q)). \quad (4.5)$$

ここで、 t_A および t_{Aj} が微分可能であるとするすれば、式(4.5)は以下の式と等価である：

$$\frac{dt_A(q)}{dq} = \frac{1}{\lambda_1(t_A) + \lambda_2(t_A)}. \quad (4.6)$$

$$\text{where} \quad \lambda_j(t) = \frac{dt_{Aj}^{-1}(t)}{dt} \quad (4.7)$$

(d) FIFO 原則

経路 j ($j=1,2$) を利用した場合の勤務地到着時刻 t_{Dj} の逆関数を定義することによって、FIFO 原則に関する関係式 (式(4.1)) は以下のように書き直せる：

$$t_{Aj}^{-1}(t_A(q)) = t_{Dj}^{-1}(t_A(q) + T_j^{QD}(t_A(q))). \quad (4.8)$$

ここで、 t_{Dj} 、 T_j^{QD} が微分可能であるとするすれば、式(4.8)は以下の式と等価である：

$$\lambda_j(t_A) = \mu_j(t_A + T_j^{QD}(t_A)) \left(1 + \frac{dT_j^{QD}(t_A)}{dt_A} \right). \quad (4.9)$$

$$\text{where} \quad \mu_j(t) = \frac{dt_{Dj}^{-1}(t)}{dt} \quad (4.10)$$

式(4.10)の勤務地到着率は、より具体的な表現が可能である。いま、ボトルネックのサービスは、FIFO 原則に従う point-queue モデルと仮定している。すなわち、ボトルネックに待ち行列が存在する場合、ボトルネックは最大流出率 $\bar{\mu}_j$ で稼動し、ボトルネックに待ち行列が存在しない場合、流入したフローは流入率と同率でボトルネックを流出する。したがって、勤務地到着率は、

$$\mu_j(t_A + T_j^{QD}(t_A)) = \begin{cases} \bar{\mu}_j & \text{if } T_j^{QD} > m_j \text{ or } \lambda_j(t_A) > \bar{\mu}_j \\ \lambda_j(t_A) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.11)$$

(e) ボトルネック車両存在台数

各ボトルネックの待ち行列時間は、ボトルネックに存在する車両台数によって決定する。ボトルネック j ($j=1,2$)に存在する車両台数 X_j は、同時刻のボトルネック j への到着累積利用者数 t_{Aj}^{-1} と出発累積利用者数 t_{Dj}^{-1} の差で表される：

$$X_j(t_A(q)) = t_{Aj}^{-1}(t_A(q)) - t_{Dj}^{-1}(t_A(q)). \quad \forall q \quad (4.12)$$

ここで、 X_j が微分可能であるとするすれば、式(4.12)は以下の式と等価である：

$$\frac{dX_j(t_A)}{dt_A} = \lambda_j(t_A) - \mu_j(t_A). \quad (4.13)$$

(f) 経路移動所要時間

ボトルネックの状態は、待ち行列が存在する場合と存在しない場合に分類できる。ボトルネック j ($j=1,2$)に待ち行列が存在する場合、ボトルネック j は最大流出率で稼動する。したがって、利用者 q が経路 j を走行したときの移動所要時間は、ボトルネック j の車両存在台数 X_j を用いて以下のように表される：

$$T_j^{QD}(t_A(q)) = \frac{X_j(t_A(q))}{\bar{\mu}_j}. \quad \forall q \quad (4.14)$$

ここで、ボトルネック j に待ち行列が存在する場合、

$$X_j(t_A(q)) > m_j \bar{\mu}_j. \quad (4.15)$$

である。一方、ボトルネックに待ち行列が存在しない場合、経路 j の移動所要時間は式(4.2) で与えられる。以上より、経路 j を走行したときの移動所要時間は、

$$T_j^{QD}(t_A(q)) = \begin{cases} \frac{X_j(t_A(q))}{\bar{\mu}_j} & \text{if } X_j(t_A) > m_j \bar{\mu}_j \text{ or } \lambda_j(t_A) > \bar{\mu}_j \\ m_j & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.16)$$

と表される。

(3) 利用者の行動モデル

勤務開始時刻 t_w が与えられた利用者 q は、自分の不効用が最小となるよう居住地出発時刻 t_A と経路 j ($j=1,2$) を選択する。そして、各利用者の不効用は、走行経路の移動所要時間と Schedule Delay 時間との和で表されると仮定する。すなわち、利用者 q の不効用は

$$UC(q, t_w, j) = t_{Dj}(q) - t_A(q) + p(t_w - t_{Dj}(q)), \quad \forall q \quad (4.17)$$

で与えられる。

(4) 均衡状態

本問題では、出発時刻と経路の同時選択における利用者均衡状態を“どの利用者も自分だけが居住地出発時刻または経路を変更することによって、自分の不効用を改善できない状態”と定義する。この同時選択における均衡状態は、出発時刻に関する均衡と経路選択に関する均衡が互いに影響を及ぼしながら同時に起っているとみなせる。

いま、仮に全ての利用者が、最適な出発時刻を選択したとしよう。このとき、同時選択における利用者均衡状態の定義より、利用者の経路選択は、以下の条件を満たさなければならない：全ての瞬間において、各利用者の選択経路が事後的に見ても真の最短経路である。つまり、利用者の最適な出発時刻が与えられていれば、経路選択のみについての利用者均衡条件が成立する。これは、以下のような相補性条件で表現される：

$$\begin{cases} \lambda_j(t_A) \{ T_j^{QD}(t_A(q)) + t_A(q) - t_D(q) \} = 0 \\ T_j^{QD}(t_A(q)) + t_A(q) - t_D(q) \geq 0, \lambda_j(t_A) \geq 0 \end{cases} \quad \forall q \quad (4.18)$$

ここで、 $t_D(q)$ は時刻 $t_A(q)$ に居住地を出発した利用者 q が最も早く勤務地に到着する時刻を表す。本問題では、この時刻 $t_D(q)$ を利用者 q の最早勤務地到着時刻と呼び、 $t_D(q) - t_A(q)$ を最早移動所要時間と呼ぶ。

次に、利用者は最適な経路を選択したとする。このとき、利用者の所要時間は、利用経路によらず、最早移動所要時間となる。従って、出発時刻に関する均衡条件は、基本問題の場合と同様、

$$\frac{\partial UC(t_A, t_w)}{\partial t_A} = 0. \quad \forall t_w \quad (2.4)$$

である。結局、出発時刻・経路の同時選択下での利用者均衡状態は、式(4.18)と式(2.4)が同時に成立する状態とし

て定式化された。

(5) 均衡解の導出

以下では、ある勤務開始時刻曲線を与えたときの均衡解を導出する。本問題の均衡解は、居住地出発時刻曲線 $t_A(q)$ と最早勤務地到着時刻曲線 $t_D(q)$ である。ただし、各瞬間における均衡フローパターンは、以下のように場合分けされる：

- (a)：経路1のみが利用される
- (b)：経路1のみに待ち行列が存在する
- (c)：経路1,2ともに待ち行列が存在する

(g) 経路1のみが利用される

いま、経路選択に関する均衡状態式(4.18)は、

$$\begin{cases} \text{経路1: } T_1^{QD}(t_A(q)) + t_A(q) = t_D(q), \quad \lambda_1(t_A) > 0 & (4.19a) \\ \text{経路2: } T_2^{QD}(t_A(q)) + t_A(q) > t_D(q), \quad \lambda_2(t_A) = 0 & (4.19b) \end{cases}$$

と表される。 T_1^{QD} および t_A, t_D が微分可能であるとする、式(4.19a)は以下の式と等価である：

$$\left\{ \frac{dT_1^{QD}(t_A)}{dt_A} + 1 \right\} \frac{dt_A(q)}{dq} = \frac{dt_D(q)}{dq}. \quad (4.20)$$

基本問題と同様、均衡状態では、全ての利用者が待ち行列を経験するので、ボトルネック1に必ず待ち行列が存在する。したがって、式(4.13)(4.16)より、以下の関係式が成り立つ：

$$\frac{dT_1^{QD}(t_A)}{dt_A} = \frac{\lambda_1(t_A) - \bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_1}. \quad (4.21)$$

また、出発時刻選択に関する均衡条件（式(2.4)）より、以下の関係式を得る：

$$\frac{dt_A(q)}{dq} = \frac{dt_D(q)}{dq} \left\{ 1 - \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \right\}. \quad (4.22)$$

出発時刻選択に関する均衡条件式(4.22)と経路選択に関する均衡条件式(4.21)を組み合わせると、経路1のボトルネック到着率は以下のように表される：

$$\lambda_1(t_A) = \bar{\mu}_1 \left\{ 1 - \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \right\}^{-1}. \quad (4.23)$$

以上をまとめると、居住地出発時刻曲線 $t_A(q)$ と最早勤務地到着時刻曲線 $t_D(q)$ に関する関係式、

$$\begin{cases} \frac{dt_A(q)}{dq} = \frac{1}{\bar{\mu}_1} \left\{ 1 - \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \right\} \\ \frac{dt_D(q)}{dq} = \frac{1}{\bar{\mu}_1} \end{cases} \quad (4.24)$$

が得られる。ただし、以下の境界条件（最初と最後の利用者は待ち行列時間を負わない）が課される：

$$t_D(0) - t_A(0) = m_1, \quad t_D(Q) - t_A(Q) = m_1. \quad (4.25)$$

(h) 経路1のみに待ち行列が存在する

いま、経路1,2ともに利用されているので、経路選択に関する均衡条件式 (4.18) は、

$$\begin{cases} \text{経路1: } T_1^{QD}(t_A(q)) + t_A(q) = t_D(q), \quad \lambda_1(t_A) > 0 & (4.26a) \\ \text{経路2: } T_2^{QD}(t_A(q)) + t_A(q) = t_D(q), \quad \lambda_2(t_A) > 0 & (4.27b) \end{cases}$$

ここで、 T_j^{QD} ($j=1,2$) および t_A, t_D が微分可能であるとすると、式(4.27a)(4.27b) は以下の式と等価である：

$$\left\{ \frac{dT_j^{QD}(t_A)}{dt_A} + 1 \right\} \frac{dt_A(q)}{dq} = \frac{dt_D(q)}{dq}. \quad (4.27)$$

この場合、経路2に待ち行列が存在しないので、各経路の移動所要時間は m_2 である。したがって、各経路の勤務地到着率式(4.11)は以下のように表される：

$$\mu_1(t_A + T_1^{QD}(t_A)) = \bar{\mu}_1, \quad \mu_2(t_A + T_2^{QD}(t_A)) = \lambda_2(t_A) \quad (4.28)$$

また、式(4.13)(4.16)より、以下の関係式が成り立つ：

$$\frac{dT_1^{QD}(t_A)}{dt_A} = \frac{\lambda_1(t_A) - \bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_1}, \quad \frac{dT_2^{QD}(t_A)}{dt_A} = 0. \quad (4.29)$$

式(4.29)と経路選択に関する均衡条件式(4.27)から、

$$\frac{dt_A(q)}{dq} = \frac{dt_D(q)}{dq}, \quad (4.30)$$

$$\lambda_1(t_A) = \bar{\mu}_1. \quad (4.31)$$

以上より、Case b の居住地出発時刻曲線 $t_A(q)$ と最早勤務地到着時刻曲線 $t_D(q)$ に関する関係式：

$$\frac{dt_A(q)}{dq} = \frac{dt_D(q)}{dq} = \frac{1}{\bar{\mu}_1 + \lambda_2(t_A)}, \quad (4.32)$$

が得られる。さらに、式(4.30)と出発時刻均衡条件式(4.22)から、

$$t_w(q) = t_D(q). \quad (4.33)$$

経路1のみに待ち行列が存在する区間 $[q_a, q_b]$ では、利用者 q は勤務開始時刻と同時に勤務地に到着する。したがって、この区間の最早移動所要時間は

$$t_D(q) - t_A(q) = m_2 \quad (q_a \leq q \leq q_b) \quad (4.34)$$

となる。

(i) 経路1,2ともに待ち行列が存在する

経路1,2ともに待ち行列が存在する場合、Case bと同様、経路選択に関する均衡状態は式(4.26a)(4.26b)によって表される。

いま、各経路に待ち行列が存在するので、各経路の勤

務地到着率（式(4.11)）は以下のように表される：

$$\mu_j(t_A + T_j^{QD}(t_A)) = \bar{\mu}_j. \quad (j=1,2) \quad (4.35)$$

また、式(4.13)(4.16)より、

$$\frac{dT_j^{QD}(t_A)}{dt_A} = \frac{\lambda_j(t_A) - \bar{\mu}_j}{\bar{\mu}_j}. \quad (j=1,2) \quad (4.36)$$

出発時刻選択に関する均衡条件式(4.22)、経路選択に関する均衡条件式(4.27)および式(4.36)を組み合わせれば、各経路のボトルネック到着率は、以下のように表される：

$$\lambda_j(t_A) = \bar{\mu}_j \left\{ 1 - \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \right\}^{-1}. \quad (j=1,2) \quad (4.37)$$

以上の関係式より、居住地出発時刻曲線 $t_A(q)$ と最早勤務地到着時刻曲線 $t_D(q)$ に関する関係式：

$$\begin{cases} \frac{dt_A(q)}{dq} = \frac{1}{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2} \left\{ 1 - \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \right\} \\ \frac{dt_D(q)}{dq} = \frac{1}{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2} \end{cases} \quad (4.38)$$

が得られる。ただし、以下の境界条件（経路2を利用する最初と最後の利用者の最早移動所要時間は m_2 に等しい）が課される：

$$t_D(q_a) - t_A(q_a) = m_2, \quad t_D(q_b) - t_A(q_b) = m_2. \quad (4.39)$$

(6) 均衡フローパターンの分類

前節で述べたように、均衡フローパターンは、各瞬間にだけ着目すると、(a)～(c) の場合がある。したがって、全時間帯における均衡フローパターンは、パラメータ (Q, μ) によって以下のように場合分けできる：

Case A：全時間帯を通じ経路2は利用されない。これは(a)のみが起り得る、すなわち、

$$t_D(q) - t_A(q) < m_2 \quad (0 \leq q \leq Q).$$

この場合の均衡解は、基本問題と同様となる。

Case B：全時間帯を通じ経路2に待ち行列が発生しない。このケースでは(a)(b)(a)と推移する、すなわち、

$$\begin{cases} t_D(q) - t_A(q) < m_2 & (0 \leq q < q_a, q_b < q \leq Q) \\ t_D(q) - t_A(q) = m_2 & (q_a \leq q \leq q_b) \end{cases}$$

Case C：経路1,2ともに待ち行列が発生する。このケースでは(a)(c)(a)と推移する、すなわち、

$$\begin{cases} t_D(q) - t_A(q) < m_2 & (0 \leq q < q_a, q_b < q \leq Q) \\ t_D(q) - t_A(q) = m_2 & (q = q_a, q_b) \\ t_D(q) - t_A(q) > m_2 & (q_a < q < q_b) \end{cases}$$

(7) 勤務開始時刻曲線の最適化

上位問題では、（経路と出発時刻を同時に選択する）利用者の均衡フローパターンが社会的に最適状態となるような勤務開始時刻曲線を導出する。基本問題と同様、社会的最適状態を利用者全体の総不効用が最小となる状態と定義する。ただし、均衡状態における利用者のフローパターンには複数のケース（Case A～C）がある。前章でも述べたように、Case Aは基本問題に帰着する。Case Bでは、経路1,2ともに利用される区間では式(4.33)(4.35)が成立し、勤務開始時刻と勤務地到着時刻が一致するから、Case Bでは経路1のみが利用されている区間のみを考えればよい。したがって、Case Aと同様、基本問題に帰着する。以上より、本章ではCase Cでの最適勤務開始時刻曲線を導出する。

(j) 定式化

この問題は、勤務開始時刻曲線を制御変数（関数）、利用者均衡状態での関係式を制約条件とし、全利用者の総不効用を最小化する最適制御問題として定式化される：

$$\min_{t_w(\cdot)} \int_0^Q UC(t_w(q), t_A(q), t_D(q), q) dq \quad (4.40)$$

subject to

$$\frac{dt_A(q)}{dq} = \frac{dt_D(q)}{dq} \left\{ 1 - \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \right\} \quad (4.41)$$

$$\frac{dt_D(q)}{dq} = \frac{1}{\mu} \quad (4.42)$$

$$\text{where } \mu = \begin{cases} \bar{\mu}_1 & (0 \leq q < q_a, q_b < q \leq Q) \\ \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 & (q_a \leq q \leq q_b) \end{cases}$$

$$S(q) \equiv \frac{dt_w(q)}{dq} \geq 0 \quad (4.43)$$

$$t_D(q) - t_A(q) = \begin{cases} m_1 & (q = 0, Q) \\ m_2 & (q = q_a, q_b) \end{cases} \quad (4.44)$$

$$t_w(0) \equiv B_0, t_w(Q) \equiv B_f \quad (4.45)$$

なお、この問題は、未知変数（関数）に関して凸な許容領域と狭義凸な目的関数を持つ最適制御問題であるので、その解は一意に決まることが保証される。

(k) 最適条件

最適解のLagrangianを

$$L = \int_0^Q \left[-UC(q) + \pi(q) \left\{ \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \right) - \frac{dt_A}{dq} \right\} + \vartheta(q) \left\{ \frac{1}{\mu} - \frac{dt_D}{dq} \right\} + \psi(q) S(q) \right] dq \quad (4.46)$$

と定義し、Hamiltonianを

$$H(q) = -UC(q) + \pi(q) \frac{1}{\mu} \left\{ 1 - \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \right\} + \vartheta(q) \frac{1}{\mu} \quad (4.47)$$

とすると、ポントリャーギンの最大値原理より以下のような最適条件を得る：

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t_w} = 0, \frac{\partial t_A(q)}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial \pi}, \frac{\partial \pi(q)}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial t_A}, \\ \frac{\partial t_D(q)}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial \vartheta}, \frac{\partial \vartheta(q)}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial t_D}, \\ \psi(q)S(q) = 0, \psi(q) \geq 0, S(q) \geq 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

(I) 最適解の導出

最適条件式(4.49)を解くと、最適勤務開始時刻曲線の形状は次のように導出される（詳細は付録3を参照）：

$$t_w(q) = \begin{cases} B_0 & (0 \leq q \leq Q_a) \\ t_D(q) & (Q_a < q < Q_b) \\ B_f & (Q_b \leq q \leq Q) \end{cases} \quad (4.49)$$

すなわち、最適勤務開始時刻曲線は、内生変数 Q_a および Q_b のみによって決定するといえる。また、最適状態における最早勤務地到着時刻曲線 $t_D(q)$ は、

$$t_D(q) = \begin{cases} \frac{q}{\bar{\mu}_1} + t_D(0) & (0 \leq q < q_a) \\ \frac{q - q_a}{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2} + t_D(q_a) & (q_a \leq q \leq q_b) \\ \frac{q - q_b}{\bar{\mu}_1} + t_D(q_b) & (q_b < q \leq Q) \end{cases} \quad (4.50)$$

と導出できる。最早勤務地到着時刻曲線の位置は、内生変数 $t_D(0)$, $t_D(Q)$ および q_a , q_b によって決定する。これらの内生変数 Q_a , Q_b , q_a , q_b および $t_D(0)$, $t_D(Q)$ は、最適勤務開始時刻曲線の形状と境界条件より導出することができる。

累積利用者数

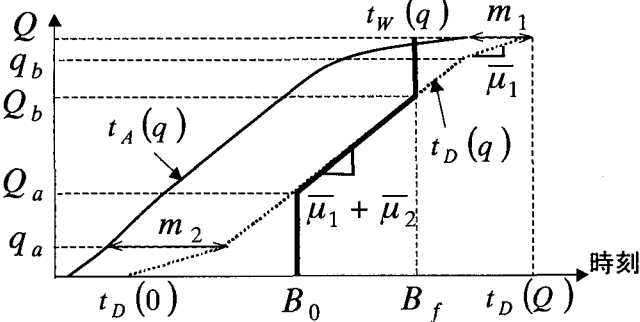


図-5 最適勤務開始時刻の累積曲線(Case C)

以上の結果より、経路選択も考慮した拡張問題でも、基本問題と同様、勤務開始時刻曲線と勤務地到着時刻曲線が可能な限り一致する状態が最適状態であるといえる。

(8) 勤務開始時刻の時間帯の幅と総待ち行列時間

前節で求めた最適勤務開始時刻曲線は、勤務開始時刻の時間帯の幅 $B_f - B_0$ によらず、図-5に示された形状となる。しかし、その最適勤務開始時刻に対する総待ち行列時間は、 $B_f - B_0$ の値に応じて変化するであろう。その変化の状況を示したのが図-6である。

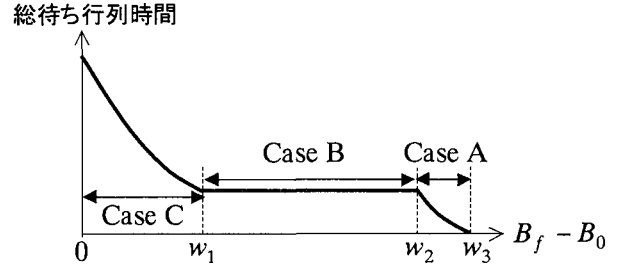


図-6 $B_f - B_0$ に対する総待ち行列時間の変化

当然のことながら、勤務開始時刻の時間帯の幅 $B_f - B_0$ の増加に対して、総待ち行列時間が増加することはない。しかし、図-6より、経路選択も考慮した拡張問題では、 $B_f - B_0$ の増加に対して総待ち行列時間が減少しない区間があることがわかる。この区間 $[w_1, w_2]$ では、経路2への流入率がボトルネック2の最大流出率 $\bar{\mu}_2$ より少ない状態を表している（いいかえると、経路2が有効に利用されていない）。したがって、Case Bのような状況では、勤務開始時刻を分散させても、それに必要な社会的コストに見合う効果が全く得られず、むしろ、他の政策（混雑料金、容量増強など）を選択するべきであることを示唆している。

5. おわりに

本稿では、通勤者のフローパターンを出発時刻選択に関する動的均衡状態として表現した上で、利用者全体の不効用を最小化する勤務開始時刻曲線の導出を行なった。そのために、まず、利用者の選択が出発時刻のみの基本問題について解析を行い、次に、経路選択と出発時刻の同時選択の起こる状況を考察した。

基本問題に対しては、勤務開始時刻曲線が勤務地到着時刻曲線に可能な限り一致する状態が最適であることがわかった。この勤務開始時刻曲線の形状は“待ち時間最小化問題”ならば、直感的に推測できる結果であろう。本稿では、その直感をより一般化し、“総不効用最小化問題”に対しても（一般的な非線型の不効用関数のもとで）同様の結論が成立することを理論的に明らかにした。また、最適な勤務開始時刻曲線の絶対的位置を知るためには、勤務開始時刻の下限までに到着すべき利用者の最適人数を決定する必要がある。本稿では、この最適人数が利用者の効用関数および物理的条件とどのような依存関

係にあるかを明らかにした。

次に拡張問題に対しても基本問題と同様の結論を得た。さらに、勤務開始時刻の時間帯の幅と総待ち行列時間との関係を考察した。その結果、勤務開始時刻の分散幅を増加させても全く効果がない場合がありえることを示した。これは、フレックスタイムなどの政策を実施する際には、対象ネットワークの構造についても十分考慮する必要があることを示唆している。

今後の課題としては、以下のようなモデルの拡張：

- ・一般ネットワークの取り扱い、
- ・利用者の異質性の考慮、

が考えられる。また、交通制御方策として、勤務開始時刻の分散、混雑料金、ボトルネックの改善などのいずれ（あるいは、これらの組み合わせ）が効果的であるかについての理論的解析も重要な課題であろう。最後に、本研究では社会的交通費用のみを問題としたが、企業の生産性向上と社会的交通費用減少のトレードオフを考慮した枠組への拡張も重要である。ただし、この枠組では勤務開始時刻の集中による規模の経済を考慮する必要があり、複数均衡解の問題が生じるであろう。この問題の探索には、より進んだ研究が必要である。

参考文献

- 1) Vickrey, W.S.: Congestion Theory and Transport Investment, *American Economic Review*, Vol.59, pp.251-261, 1969.
- 2) Hendrickson, C. and Kocur, G.: Schedule Delay and Departure Time Decisions in a Deterministic Model, *Transportation Science*, Vol.15, pp.62-77, 1981.
- 3) Smith, M.J.: The Existence of a Time-Dependent Equilibrium Distribution of Arrivals at a Single Bottleneck, *Transportation Science*, Vol.18, pp.385-394, 1984.
- 4) Daganzo, C.F.: The Uniqueness of a Time-dependent Equilibrium Distribution of Arrivals at a Single Bottleneck, *Transportation Science*, Vol.19, pp.29-37, 1985.
- 5) Arnott, R., Andre de Palma and Lindsey, R.: Structured Model of Peak-Period Congestion, *American Economic Review*, Vol.83, pp.161-179, 1993.
- 6) 赤松隆：交通流の予測・誘導・制御と動的なネットワーク配分理論, *土木計画学研究・論文集*, No.13, pp.23-48, 1996.
- 7) 桑原雅夫：道路交通における出発時刻選択に関する研究解説, *土木学会論文集* No.604/IV-41, pp.73-84, 1998.
- 8) 越 正毅：道路混雑対策としての時差出勤と混雑課金の効果についての一考察, *交通工学*, Vol.33, pp.65-74, 1998.
- 9) 小林潔司・奥村誠・永野光三：鉄道通勤交通における出発時刻分布に関する研究, *土木計画学研究・論文集*, No.14, pp.895-906, 1997.
- 10) 奥村誠・永野光三・小林潔司：始業時刻の設定が鉄道通勤交通に及ぼす影響に関する研究, *土木計画学研究・論文集*, No.15, pp.831-840, 1998.

付録1 最適勤務開始時刻曲線の導出(A.1)

最適条件式(3.8)より、最適勤務開始時刻曲線に関する以下の式が得られる：

$$\frac{\partial L}{\partial t_w} = 0 \text{ より, } \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} = \frac{\pi(q)}{\mu} \frac{d^2 p(T^{SD})}{dT^{SD^2}}. \quad (A.1)$$

また、最適条件式(3.8)より、待ち行列時間とラグランジュ乗数 π に関する一対の微分方程式は、

$$\frac{\partial T^{QD}(q)}{\partial q} = \frac{1}{\mu} \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}}, \quad (A.2)$$

$$\frac{\partial \pi(q)}{\partial q} = 1 \quad (A.3)$$

と表される。ここで、式(A.3)より、ラグランジュ乗数 π は以下のように表される：

$$\pi(q) = q + \pi(0). \quad \forall q \quad (A.4)$$

ペナルティ関数 $p(T^{SD})$ は、狭義凸関数かつ $|T^{SD}|$ に関して単調増加関数であると仮定している。このような性質を持つ $p(T^{SD})$ に関して以下の変数（関数）を定義する：

$$\begin{cases} P^{(1)}(T^{SD}) \equiv \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \begin{cases} > 0 & (T^{SD} > 0) \\ = 0 & (T^{SD} = 0) \\ < 0 & (T^{SD} < 0) \end{cases} \end{cases} \quad (A.5)$$

$$\begin{cases} P^{(2)}(T^{SD}) \equiv \frac{d^2 p(T^{SD})}{dT^{SD^2}} > 0. \end{cases} \quad (A.6)$$

このような関数 $P^{(1)}(T^{SD})$, $P^{(2)}(T^{SD})$ および式(A.4)を用いると、最適勤務開始時刻曲線に関する式(A.1)および最適状態における待ち行列時間に関する式(A.2)は、

$$P^{(1)}(t_w^*(q) - t_D(q)) = \frac{q + \pi(0)}{\mu} P^{(2)}(t_w^*(q) - t_D(q)), \quad (A.7)$$

$$\frac{\partial T^{QD}(q)}{\partial q} = \frac{1}{\mu} P^{(1)}(t_w^*(q) - t_D(q)) \quad (A.8)$$

と表される。ここで $t_w^*(q)$ は最適勤務開始時刻曲線である。

いま、最適勤務開始時刻と勤務地到着時刻が一致する利用者 q_* と表す。このとき、式(A.7)は、

$$P^{(1)}(0) = \frac{q_* + \pi(0)}{\mu} P^{(2)}(0) \quad (A.9)$$

となる。 $P^{(1)}(0)=0$ かつ $P^{(2)}(0)>0$ であるので、式(A.9)より π 定数は以下のように導出できる：

$$\pi(0) = -q_*. \quad (A.10)$$

以下では、式(A.7)(A.10)を用いて最適勤務開始時刻曲線 $t_w^*(q)$ の導出を行なう。

まず、勤務開始時刻よりも早く勤務地に到着する利用者 q ($0 \leq q \leq q_*$) の場合を考える。いま、ボトルネック出発時刻が B_0 となる利用者を Q_a とする。すなわち、

$$t_D(Q_a) = B_0, \quad Q_a \leq q_* \quad (\text{A.11})$$

この利用者 Q_a に対して、式(A.7)は、

$$P^{(1)}(t_w^*(Q_a) - B_0) = \frac{Q_a - q_*}{\mu} P^{(2)}(t_w^*(Q_a) - B_0) \quad (\text{A.12})$$

となる。ここで、 $T^{SD}(Q_a) \geq 0$ より、以下の式が成り立つ：

$$P^{(1)}(t_w^*(Q_a) - B_0) \geq 0, \quad (\text{A.13})$$

$$Q_a \leq q_*, \quad P^{(2)}(t_w^*(Q_a) - B_0) > 0. \quad (\text{A.14})$$

式(A.13)(A.14)より、式(A.12)は、左辺 ≥ 0 かつ 右辺 ≤ 0 となる。したがって、式(A.12)を満たす最適勤務開始時刻は以下の場合だけである：

$$t_w^*(Q_a) = B_0, \quad Q_a = q_* \quad (\text{A.15})$$

同様に、勤務開始時刻よりも遅く勤務地に到着する利用者 q ($q_* \leq q \leq Q$) の場合を考える。いま、ボトルネック出発時刻が B_f となる利用者を Q_b とする。すなわち、

$$t_D(Q_b) = B_f, \quad q_* \leq Q_b. \quad (\text{A.16})$$

この利用者 Q_b に対して、式(A.7)は、

$$P^{(1)}(t_w^*(Q_b) - B_f) = \frac{Q_b - q_*}{\mu} P^{(2)}(t_w^*(Q_b) - B_f) \quad (\text{A.17})$$

となる。 $T^{SD}(Q_b) \leq 0$ より、以下の式が成り立つ：

$$P^{(1)}(t_w^*(Q_b) - B_f) \leq 0, \quad (\text{A.18})$$

$$q_* \leq Q_b, \quad P^{(2)}(t_w^*(Q_b) - B_f) > 0. \quad (\text{A.19})$$

式(A.18)(A.19)より、式(A.17)は、左辺 ≤ 0 かつ 右辺 ≥ 0 となる。したがって、式(A.17)を満たす最適勤務開始時刻は以下の場合だけである：

$$t_w^*(Q_b) = B_f, \quad Q_b = q_* \quad (\text{A.20})$$

以上の式(A.15)(A.20)より、最適勤務開始時刻曲線は

$$t_w^*(q) = \begin{cases} B_0 & (0 \leq q \leq Q_a) \\ t_D(q) & (Q_a < q < Q_b) \\ B_f & (Q_b \leq q \leq Q) \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

さらに、待ち行列時間に関する式(A.8)と式(A.21)より、最適状態における各利用者の待ち行列時間は、

$$T^{SD}(q) = \begin{cases} \frac{1}{\mu^2} \int_0^q P^{(1)}(Q_a - \omega) d\omega + T^{SD}(0) & (0 \leq q < Q_a) \\ T^{SD}(Q_a) & (Q_a \leq q \leq Q_b) \\ \frac{1}{\mu} \int_{Q_b}^q P^{(1)}(Q_b - \omega) d\omega + T^{SD}(Q_b) & (Q_b < q \leq Q) \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

と導出できる。

付録2 内生変数 Q_a, Q_b の導出例

内生変数 Q_a, Q_b および $t_D(0), t_D(Q)$ は、境界条件 ($T^{SD}(0)=0$ かつ $T^{SD}(Q)=0$) より導出することができる。その具体例として、ペナルティ関数を以下のような2次関数とした場合を考えてみよう：

$$p(T^{SD}(q)) = a \{t_w(q) - t_D(q)\}^2 \quad \forall q \quad (\text{B.1})$$

$$\text{where } a = \begin{cases} a_E & \text{if } T^{SD}(q) > 0 \\ a_L & \text{if } T^{SD}(q) < 0 \end{cases}$$

このとき、境界条件は以下のように表される：

$$T^{SD}(Q) = 0 = a_E \left(\frac{Q_a}{\mu} \right)^2 - a_L \left(\frac{Q - Q_b}{\mu} \right)^2. \quad (\text{B.2})$$

また、最適勤務開始時刻曲線（式(A.21)）より、 Q_a, Q_b には以下の関係式が成り立つ：

$$Q_a = Q_b - (B_f - B_0)\mu. \quad (\text{B.3})$$

式(B.2)(B.3)より、 Q_a, Q_b は以下のように導出できる：

$$\begin{cases} Q_a = \frac{\sqrt{a_E a_L} - a_L}{a_E - a_L} \{Q - (B_f - B_0)\mu\}, \end{cases} \quad (\text{B.4a})$$

$$\begin{cases} Q_b = Q_a + (B_f - B_0)\mu. \end{cases} \quad (\text{B.4b})$$

これらの内生変数を用いれば、ボトルネック出発（到着）時刻曲線の位置は以下のように決まる：

$$\begin{cases} t_D(0) = B_0 - \frac{Q_a}{\mu}, \end{cases} \quad (\text{B.5a})$$

$$\begin{cases} t_D(Q) = B_f + \frac{Q - Q_b}{\mu}. \end{cases} \quad (\text{B.5b})$$

付録3 拡張問題の最適勤務開始時刻曲線の導出

最適条件式(4.49)より、最適勤務開始時刻曲線に関する以下の式が得られる：

$$\frac{\partial L}{\partial t_w} = 0 \text{ より, } \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} = -\frac{\pi(q)}{\mu} \frac{d^2 p(T^{SD})}{dT^{SD^2}} \quad (\text{C.1})$$

$$\text{where } \mu = \begin{cases} \bar{\mu}_1 & (0 \leq q < q_a, q_b < q \leq Q) \\ \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 & (q_a \leq q \leq q_b) \end{cases}$$

また、最適条件式(4.49)より、居住地出発時刻曲線とラグランジュ乗数 π に関する一対の微分方程式は、

$$\frac{dt_A(q)}{dq} = \frac{1}{\mu} \left\{ 1 - \frac{dp(T^{SD})}{dT^{SD}} \right\}, \quad (C.2)$$

$$\frac{\partial \pi(q)}{\partial q} = -1 \quad (C.3)$$

と表される。ここで、式(C.3)より、ラグランジュ乗数 π は以下のように表される：

$$\pi(q) = -q + \pi(0). \quad \forall q \quad (C.4)$$

$p(T^{SD})$ に関する $P^{(1)}(T^{SD})$, $P^{(2)}(T^{SD})$ および式(C.4)を用いると、最適勤務開始時刻曲線に関する式(C.1)は、

$$P^{(1)}(t_w^*(q) - t_D(q)) = \frac{q - \pi(0)}{\mu} P^{(2)}(t_w^*(q) - t_D(q)) \quad (C.5)$$

と表される。ここで、最適勤務開始時刻と勤務地到着時刻が一致する利用者 q と表すと、式(C.5)は、

$$P^{(1)}(0) = \frac{q_* - \pi(0)}{\mu} P^{(2)}(0) \quad (C.6)$$

となる。いま、 $P^{(1)}(0)=0$ かつ $P^{(2)}(0)>0$ であるので、式(C.7)より π 定数は以下のように導出できる：

$$\pi(0) = q_* \quad (C.7)$$

したがって、最適勤務開始時刻に関する式(C.5)は以下のように書き直せる：

$$P^{(1)}(T^{SD}(q)) = \frac{q - q_*}{\mu} P^{(2)}(T^{SD}(q)) \quad (C.8)$$

ここで、最早勤務地到着時刻が B_0 となる利用者を Q_a 、最早勤務地到着時刻が B_f となる利用者を Q_b として、式(C.9)を用いて基本問題と同様の解析を行なうと、以下のような関係式が得られる：

$$t_w^*(Q_a) = B_0, \quad Q_a = q_* \quad (C.9)$$

$$t_w^*(Q_b) = B_f, \quad Q_b = q_* \quad (C.10)$$

式(C.10)(C.11)より、最適勤務開始時刻曲線の形状は以下のように表される：

$$t_w^*(q) = \begin{cases} B_0 & (0 \leq q \leq Q_a) \\ t_D(q) & (Q_a < q < Q_b) \\ B_f & (Q_b \leq q \leq Q) \end{cases} \quad (C.11)$$

道路交通における通勤混雑緩和のための最適勤務開始時刻分布

赤松 隆・早崎 俊和・前田 祐希

本研究は、道路交通における通勤フロー・パターンが社会的に最適な状態となるような勤務開始時刻曲線を導き、その性質を考察するものである。これは、均衡制約付き(2段階)最適制御問題として定式化される：下位問題は、道路利用者の勤務開始時刻パターン(入力)とフロー・パターン(出力)の関係を表現する動的利用者均衡モデル；上位問題は、下位問題を制約条件、利用者全体の総不効用を最小化目的関数、勤務開始時刻パターンを制御関数とする最適制御問題である。本研究では、まず、均一の通勤者が単一ボトルネックを利用すると想定した基本問題を考察し、さらに、基本問題に利用者の経路選択も導入した拡張問題について議論する。

Optimal Dispersion of Morning Commuters in Road Networks with Queueing

Takashi AKAMATSU, Toshikazu HAYAZAKI and Yuki MAEDA

The purpose of this study is to derive an optimal distribution of work start times (W-curve) that effectively minimizes the social cost for morning commuters in road networks with queueing. Specifically, we consider the following bi-level programming problem: the lower-level problem describes equilibrium flow patterns under a given W-curve, and the upper-level problem optimizes a W-curve under the equilibrium constraints. We first derive the optimal W-curve for a basic model where homogeneous commuters pass through a single bottleneck. We then extend the analysis to the case where both route choice and departure time choice are simultaneously determined.