【土木計画学研究・論文集 No.15 1998年9月】

時間帯別OD需要とリンクでの渋滞を内生化した準動的交通配分*

Semi-dynamic Traffic Assignment Models with Queue Evolution and Elastic OD Demand

赤松 隆**・牧野幸雄***・高橋栄行****

By Takashi AKAMATSU, Yukio MAKINO and Eikou Takahashi

1. はじめに

渋滞した道路網において交通流を予測することは，交通計画に関わる多くの技術者・研究者にとって長らく悩みの種であった．従来の標準的（静的）交通均衡配分は，ある程度までの混雑は考慮できるが，渋滞状態を扱うことはできない．その最大の理由は，静的配分がフロー変数のみによって状態表現を行っていることにある．渋滞状態におけるリンク通過所要時間は，そのリンクに既に存在する車の台数（フロー変数ではなくストック変数）に大きく依存する．従って，フロー変数のみによってリンク通過所要時間を決定する従来の静的配分では，渋滞現象の適切な扱いは困難である．

この問題に対して，いくつかの提案がなされてきた．Okutani(1985)，井上(1986) は，標準的な静的均衡配分のリンクコスト関数を修正した問題あるいは明示的な容量制約を付加した問題によって渋滞遅延時間の導入を試みている．しかし，それらのモデルでは，渋滞遅延時間は交通流の特性とは無関係に決定されており，実際の渋滞現象との対応が不明確であるという問題点が残る．また，１時間帯での静的モデルであるため，渋滞の時間的進展メカニズムを内生できないという本質的課題が残されている．

渋滞の時間的進展を近似的に考慮する方法として，河上・溝上・鈴木(1985)，藤田・松井・溝上(1988)，宮城・牧村(1991) は，時間帯別均衡配分を提案している．これらの研究はいずれも，各時間帯で道路網を通過しきれない残留ＯＤ交通量を明示的に考慮したものである．このアプローチは，従来の静的配分のバイアスを軽減する有意義なものであるが，以下の重要な問題点が依然として残されたままである．

まず，各リンクでの渋滞を明示的に表現していないため，渋滞状態に対応したリンクコスト関数の設定法は理論的に曖昧なままである．この点に関して，藤田・山本・松井(1989) は，時間帯別配分にリンクでの渋滞表現の導入を試みている．しかし，残念ながら，待ち行列台数が明示的な内生変数とされていないため，そのコスト関数の設定には疑問が残る．

従来の時間帯別配分のもう一つの課題は，各時間帯のＯＤ需要が所与の定数となっていることである．時間帯別配分の重要な利用目的の一つは，時間帯別料金等のTDM施策の評価にあることを考えると，時間帯別ＯＤ需要の内生化は必須である．松井・藤田(1992)は，時間帯選択モデルを導入した配分を提案しているが，そのモデルでは，残留ＯＤ交通量の調整は外生的に行われており課題が残る．

最近，これらとはやや異なった系譜の研究から，渋滞現象および利用者の出発時刻選択行動を明示的かつ整合的に表現した動的均衡配分（例えば，赤松(1995, 1996)）が現れてきた．しかし，それらは，計算可能性等の面からは，まだ実用的レベルに達しているとは言い難い．

このように，従来のいずれのモデルも，a)渋滞待ち行列進展の適切な表現，b)利用者の時間帯・経路選択行動の統一的記述，c)計算の実行可能性・効率性という要請を同時に満たすものではない．そこで，本研究は，上記 a)～c)の条件を満たした配分モデルとその計算法の開発を目標とする．これを実現するために，以下の４つの方針を採用する：(1)動的配分と静的配分の長所を取り入れた時間帯別配分の枠組で考える．すなわち，時間帯内では静的配分と同様に定常状態を仮定し，時間帯間では動的配分と同様に状態変化を考慮する．(2)待ち行列の進展を考慮するために，動的配分におけるリンクの状態方程式と同様の条件を時間帯間で導入する．(3)利用者の時間帯・経路選択行動および均衡条件を明示的に導入し，時間帯別ＯＤ交通量を内生化する．(4)そのモデルを変

* Keywords:配分交通，渋滞，時間帯選択，経路選択，
** 正会員 工博 豊橋技術科学大学知識情報工学系
*** 正会員 工修 富士通コンピュータテクノロジ
**** 学生会員 豊橋技術科学大学知識情報工学専攻

分不等式の枠組みで統一的に定式化・解析する．これによって収束の保証された効率的計算法の開発が実現できる．

本稿の構成は以下のとおりである．まず，第2節では，渋滞を内生化した時間帯別均衡配分の本質的な点の理解を容易にするために，時間帯別ＯＤ需要が固定された場合を扱う．第3節では，これを時間帯別ＯＤ需要を内生化したモデルへ一般化する．第4節では，第2，3節の各モデルに対して，均衡解への収束が保証された計算法を提示する．最後の第5節では，まとめと今後の課題を述べる．

２．渋滞を考慮した時間帯別均衡配分

本節では，次節以降の準備として，時間帯別ＯＤ需要が固定された（所与の）簡単な場合についてモデルの定式化と基本的な解析を行う．

2.1 定式化

(1) ネットワーク

道路網は，ノード集合Nおよび有向リンク集合Lからなるネットワーク$G(N,L)$として表現されるものとする．各ノードおよび各リンクは整数の連番で区別される．ＯＤペアは起点・終点ノードのペアで表し，その集合をWと書く．また，ＯＤペアodの経路の集合をK_{od}，全経路の集合をKと書く．あるリンクがある経路に含まれるか否かは，リンク・経路接続行列$\Delta=[\delta_{r,a}^{od}]$によって表現される．ここで，$\delta_{r,a}^{od}$はリンク$a$がＯＤペア$od$の経路$r$上にあれば１，そうでなければ０である．

(2) 時間帯に関する仮定

本研究では，時間の流れを，ある一定の長さ T をもつ"時間帯"ごとに離散的に分割して考える．各時間帯は時刻の進行順に，0,1,2,...,M の整数連番で区別される．状態の変化は時間帯の間でのみ起こり，時間帯内では定常状態にあると仮定する．また，各時間帯の長さ T は，任意のＯＤペア間の交通所要時間よりも大きいと仮定する．なお，この節のモデルでは，各時間帯ごとのＯＤ需要$\{q_{od}^{(m)}\}$は所与であると仮定する（第3節では$\{q_{od}^{(m)}\}$は内生化される）．

(3) リンクでの待ち行列進展の表現

各リンクは 非渋滞領域での走行による出口までの移動を表す“走行リンク”と，リンク下流端で生じる渋滞待ち行列を表す“待ち行列リンク”という２種類のサブ・リンクから構成されていると考える．また，(2)で仮定したように，時間帯内では（定常状態であるので）リンクa の待ち行列および流入・流出率は一定である．リンクa の時間帯 m における待ち行列台数を$X_a^{(m)}$，流入率(台数)を$x_a^{(m)}$と書く．

待ち行列リンクでの待ち行列は，物理的な長さを無視した “point queue (vertical queue)” モデルで考える．また，待ち行列リンクa のサービス率には，その道路の物理的特性から決まる所与の上限があり，１時間帯当りの最大流出率(台数)をμ_aと書く．このモデルでは，待ち行列が存在せず，かつ流入率がμ_aを超えない状態では，流入フローは流入時と同一の流率で直ちに出てゆく．しかし，そうでない場合には，流出率は最大流出率となる．ただし，待ち行列長等の状態変化は時間帯間でのみ起こると考えているので，状態方程式は

$$\begin{cases} X_a^{(m)} = X_a^{(m-1)} + x_a^{(m)} - \mu_a & if \quad X_a^{(m)} > 0 \\ X_a^{(m-1)} + x_a^{(m)} \le \mu_a & if \quad X_a^{(m)} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

となる．また，時間帯 m にリンクa に流入した車の渋滞待ち時間は，

$$e_a^{(m)} = e_a(X_a^{(m)}) = X_a^{(m)} / \mu_a \tag{2}$$

で与えられる．以上の関係は図1のように表される．

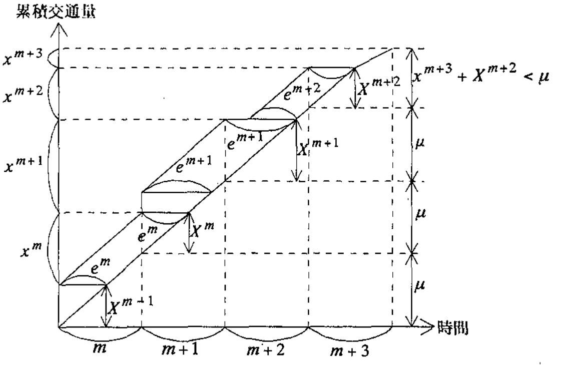

図1 時間帯間での待ち行列の進展

走行リンクでは，時間帯 m におけるリンク旅行時間は，通常の静的配分と同様のリンクコスト関数$t_a^{(m)}=t_a(x_a^{(m)})$で与えられると考える．従って，時間帯 m にリンクa に流入した車がリンクを通過するのに要する時間は $t_a(x_a^{(m)})+e_a(X_a^{(m)})$で与えられる．

(4) 利用者の経路選択均衡条件とフロー保存条件

利用者がＯＤペアod の r 番目経路を時間帯 m に通過するのに要する経路所要時間は，

$$C_r^{od,(m)} = \sum_a (t_a^{(m)} + e_a^{(m)})\,\delta_{r,a}^{od}$$
$$= \sum_a \{t_a(x_a^{(m)}) + e_a(X_a^{(m)})\}\,\delta_{r,a}^{od} \qquad (3)$$

で与えられる．利用者の経路選択行動は，各時間帯内で，Wardrop均衡原則に従うものとする．すなわち，

$$\begin{cases} C_r^{od,(m)}(\mathbf{x},\mathbf{X}) = u_{od}^{(m)} & if \quad f_r^{od,(m)} > 0 \\ C_r^{od,(m)}(\mathbf{x},\mathbf{X}) \geq u_{od}^{(m)} & if \quad f_r^{od,(m)} = 0 \end{cases} \quad \forall r, od \quad (4a)$$

ここで，$f_r^{od,(m)}$ はODペアod の r 番目経路を時間帯 m に通過する交通量（台数）．また，この経路交通量は時間帯別OD交通量$q_{od}^{(m)}$と以下のフロー保存条件を見たさねばならない：

$$\sum_r f_r^{od,(m)} = q_{od}^{(m)} \qquad (4b)$$

さらに，時間帯 m のリンクa の流入交通量は経路交通量と以下の関係にある：

$$x_a^{(m)} = \sum_{od}\sum_a f_r^{od,(m)}\delta_{r,a}^{od} \qquad (5)$$

以降では，以上の関係式(1)～(5)を同時に満たした状態モデルを固定需要型の時間帯別均衡配分[UEQ/FD]と呼ぶ．

2.2 変分不等式問題としての表現

上で定式化されたモデル[UEQ/FD]では，時間帯 m に関する変数は，時間帯 m と時間帯 m-1 に関する変数のみに依存している．従って，時間帯0の状態（初期条件）が所与であれば，時間軸に関して“前向き”に問題を時間帯ごとに独立に分解して計算してゆくことができる．そこで，以下では，時間帯 m-1 に関する変数は所与とした時の時間帯 m の状態を求める問題のみを考える．また，この節の以下の記述では，時間帯 m を表す上付添字を省略するが，主な変数は全て時間帯 m の状態を表すものとする．

さて，基本的な定式化(1)～(5) は，そのままではモデル特性の解析・アルゴリズムの開発等が難しい．そこで，これを変分不等式問題 (VIP:Variational Inequality Problems)に変換することを考える．まず，各リンクでの待ち行列の進展条件式(1)は，以下の相補性条件として表現できる：

$$\begin{cases} X_a \cdot \{\overline{\mu}_a - (x_a - X_a)\} = 0 \\ \qquad \overline{\mu}_a - (x_a - X_a) \geq 0,\ X_a \geq 0 \end{cases} \quad \forall a \qquad (6a)$$

ここで， $\overline{\mu}_a = \mu_a - X_a^{(m-1)} = given\ \ constant \qquad (6b)$

また，式(4b)のフロー保存条件は，経路選択条件(4a)を考慮すると，形式的に，以下のような相補性条件式として表現しても等価である：

$$\begin{cases} u_{od}\cdot(\sum_r f_r^{od} - q_{od}) = 0 \\ \qquad \sum_r f_r^{od} - q_{od} \geq 0,\ u_{od} \geq 0 \end{cases} \quad \forall od \qquad (7)$$

つまり，渋滞を考慮した時間帯別配分の基本的な条件式(4a),(6), (7)は全て相補性形式で表現されており，全体として標準形の相補性問題となっている．従って， $\Omega = R_+^{|K|} \times R_+^{|L|} \times R_+^{|W|}$, $\mathbf{Y}=(\mathbf{f}, \mathbf{X}, \mathbf{u})^T$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \Delta^T\mathbf{M}^{-1} & -\mathbf{E}^T \\ -\Delta & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{X} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta^T\mathbf{t}(\Delta\mathbf{f}) \\ \overline{\mu} \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} \qquad (8a)$$

と定義すれば，均衡条件(4a),(6), (7)は，明らかに，以下のVIPとも等価である：

[VIP-0]　Find $\mathbf{Y}^* \in \Omega$ such that

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y})\cdot(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{Y} \in \Omega\,. \qquad (8b)$$

ここで $\mathbf{E}$ は対角要素に$|W|$個の$|K_{od}|$次元横ベクトル $\mathbf{1}$=[1,....,1] を持つブロック対角行列，$\mathbf{M}$ は対角要素にμ_aを持つ$|L|\times|L|$対角行列である．

2.3 等価な最適化問題

[VIP-0] は “quantity変数”である$(\mathbf{f},\mathbf{X})$と “price変数” である$\mathbf{u}$が同時に未知変数となっている．しかし，許容領域を変形すれば，quantity変数のみ，あるいはprice変数のみを明示的な未知変数としたVIP を構成することも可能である．そのような問題の変換は，モデルの持つ構造を明かにし，さらに，アルゴリズム開発に有効な “等価最適化問題” を系統的に導く（あるいはその存在を調べる）手立てを与える．以下では，そのような変換された問題を示す．

(1) Quantity変数のみを用いた表現

いま,以下のように定義される$(\mathbf{x}, \mathbf{X})$の許容領域Ω_P:

$$\{(\mathbf{x},\mathbf{X})\,|\,\mathbf{x} = \Delta\mathbf{f}, \mathbf{q} = \mathbf{E}\mathbf{f}, \overline{\mu} + \mathbf{X} - \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{f} \geq \mathbf{0}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}\}$$

を考えると，[VIP-0]は $(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ を未知変数とする以下のVIPと等価である：

[VIP/FD-Primal]　*Find*　$(\mathbf{x}^*, \mathbf{X}^*) \in \Omega_P$　*such that*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}^*)\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{X}^*\cdot(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*) \geq 0$$

$\forall$

このVIPの写像は明らかに積分可能であるので，以下の凸計画問題[CP-Primal]としても表現できる：

$$\min_{\mathbf{x},\mathbf{X}}.\sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega + \sum_a X_a{}^2/(2\mu_a) \tag{10}$$

$$s.t.\quad q_{od} = \sum_r f_r^{od} \qquad \forall od \tag{11a}$$

$$\overline{\mu}_a - (x_a - X_a) \geq 0 \qquad \forall a \tag{11b}$$

$$f_r^{od} \geq 0 \quad \forall r, od\ ,\ X_a \geq 0 \qquad \forall a \tag{11c}$$

and (5).

この問題は，目的関数式(10)の第２項と制約条件(11b)を除けば，静的な均衡配分の等価最適化問題と同じである．そして，制約条件式(11a)と(11b) のLagrange乗数を，各々，$\{u_{od}\}$と$\{e_a\}$と書くと，最適性の必要十分条件は明らかに式(1)～(5)と一致する．すなわち，Lagrange乗数$\{e_a\}$に関する最適条件が待ち行列進展条件(1)，$\mathbf{X}$に関する最適条件が待ち時間条件(2)と一致し，$\mathbf{x}$ と$\mathbf{u}$に関する最適条件から経路選択均衡条件(4)が示される．

この最適化問題から，[UEQ/FD]の均衡解 $(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ は一意的に決ることがわかる．なぜなら，式(10)の目的関数は狭義凸関数で許容領域も凸だからである．

(2) Price変数のみを用いた表現

次に,以下のように定義される$(\mathbf{t},\mathbf{e},\mathbf{u})$の許容領域$\Omega_D = \{(\mathbf{t},\mathbf{e},\mathbf{u}) \mid \Delta^T(\mathbf{t}+\mathbf{e}) \geq \mathbf{E}^T\mathbf{u},\ \mathbf{t} \geq \mathbf{0}, \mathbf{e} \geq 0\}$を考えると，[VIP-0]は$(\mathbf{t},\mathbf{e},\mathbf{u})$を未知変数とする以下のVIPとも等価である：

[VIP/FD-Dual] *Find* $(\mathbf{t}^*, \mathbf{e}^*, \mathbf{u}^*) \in \Omega_D$ *such that*

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}^*)\cdot(\mathbf{t}-\mathbf{t}^*) - \mathbf{q}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{u}^*) + (\overline{\mu} + \mathbf{M}\,\mathbf{e}^*)\cdot(\mathbf{e}-\mathbf{e}^*) \geq 0 \quad \forall(\mathbf{t},\mathbf{e},\mathbf{u}) \in \Omega_D \tag{12}$$

ここで $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ はリンクコスト関数の逆関数ベクトル．

このVIPの写像は明らかに積分可能であるので，以下の凸計画問題[CP-Dual] としても表現できる：

$$\min_{\mathbf{t},\mathbf{e},\mathbf{u}}.\sum_a \int_{\underline{t_a}}^{t_a} x_a(\nu)d\nu - \sum_{od} q_{od}u_{od} + \sum_a(\overline{\mu}_a e_a + \frac{\mu_a}{2}e_a{}^2)$$

$$s.t.\quad (\mathbf{t}, \mathbf{e}, \mathbf{u}) \in \Omega_D \tag{13}$$

さらに，$\{u_{od}\}$は$(\mathbf{t}, \mathbf{e})$ の関数として表現できるので，[CP-Dual]は $(\mathbf{t}, \mathbf{e})$ のみを未知変数とする以下の問題としても表される：

$$\min_{\mathbf{t},\mathbf{e}}.\sum_a \int_{\underline{t_a}}^{t_a} x_a(\nu)d\nu - \sum_{od} q_{od} \min_r.\{(t_a + e_a)\delta_{r,a}^{od}\} + \sum_a(\overline{\mu}_a e_a + \frac{\mu_a}{2}e_a{}^2) \quad s.t.\ \mathbf{e} \geq \mathbf{0} \tag{14}$$

この目的関数は$(\mathbf{t}, \mathbf{e})$に関して狭義凸関数であるから，均衡解 $(\mathbf{t}, \mathbf{e})$ は一意的に決ることがわかる．

3. 渋滞と時間帯別需要を内生化した均衡配分

本節では，前節のモデルに利用者の時間帯選択を追加（時間帯別OD需要を内生化）したモデルを扱う．

3.1 定式化

ネットワーク，時間帯に関する仮定，およびリンクでの待ち行列進展の表現は，第2節の[UEQ/FD]と全く同じである．需要条件については，[UEQ/FD]をより一般化し，利用者の時間帯選択行動も導入する．より具体的には，時間帯選択を上位，経路選択を下位の階層とする Nested Logit Model に基づいた確率的均衡原則によって利用者行動を記述する．すなわち，時間帯 m の経路交通量は，

$$f_r^{od,(m)} = q_{od}^{(m)} \frac{\exp\left[-\theta\, C_r^{od,(m)}\left(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{X}^{(m)}\right)\right]}{\sum_r \exp\left[-\theta\, C_r^{od,(m)}\left(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{X}^{(m)}\right)\right]} \tag{15}$$

で与えられ，時間帯mのＯＤ交通量は，

$$q_{od}^{(m)} = Q_{od} \frac{\exp\left[-\eta\left(S_{od}^{(m)} - V_{od}^{(m)}\right)\right]}{\sum_m \exp\left[-\eta\left(S_{od}^{(m)} - V_{od}^{(m)}\right)\right]} \tag{16}$$

で与えられると仮定する．ここで，Q_{od} はＯＤペア od の全時間帯の総交通量（与件），$V_{od}^{(m)}$は時間帯 m とＯＤペア od に固有の効用（所与の定数），$S_{od}^{(m)}$はＯＤペアod の時間帯mの期待最小費用：

$$S_{od}^{(m)} = -\frac{1}{\theta}\ln\sum_r \exp\left[-\theta\, C_r^{od,(m)}\left(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{X}^{(m)}\right)\right], \tag{17}$$

θ, ηは各々，経路，時間帯選択の分散パラメータである．以降では，式(1)-(3),(5),(15)-(17)を同時に満たした状態を，弾性的な時間帯別 OD 需要均衡配分[UEQ/ED] と呼ぶ．

3.2 等価な変分不等式問題

[UEQ/ED]は，第２節のモデル[UEQ/FD]とは異なり，問題を時間帯ごとに独立に分解して解いてゆくことができない．というのは，各時間帯のＯＤ交通量 $\mathbf{q}^{(m)}$を決定するためには，式(16)より，前の時間帯のみならず全時間帯での均衡コスト$\{\mathbf{S}^{(m)}\}$が同時に必要とな

るからである（そして，$\mathbf{q}^{(m)}$が決っていなければ，各時間帯のリンク交通量 $\mathbf{x}^{(m)}$，待ち行列 $\mathbf{X}^{(m)}$，ひいては均衡コスト $\mathbf{S}^{(m)}$も決定できない）．従って，[UEQ/ED]は全ての時間帯を同時に考えた定式化によって解析しなければならない．以下では，時間帯を表す添字の無いベクトルは，原則として，各時間帯ごとの変数ベクトルを１列にまとめて並べた列ベクトルを意味する（eg. $\mathbf{x}=(\mathbf{x}^{(1)},..,\mathbf{x}^{(m)},..,\mathbf{x}^{(M)})^T$）．

さて，式(1)-(3),(5),(15)-(17)は，[UEQ/FD]の場合と同様に，全て相補性条件として表現することができる（例えば，式(15)は,[UEQ/FD]における(4a)と(7)に相当する２組の相補性条件を用いて表現できる．式(16)についても同様）．従って，[UEQ/FD]における[VIP-0]に相当する等価変分不等式問題[VIP/ED-0]を容易に構成できる．ここでは，（冗長な [VIP/ED-0]の記述は省略し）それを用いて導かれるより解析しやすい（互いに双対な）二種類の等価 VIP のみを示す．

(1) Quantity変数のみを未知変数とする問題

まず，quantity 変数$(\mathbf{q},\mathbf{f},\mathbf{x},\mathbf{X})$の許容領域$\Omega_{\mathrm{P}}$を

$$\mathbf{E}_1\mathbf{q}=\mathbf{Q},\quad \mathbf{q}\geq\mathbf{0}, \tag{18}$$

$$\mathbf{E}_2\mathbf{f}=\mathbf{q},\quad \mathbf{f}\geq\mathbf{0},\quad \mathbf{x}=\Delta_1\mathbf{f}, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{\mu}-\mathbf{X}^{(m-1)}+\mathbf{X}^{(m)}-\mathbf{x}^{(m)}\geq\mathbf{0}\ \ \forall m,\ \ \mathbf{X}\geq\mathbf{0}. \tag{20}$$

と定義しよう．ここで $\mathbf{E}_1$は対角要素に$|W|$個のM次元行ベクトル $\mathbf{1}$=[1,....,1] をもつブロック対角行列，$\mathbf{E}_2$は対角要素にM個の行列Eをもつブロック対角行列，Δ_1は対角要素にM個の行列Δを持つブロック対角行列である．この許容領域Ω_{P}を用いると，[UEQ/ED]は (q,f,x,X) のみを明示的な未知変数とする以下のVIPとして表現できる（証明は付録を参照）：

[VIP/ED-Primal] *Find* $(\mathbf{q}^*,\mathbf{f}^*,\mathbf{x}^*,\mathbf{X}^*)\in\Omega_{\mathrm{P}}$ *such that*

$$\sum_m \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(m)*})\cdot(\mathbf{x}^{(m)}-\mathbf{x}^{(m)*})+\frac{1}{\theta}\sum_m \ln\mathbf{f}^{(m)*}\cdot(\mathbf{f}^{(m)}-\mathbf{f}^{(m)*})$$
$$+\sum_m \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{X}^{(m)*}-\mathbf{X}^{(m+1)*})\cdot(\mathbf{X}^{(m)}-\mathbf{X}^{(m)*})$$
$$+\sum_m\left(\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\theta}\right)\ln\mathbf{q}^{(m)*}-\mathbf{V}^{(m)}\right)\cdot(\mathbf{q}^{(m)}-\mathbf{q}^{(m)*})\geq 0$$
$$\forall(\mathbf{q},\mathbf{f},\mathbf{x},\mathbf{X})\in\Omega_{\mathrm{P}} \tag{21}$$

式(21)左辺の第1項は第2節の[VIP/FD-Primal] と同様の項である．第2項は，経路選択を確率的に（Logitモデルで）考えたための付加項である．第3項は[VIP/FD-Primal]の第2項に相当する．ただし，各時間帯 mでの$\mathbf{X}^{(m)}$による影響を独立に考えられる形式となっていた[VIP/FD-Primal]よりも複雑である．すなわち，[VIP/ED-Primal] では，全時間帯の変数を同時に考えねばならないため，各時間帯mにおいて，２つの時間帯の相互干渉効果（$\mathbf{X}^{(m)}-\mathbf{X}^{(m+1)}$）を同時に考慮しなければならない形式となっている．第4項は時間帯選択に関する項であり，その中の対数項は時間帯選択を確率的に考えたための付加項である．

このVIP は，残念ながら，等価な最適化問題に帰着させることはできない．なぜなら，式(18)左辺第３項$\{\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{X}^{(m)}-\mathbf{X}^{(m+1)})\}$が積分不可能（∵ Jacobianが非対称）だからである．

(2) Price変数のみを未知変数とする問題

次に，price 変数$(\mathbf{t},\mathbf{e},\mathbf{S},\mathbf{T})$の許容領域$\Omega_{\mathrm{D}}$を，以下のように定義する：

$$S_{od}^{(m)}\leq-\frac{1}{\theta}\ln\sum_r\exp[-\theta\sum_a(e_a^{(m)}+t_a^{(m)})\,\delta_{r,a}^{od}]\ \forall m,\forall od\ ,$$

$$T_{od}\geq\frac{1}{\eta}\ln\sum_m\exp[\eta\,(V_{od}^{(m)}-S_{od}^{(m)})]\ \}\ \ \forall od,\quad \mathbf{e}\geq\mathbf{0}.$$

これは，$\theta\to\infty,\eta\to\infty$（i.e.経路と時間帯の選択が完全に確定的）とすれば，以下のようになる：

$$\mathbf{E}_1{}^T\mathbf{S}^{(m)}\leq\Delta^T(\mathbf{e}^{(m)}+\mathbf{t}^{(m)})\quad\forall m,$$

$$\mathbf{E}_2{}^T\mathbf{T}\geq\mathbf{V}-\mathbf{S},\quad \mathbf{e}\geq\mathbf{0}.$$

つまり，集合Ω_{D}内では，$\mathbf{S}$ は時間帯・ＯＤペアごとの（経路を通じた）最小費用以下：

$$S_{od}^{(m)}\leq\min_r.\sum_a(e_a^{(m)}+t_a^{(m)})\delta_{r,a}^{od}\qquad\forall od,m$$

となることを，また，$\mathbf{T}$ はＯＤペアごとの（時間帯を通じた）最大効用以上：

$$T_{od}\geq\min_m.\{V_{od}^{(m)}-S_{od}^{(m)}\}\qquad\qquad\forall od$$

となることを要請される．これを確率的な場合に拡張したものがΩ_{D}である．

この許容領域を用いると，[UEQ/ED] は(t, e, S, T)を未知変数とする以下のVIPとして表現できる（証明は [VIP/ED-Primal]の場合と同様ゆえ省略）：

[VIP/ED-Dual] *Find* $(\mathbf{t}^*,\mathbf{e}^*,\mathbf{S}^*,\mathbf{T}^*)\in\Omega_{\mathrm{D}}$ *such that*

$$\sum_m \mathbf{x}(\mathbf{t}^{(m)*})\cdot(\mathbf{t}^{(m)}-\mathbf{t}^{(m)*})+\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{T}-\mathbf{T}^*)$$
$$+\sum_m\left(\boldsymbol{\mu}-\mathbf{M}(\mathbf{e}^{(m-1)*}-\mathbf{e}^{(m)*})\right)\cdot(\mathbf{e}^{(m)}-\mathbf{e}^{(m)*})\geq 0$$
$$\forall(\mathbf{t},\mathbf{e},\mathbf{S},\mathbf{T})\in\Omega_{\mathrm{D}} \tag{22}$$

なお，[VIP/ED-Primal]の場合と同様，このVIP は，等価な最適化問題に帰着させることはできない．

3.4 解の存在と一意性

(1) 均衡解の存在

変分不等式問題に対する標準的な解の存在定理を[VIP/ED-Primal] に適用すれば，[UEQ/ED] の均衡解の存在を検討することができる．ここでは，紙面に制約があるため，結果のみ簡単に述べる．各時間帯の待ち行列長 $\mathbf{X}^{(m)}$に関する上限が無い場合には，均衡解の存在を保証することは難しい（存在しないことを保証しているのではない．この場合の詳細な解析は今後の課題である）．しかし，各時間帯の待ち行列長が単位時間帯当りの最大リンク流出台数よりも大きくならないと仮定すれば（i.e. ３つ以上の時間帯にまたがってリンクに滞留する車は無いと仮定すれば），均衡解の存在が保証される．

(2) 均衡解の一意性

[UED/ED]の均衡解は，[VIP/ED-Primal]の写像：

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y})=\begin{bmatrix} \mathbf{t}(\mathbf{x}) \\ \ln\mathbf{f}/\theta \\ \left\{\mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{X}^{(m)}-\mathbf{X}^{(m+1)}\right)\mid\forall m\right\} \\ \left(\dfrac{1}{\eta}-\dfrac{1}{\theta}\right)\ln\mathbf{q}-\mathbf{V} \end{bmatrix}$$

が狭義単調ならば唯一に決まる．写像が狭義単調であるためには，以下の条件式が成立すれば良い：

$$\hat{\mathbf{Y}}\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y})\hat{\mathbf{Y}}=\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2+\mathbf{J}_3+\mathbf{J}_4>0 \qquad (23)$$
$$\forall\hat{\mathbf{Y}}\geq\mathbf{0},\ \hat{\mathbf{Y}}\neq\mathbf{0}\quad\forall\mathbf{Y}\in\Omega_P.$$

ここで，$\hat{\mathbf{Y}}=\left(\hat{\mathbf{q}},\hat{\mathbf{f}},\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{X}}\right)$,

$$\mathbf{J}_1=\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\theta}\right)\sum_m\sum_{od}\frac{\hat{q}_{od}^{(m)2}}{q_{od}^{(m)}},$$

$$\mathbf{J}_2=\sum_m\sum_a\hat{x}_a^{(m)2}\frac{\partial}{\partial x_a^{(m)}}t_a(x_a^{(m)}),$$

$$\mathbf{J}_3=\sum_m\sum_a\frac{1}{\mu_a}\left(\hat{X}_a^{(m)}-\hat{X}_a^{(m-1)}\right)\hat{X}_a^{(m)},$$

$$\mathbf{J}_4=\frac{1}{\theta}\sum_m\sum_{od}\sum_r\frac{\hat{f}_r^{od(m)2}}{f_r^{od(m)}}$$

である．式 (23)の$\mathbf{J}_1$，$\mathbf{J}_2$，$\mathbf{J}_4$が正の値を取ることは容易にわかる．まず，$\mathbf{J}_1>0$である理由は，ランダム効用理論に整合的な Nested Logit モデルでは $0\leq\eta\leq\theta$ が成立するからである．次に$\mathbf{J}_2$については，リンクコスト関数に関して $\partial t_a(x_a^{(m)})/\partial x_a^{(m)}>0$ という関係を仮定しているので正である．最後に，$\mathbf{J}_3$に関しては，次のような変形：

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_3&=\sum_a\frac{1}{\mu_a}\Big\{\hat{X}_a^{(M)2}+\hat{X}_a^{(M-1)2}+\cdots+\hat{X}_a^{(1)2}+\hat{X}_a^{(0)2}\\&\quad-\hat{X}_a^{(M)}\hat{X}_a^{(M-1)}-\hat{X}_a^{(M-1)}\hat{X}_a^{(M-2)}-\cdots-\hat{X}_a^{(1)}\hat{X}_a^{(0)}\Big\}\\&=\sum_a\frac{1}{\mu_a}\left\{\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2}\left(\hat{X}^{(m)}-\hat{X}^{(m-1)}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\hat{X}_a^{(M)2}+\hat{X}_a^{(0)2}\right)\right\}\end{aligned}$$

により，正であることがわかる．以上より，式(23)が成立することが保証される．ゆえに，写像 $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$は狭義単調であり，[UEQ/ED]の均衡解は一意に決まることが結論できる．

４．均衡解の計算法

4.1 時間帯別OD需要が固定的な場合

第2節で述べたように，固定需要型問題[UEQ/FD]では，時間帯０から順に各時間帯別の配分問題を解けばよい．従って，各時間帯別の等価最適化問題[CP-Primal]（あるいは[CP-Dual]）の解法のみを考えれば良い．ここで，[CP-Primal]は以下のような $\mathbf{x}$ のみを未知変数とする問題として表現できることに注目しよう：

$$\min_{\mathbf{x},\mathbf{X}}.\sum_a\int_0^{x_a}t_a(\omega)d\omega+\sum_a\frac{\{\max.(x_a-\overline{\mu}_a,0)\}^2}{2\mu_a} \qquad (10')$$

s.t. (5), (11a) and (11c).

この問題は，通常の静的配分と同様の制約条件の下で微分可能な目的関数を最小化する問題である．従って，均衡解への収束が保証された様々な解法を容易に構成できる．例えば，Frank-Wolfe法を適用するなら，方向ベクトル決定のための補助問題はリンクコストをわずかに修正した最短経路配分問題となる．より具体的には，k 回目繰返しにおける許容解 $\mathbf{x}^{[k]}$ が得られている場合，$k+1$ 回目のiterationで解くべき補助問題は，$t_a(x_a^{[k]})+\max.(x_a^{[k]}-\overline{\mu}_a,\ 0)/\mu_a$ をリンクコストとみなした最短経路配分問題である．解の改訂等の他のステップは，通常の均衡配分問題にFrank-Wolfe法を適用する場合と全く同様である．そして，均衡リンク交通量$\mathbf{x}^*$ が得られれば，均衡状態での待ち行列台数 $\mathbf{X}^*$ および待ち行列遅れ $\mathbf{e}^*$ は，各々，$X_a^*=\max.\{x_a^*-\overline{\mu}_a,\ 0\}$，$e_a^*=X_a^*/\mu_a$ で与えられる．

4.2 時間帯別OD需要が弾性的な場合

問題[UEQ/ED]は，そのままでは，各時間帯を独立に解くことはできない．また，等価な最適化問題も存在しない．従って，等価な変分不等式問題[VIP/ED-Primal]あるいは[VIP/ED-Dual]を直接的に解くことを考える．VIPの一般的な解法としては，様々なものがあるが，ここでは，[VIP/ED-Primal]に対して射影法を適用する場合のみを示す．

(1) 射影法のアウトライン

一般的な VIPに対する標準的な射影法の基本的な流れは以下の通りである：

Step 1: 初期値設定：
くり返し回数 $k := 0$ に設定．初期許容解 $\mathbf{Y}^k$ を求める．

Step 2: 元のVIPに対する補助問題（射影問題）を解き，その解を $\mathbf{Y}^{k+1}$ とおく．

Step 3: 収束判定：
$\left|\mathbf{Y}^{k+1}-\mathbf{Y}^k\right| < \varepsilon$ なら終了．そうでなければ，$k := k+1$ として，Step.2へ．

ここで，*Step 2*の補助問題は，元のVIPの写像 $\mathbf{F(Y)}$を各繰り返しにおける temporaryな解 $\overline{\mathbf{Y}}$ で線形近似することにより得られる．

(2) 補助問題の導出

いま，[VIP/ED-Primal]の許容領域 Ω_{P} 内に属する temporary な解 $\overline{\mathbf{Y}} = (\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{f}}, \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{X}})$ が得られているとする．*Step 2* の補助問題は，標準的な射影法では，写像 $\mathbf{F(Y)}$の全ての要素関数をこの $\overline{\mathbf{Y}}$ のまわりで線形化して得られる VIPである．しかし，ここでは，我々のモデルの持つ数理構造を活用するために，*部分的に*線形近似した補助問題を構成することを考える．より具体的には，リンクコスト写像$\mathbf{t(x)}$と待ち行列コスト写像$\mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{X}^{(m)}-\mathbf{X}^{(m+1)}\right)$のみを線形近似しよう：

$$\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}^{(m)}) = \mathbf{t}(\overline{\mathbf{x}}^{(m)}) + \frac{1}{\rho}\left(\mathbf{x}^{(m)} - \overline{\mathbf{x}}^{(m)}\right) \tag{24}$$

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{X}^{(m)}) = \mathbf{M}^{-1}\left(\overline{\mathbf{X}}^{(m)} - \overline{\mathbf{X}}^{(m+1)}\right) + \frac{1}{\rho}\left(\mathbf{X}^{(m)} - \overline{\mathbf{X}}^{(m)}\right) \tag{25}$$

そして，元問題 [VIP/ED-Primal]の写像を，この近似写像に置き換えた以下の補助問題を考える：

[VIP/ED-Sub]　*Find* $\mathbf{Y}^* = \left(\mathbf{q}^*, \mathbf{f}^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{X}^*\right) \in \Omega_{\mathrm{P}}$ *such that*

$$\sum_m \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}^{(m)*})\cdot\left(\mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{x}^{(m)*}\right) + \frac{1}{\theta}\sum_m \ln \mathbf{f}^{(m)*}\cdot\left(\mathbf{f}^{(m)} - \mathbf{f}^{(m)*}\right)$$
$$+ \sum_m \left(\left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\theta}\right)\ln \mathbf{q}^{(m)*} - \mathbf{V}^{(m)}\right)\cdot\left(\mathbf{q}^{(m)} - \mathbf{q}^{(m)*}\right) \tag{26}$$
$$+ \sum_m \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{X}^{(m)*})\cdot\left(\mathbf{X}^{(m)} - \mathbf{X}^{(m)*}\right) \geq 0$$
$$\forall \mathbf{Y} = (\mathbf{q}, \mathbf{f}, \mathbf{x}, \mathbf{X}) \in \Omega_{\mathrm{P}}.$$

この補助問題[VIP/ED-Sub]に含まれる写像は，明らかに積分可能である．したがって，[VIP/ED-Sub]は，以下の凸計画問題に帰着する：

[CP/ED-Sub]

$$\min_{\mathbf{q},\mathbf{f},\mathbf{x},\mathbf{X}} \sum_m \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(m)k})\cdot\mathbf{x}^{(m)} + \sum_m \frac{1}{2\rho}\left(\mathbf{x}^{(m)} - 2\mathbf{x}^{(m)k}\right)\cdot\mathbf{x}^{(m)}$$
$$+ \sum_m \mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{X}^{(m)k} - \mathbf{X}^{(m+1)k}\right)\cdot\mathbf{X}^{(m)}$$
$$+ \sum_m \frac{1}{2\rho}\left(\mathbf{X}^{(m)} - 2\mathbf{X}^{(m)k}\right)\cdot\mathbf{X}^{(m)} + \sum_m \frac{1}{\theta}\mathbf{f}^{(m)}\ln \mathbf{f}^{(m)}$$
$$- \sum_m \mathbf{V}^{(m)}\left(\mathbf{q}^{(m)} - \mathbf{q}^{(m)k}\right) + \sum_m \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\theta}\right)\mathbf{q}^{(m)}\ln \mathbf{q}^{(m)} \tag{27}$$

s.t.　　$\mathbf{q}, \mathbf{f}, \mathbf{x}, \mathbf{X} \in \Omega_P$.

(3) 補助問題の解法の概略

上で得られた補助問題は，制約条件に不等式制約(20)が含まれるため，大規模ネットワークに適用する際には何らかの工夫が必要である．そこで，*待ち行列変数* $\mathbf{X}$ をリンク交通量変数 $\mathbf{x}$ の*関数*：

$$\mathbf{X}^{(m)} = \mathbf{X}^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(m)}) \quad \left\langle \tilde{\mathbf{x}}^{(m)} = \left(\mathbf{x}^{(1)}, \cdots, \mathbf{x}^{(m)}\right)\right\rangle \ \forall m \tag{28}$$

として表現し，$\mathbf{X}$を明示的な未知変数から消去する．これは，式(20)が

$$X_a^{(m)} = \max.\left\{x_a^{(m)} + X_a^{(m-1)} - \mu_a, 0\right\} \quad \forall a, m \tag{29}$$

と等価であることを用いれば実現できる（式(28)の具体的な関数形を明示的に表現することはできないが，式(29)をmに関する漸化式として用いれば，関数値やその微分値の評価は可能である）．

このようにして得られた問題は，線形等式と非負条件のみを制約とする凸計画問題となっているので，様々な効率的解法を適用できる．以下では，その一例として，（ネットワーク配分問題としての構造を活用した）部分線形化法を適用する場合を考える．この方法のアウトラインは，よく知られている Frank-Wolfe法とほぼ同じである．違いは補助問題を完全に線形化した問題ではなく，部分的に線形化した問題とする点のみである．[CP/ED-Sub]の場合，その目的関数中の対数関数項を除いた項のみを j 回目繰り返

しにおける解で線形化した問題，すなわち，以下の補助問題を考える：

[CP/ED-Sub^2]

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{p},\mathbf{y},\mathbf{g}}.&\sum_m\sum_a c_a^{(m)}\cdot y_a^{(m)}+\frac{1}{\theta}\sum_m\sum_{od}\sum_r g_r^{od,(m)}\ln g_r^{od,(m)}\\&-\sum_m\sum_{od}V_{od}^{(m)}p_{od}^{(m)}+\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\theta}\right)\sum_m\sum_{od}p_{od}^{(m)}\ln p_{od}^{(m)}\end{aligned}\tag{30}$$

$$\text{s.t.}\qquad \mathbf{g},\mathbf{p},\mathbf{y}\in\Omega'_P$$

ここで，許容領域 Ω'_P は，Ω_P から式(20)を除いた許容領域である．また，$\mathbf{c}^{(m)}$ は以下の様に定義される定数である（"リンクコスト"とみなすことができる）：

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^{(m)}\equiv\mathbf{t}(\overline{\mathbf{x}}^{(m)})+\frac{1}{\rho}\left(\overline{\mathbf{x}}^{(m)j}-\overline{\mathbf{x}}^{(m)}\right)+\nabla\mathbf{X}^{(m)}(\tilde{\overline{\mathbf{x}}}^{(m)j})\\\left\{\frac{1}{\rho}\left(\mathbf{X}^{(m)}(\tilde{\overline{\mathbf{x}}}^{(m)j})-\overline{\mathbf{X}}^{(m)}\right)+\mathbf{M}^{-1}\left(\overline{\mathbf{X}}^{(m)}-\overline{\mathbf{X}}^{(m+1)}\right)\right\}\end{aligned}\tag{31}$$

(4) 問題[CP/ED-Sub^2] の解法

以下では，上記問題[CP/ED-Sub^2]の解法を詳しく述べる．そのために，まず，式(31)中の待ち行列変化率 $\nabla\mathbf{X}^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(m)})$ の計算法を説明し，次に，[CP/ED-Sub^2]全体のアルゴリズムを示す．

(i) 待ち行列変化率 $\nabla\mathbf{X}^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(m)})$ の計算法

式(31)中の $\nabla\mathbf{X}^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(m)})$ は対角行列である．従ってその a 番目対角要素の計算法のみを考えれば十分である．まず，$X_a^{(n)}(\tilde{\mathbf{x}}_a^{(n)})$ を $x_a^{(m)}$ で偏微分すれば，

$$\frac{\partial X_a^{(n)}\left(\tilde{\mathbf{x}}_a^{(n)}\right)}{\partial x_a^{(m)}}\begin{cases}\neq 0 & if\ n\geq m\\=0 & if\ n<m\end{cases}\qquad\forall a,m\tag{32}$$

である．これは，時間帯 m の交通量 $x_a^{(m)}$ がそれ以降の時間帯での待ち行列のみに影響し，時間帯 m より前の時間帯での待ち行列とは無関係であることを示している．従って，$\nabla\mathbf{X}^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(m)})$ の a 番目対角要素は，

$$\frac{\partial}{\partial x_a^{(m)}}\left[\sum_m X_a^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}_a^{(m)})\right]=\sum_{n=m}^{M}\frac{\partial X_a^{(n)}(\tilde{\mathbf{x}}_a^{(n)})}{\partial x_a^{(m)}}\tag{33}$$

となる．この式は，$m=1$ から順に効率的に計算できる．このことを示すために，まず，有用な関係式を導いておこう．待ち行列の進展方程式 (20) から明らかなように，待ち行列変数 $X_a^{(m)}$ は，$x_a^{(m)}$ と $X_a^{(m-1)}$ のみで表せる．そこで，この関係式を考慮しながら，式(33)左辺に微分の連鎖則を適用すれば，

$$\frac{\partial X_a^{(n)}\left(\tilde{\mathbf{x}}_a^{(n)}\right)}{\partial x_a^{(m)}}=\frac{\partial X_a^{(n)}}{\partial X_a^{(n-1)}}\frac{\partial X_a^{(n-1)}}{\partial X_a^{(n-2)}}\cdots\times\frac{\partial X_a^{(m+1)}}{\partial X_a^{(m)}}\frac{\partial X_a^{(m)}\left(\tilde{\mathbf{x}}_a^{(m)}\right)}{\partial x_a^{(m)}}\tag{34}$$

となる．ここで，

$$\frac{\partial X_a^{(n)}}{\partial X_a^{(n-1)}}=\begin{cases}1 & if\ X_a^{(n)}>0\\0 & if\ X_a^{(n)}=0\end{cases}\tag{35}$$

$$\frac{\partial X_a^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}_a^{(m)})}{\partial x_a^{(m)}}=\begin{cases}1 & if\ X_a^{(m)}>0\\0 & if\ X_a^{(m)}=0\end{cases}\tag{36}$$

であるので，式(34)の値は必ず0か1である．

上の関係式を用いれば，$\nabla\mathbf{X}^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(m)})$ の a 番目対角要素（式(33)）は極めて簡単に得られる．以下では，このことを簡単な具体例で示しておく．以下の様な待ち行列パターンの場合に式(33)を計算してみよう：

時間帯	1	2	3	4	5
待ち行列の有無	有	有	無	有	無

式(34)～(36) は，一度待ち行列が消えれば，それ以前の時間帯に流入する交通量の影響を考慮する必要がないことを意味している．従って，式(33)の計算は，待ち行列が現れてから消えるまでの時間帯毎に分割して考えられる．この例では，まず $m=1\sim3$ について考え，

$$\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\left[\sum_m X^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(m)})\right]=1+1=2$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\left[\sum_m X^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(m)})\right]=1$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{(3)}}\left[\sum_m X^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(m)})\right]=0$$

と計算できる．そして，それ以降（$m=4\sim5$）については，再び計算を"リセット"し，

$$\frac{\partial}{\partial x^{(4)}}\left[\sum_m X^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(m)})\right]=1$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{(5)}}\left[\sum_m X^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(m)})\right]=0$$

と計算すればよいのである．

(ii) 問題 [CP/ED-Sub^2] のアルゴリズム

問題[CP/ED-Sub^2]は，リンクコストが式(31)で固定された従来の確率的弾性需要型配分モデルと同様の形式である．従って，経路交通量と時間帯別OD交通量は，以下のLogit 式で表される：

・経路交通量：

$$f_r^{od,(m)} = q_{od}^{(m)} \frac{\exp\left[-\theta \hat{C}_r^{od,(m)}\right]}{\sum_r \exp\left[-\theta \hat{C}_r^{od,(m)}\right]} \tag{37}$$

・時間帯別OD交通量：

$$q_{od}^{(m)} = Q_{od} \frac{\exp\left[\eta\left(V_{od}^{(m)} - S_{od}^{(m)}\right)\right]}{\sum_m \exp\left[\eta\left(V_{od}^{(m)} - S_{od}^{(m)}\right)\right]} \tag{38}$$

ここで $\hat{C}_r^{od,(m)} \equiv \sum_a c_a^{(m)} \delta_{r,a}^{od}$

$$S_{od}^{(m)} \equiv -\frac{1}{\theta} \ln \sum_r \exp\left[-\theta \hat{C}_r^{od,(m)}\right].$$

従って，問題[CP/ED-Sub^2]は，以下の *Step a*～*d* の手順によって効率的に解くことができる：

Step a: (i)で示した方法で $\nabla \mathbf{X}^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(m)})$ を計算し，式(31) で定義される $\mathbf{c}^{(m)}$ を計算.

Step b: 期待最小費用 $\mathbf{S}$ を，Dialのアルゴリズムや，Akamatsu(1996)／Bell(1995)のマルコフ連鎖配分法を利用して計算.

Step c: 式(38)に $\mathbf{S}$ を代入して，時間帯別OD交通量を計算.

Step d: Step *b* で $\mathbf{S}$ を求めるのに使用した配分法によって *Step b* で求めた時間帯別OD交通量を配分し，時間帯別リンク交通量を計算.

(5) 補助問題の解法のまとめ

結局，射影法の *Step 2* の補助問題を解くアルゴリズムは以下のようにまとめられる：

Step 2.1: *Step1*で求めた初期値に対応した初期許容解を求める．くり返し回数 $j := 1$ に設定.

Step 2.2: [CP/ED-Sub^2]を(4)で示した方法で解き，その解を $\mathbf{y}, \mathbf{p}$ とおく.

Step 2.3: 降下方向ベクトルを以下の式で計算：

$$\mathbf{d}_{\mathbf{x}} = \mathbf{y} - \overline{\mathbf{x}}^{j}, \mathbf{d}_{\mathbf{q}} = \mathbf{p} - \overline{\mathbf{q}}^{j}$$

Step 2.4: [CP/ED-Sub]の目的関数を用いてステップサイズ決定.

Step 2.5: 以下の式で解の改訂をする：

$$\overline{\mathbf{x}}^{j+1} = \overline{\mathbf{x}}^{j} + \alpha\,\mathbf{d}_{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{q}}^{j+1} = \overline{\mathbf{q}}^{j} + \alpha\,\mathbf{d}_{\mathbf{q}}$$

Step 2.6: 収束判定

収束していれば，$\overline{\mathbf{x}}^{j+1}, \overline{\mathbf{q}}^{j+1}$ を補助問題[VIP/ED-sub]の解として *Step 2.7*へ．そうでなければ，$j := j+1$ として，*Step 2.2*へ.

Step 2.7: 待ち行列を以下の式で計算：

$$\overline{X}_a^{(m)} = \max.\left\{\overline{x}_a^{(m)} + \overline{X}_a^{(m-1)} - \mu_a, 0\right\} \ \forall a, m$$

Step2終了.

なお，Step 2.4 において計算する[CP/ED-Sub]の目的関数には経路変数が含まれている．しかし，赤松(1989), Akamatsu(1997)の方法を用いれば（起点別または終点別リンク交通量変数を用いて），経路の列挙なしに効率的に計算できることが知られている.

5．おわりに

本稿では，リンクでの渋滞の進展と利用者の時間帯選択行動を同時に内生化した時間帯別均衡配分モデルの構築と解析を行った．これにより，従来の静的なモデルにおけるバイアスを相当改善したフローパターンが得られることが期待される．さらに，本稿では，その均衡解の効率的な計算法を開発した．これは，現実の大規模道路網でも適用可能である.

なお，本稿のモデルにもいくつかの限界がある．まず，第一に，渋滞が上流リンクへ延伸してゆくほど混雑した状況までは正確に扱うことができない．第二に，各リンクでの待ち行列を準動的な枠組みで記述できる反面，車が時刻の進展に応じて経路上を移動することによる状態変化までは正確に記述できない（本稿で仮定した経路の所要時間や交通量に関する条件式は，静的配分と同様の操作的なモデルを構築するための“近似式”である）．従って，本稿のモデルには，論理的には，その近似に起因する誤差が含まれている（この点に関して論理的に完全に矛盾を無くすには，連続時間の動的な枠組でモデルを構築するしか方法はありえない）．この近似（に起因する誤差）が，現実のフロー・パターン記述に際してどの程度問題となるかについては，多くの実証的検討が必要であり，今後の研究課題としたい.

参考文献

1) I. Okutani, “Equilibrium Flows in a Network with Congested Links” *Proc. of the 9th ISTTT*, pp.253-271,1984.
2) 井上博司, “混雑した道路網における交通均衡およびその数値解法” 土木学会論文集, No.365, pp.125-133, 1986.
3) 河上省吾・溝上章志・鈴木稔幸, “交通量の時間的変動を考慮した道路交通量配分手法に関する研究”, 交通工学, Vol.20(6), 1985.
4) 藤田素弘・松井寛・溝上章志, “時間帯別交通量配

分モデルの開発と実用化に関する研究” 土木学会論文集 No.**389**, pp.111-119, 1988.
5) 藤田素弘・山本幸司・松井寛, “渋滞を考慮した時間帯別交通量配分モデルの開発”, 土木学会論文集 No.**407**, pp.129-138,1989.
6) 宮城俊彦・牧村和彦, “時間帯別交通配分手法に関する研究” 交通工学 **26** (2), pp.17-27, 1991
7) 松井寛・藤田素弘, “時間帯別通勤時刻分布・配分同時モデルの開発” 土木学会論文集 No.**449**, pp.63-72,1992.
8) 赤松隆, “交通流の予測・誘導・制御と動的なネットワーク配分理論” 土木計画学研究・論文集 **13**, pp.23-48, 1996.
9) 赤松隆, “安定的ネットワーク均衡状態を保証するための交通施策問題に関する研究” 平成 7・8 年度文部省科学研究費補助金（基盤研究 B 2）研究成果報告書, 1997.
10) T.Akamatsu, “Cyclic Flows, Markov Process and Transportation Stochastic Assignment” *Transportation Research* **30B**, pp. 369-386, 1996.
11) M.G.H.Bell, “Alternatives to Dial' LOGIT Assignment Algorithm” *Transportation Research* **29B**, pp.287-295, 1995.
12) D. P. Bertsekas and E. M. Gafni, “Projection Methods for Variational Inequalities with Application to The Traffic Assignment Problem”, *Mathematical Programming Study* **17**, pp.139-159, 1982.
13) S. Dafermos, “Traffic Equilibrium and Variational Inequalities”, *Transportation Science* **14**, pp.42-54, 1980.
14) 赤松隆, “需要変動を考慮した交通ネットワーク確率的利用者均衡モデルとその解法”, 土木学会論文集 No.**401**, pp.109-118, 1989.
15) T. Akamatsu, “Decomposition of Path Choice Entropy in General Transport Networks” *Transportation Science* **31**, pp. 349-362, 1997

付録

変分不等式問題[VIP/ED-0]と[VIP/ED-Primal]の等価性を証明する．ただし，以下では，証明の基本的な流れを明確にするために，時間帯選択・経路選択を確定的にした場合$(\theta \to \infty, \eta \to \infty)$のみを示す（確率的な場合も，証明の道筋は全く同じである）．

[VIP/ED-0] において $\theta \to \infty, \eta \to \infty$ とおいて得られる VIP は，

[VIP/ED-0'] Find $\left(\mathbf{q}^*, \mathbf{f}^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{X}^*\right) \in \mathbf{R}_+$ such that

$$\begin{aligned}
&\sum_m \left(\mathbf{u}^{(m)^*} - \mathbf{V}^{(m)} - \mathbf{E}_1{}^T \mathbf{T}^*\right) \cdot \left(\mathbf{q}^{(m)} - \mathbf{q}^{(m)^*}\right) \\
&+ \sum_m \left\{\Delta^T \left(\mathbf{t}(\Delta \mathbf{f}^{(m)^*}) + \mathbf{e}(\mathbf{X}^{(m)^*})\right) - \mathbf{E}_2{}^T \mathbf{u}^{(m)^*}\right\} \cdot \left(\mathbf{f}^{(m)} - \mathbf{f}^{(m)^*}\right) \\
&+ \sum_m \left(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{X}^{(m)^*} - \Delta \mathbf{f}^{(m)^*} - \mathbf{X}^{(m-1)^*}\right) \cdot \left(\mathbf{X}^{(m)} - \mathbf{X}^{(m)^*}\right) \\
&+ \sum_m \left(\mathbf{E}_2 \mathbf{f}^{(m)^*} - \mathbf{q}^{(m)^*}\right) \cdot \left(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(m)^*}\right) \\
&+ \left(\mathbf{E}_1 \mathbf{q}^{(m)^*} - \mathbf{Q}\right) \cdot \left(\mathbf{T} - \mathbf{T}^*\right) \geq 0 \quad \forall (\mathbf{q}, \mathbf{f}, \mathbf{x}, \mathbf{X}) \in R_+ \qquad \text{(A-1)}
\end{aligned}$$

である．ここで，$\mathbf{E}_1$は対角要素にM個の$|W|$次元横ベクトル$\mathbf{1} = [1, \ldots, 1]$を持つブロック対角行列，$\mathbf{E}_2$は対角要素に$|W|$個の$|K_{od}|$次元横ベクトル$\mathbf{1} = [1, \ldots, 1]$を持つブロック対角行列である．

まず，quantity 変数$(\mathbf{q}, \mathbf{f}, \mathbf{x}, \mathbf{X})$が，許容領域$\Omega_P$に属するとする．すると式(A-1)の第3,4,5項は落ち，第1,2項のみ残る．また，ここで，$\mathbf{f}, \mathbf{f}^*, \mathbf{X}, \mathbf{X}^*, \mathbf{q}, \mathbf{q}^*$が許容領域$\Omega_P$に属しているなら，

$$\mathbf{E}_2{}^T \mathbf{u}^{(m)^*} \cdot \left(\mathbf{f}^{(m)} - \mathbf{f}^{(m)^*}\right) = \mathbf{u}^{(m)} \cdot \left(\mathbf{q}^{(m)} - \mathbf{q}^{(m)^*}\right) \qquad \text{(A-2)}$$

$$\mathbf{E}_1{}^T \mathbf{T}^* \cdot \left(\mathbf{q}^{(m)} - \mathbf{q}^{(m)^*}\right) = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}) = 0 \qquad \text{(A-3)}$$

であるから，次の不等式が成立する：

$$\begin{aligned}
&\sum_m \Delta^T \left(\mathbf{t}(\Delta \mathbf{f}^{(m)^*}) + \mathbf{e}(\mathbf{X}^{(m)^*})\right) \cdot \left(\mathbf{f}^{(m)} - \mathbf{f}^{(m)^*}\right) \\
&- \sum_m \mathbf{V}^{(m)} \cdot \left(\mathbf{q}^{(m)} - \mathbf{q}^{(m)^*}\right) \geq 0 \quad \forall (\mathbf{q}, \mathbf{f}, \mathbf{X}) \in \Omega_P
\end{aligned} \qquad \text{(A-4)}$$

ここで，Ω_Pでは，待ち行列進展式：

$$\mathbf{x}^{(m)} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{X}^{(m)} - \mathbf{X}^{(m-1)} \qquad \text{(A-5)}$$

が成立すること，および，全経路コストの総和は全リンクコストの総和として表現できること：

$$\Delta^T \mathbf{t}(\Delta \mathbf{f}^{(m)}) \cdot \mathbf{f}^{(m)} = \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(m)}) \cdot \mathbf{x}^{(m)} \qquad \text{(A-6)}$$

を用いると，式(A-4)第１項は以下の様に表現できる：

$$\begin{aligned}
&\sum_m \Delta^T \left(\mathbf{t}(\Delta \mathbf{f}^{(m)^*}) + \mathbf{e}(\mathbf{X}^{(m)^*})\right) \cdot \left(\mathbf{f}^{(m)} - \mathbf{f}^{(m)^*}\right) \\
&= \sum_m \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(m)^*}) \cdot \left(\mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{x}^{(m)^*}\right) \\
&+ \sum_m \mathbf{e}(\mathbf{X}^{(m)^*}) \cdot \left(\mathbf{X}^{(m)} - \mathbf{X}^{(m-1)} - \mathbf{X}^{(m)^*} + \mathbf{X}^{(m-1)^*}\right)
\end{aligned} \qquad \text{(A-7)}$$

さらに，この式の右辺第２項目は，

$$\begin{aligned}
&\sum_m \mathbf{e}(\mathbf{X}^{(m)^*}) \cdot \left(\mathbf{X}^{(m)} - \mathbf{X}^{(m-1)} - \mathbf{X}^{(m)^*} + \mathbf{X}^{(m-1)^*}\right) \\
&= \sum_m \mathbf{e}(\mathbf{X}^{(m)^*}) \cdot \left(\mathbf{X}^{(m)} - \mathbf{X}^{(m)^*}\right) - \sum_m \mathbf{e}(\mathbf{X}^{(m+1)^*}) \cdot \left(\mathbf{X}^{(m)} - \mathbf{X}^{(m)^*}\right) \\
&= \sum_m \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{X}^{(m)^*} - \mathbf{X}^{(m+1)^*}\right) \cdot \left(\mathbf{X}^{(m)} - \mathbf{X}^{(m)^*}\right)
\end{aligned}$$

と変形できる．従って，(A-4)は以下の変分不等式問題に帰着する：

[VIP-ED-Primal']

Find $\left(\mathbf{q}^*, \mathbf{f}^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{X}^*\right) \in \Omega_P$ such that

$$\sum_m \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(m)*})\cdot\left(\mathbf{x}^{(m)}-\mathbf{x}^{(m)*}\right)-\sum_m \mathbf{V}^{(m)}\cdot\left(\mathbf{q}^{(m)}-\mathbf{q}^{(m)*}\right)$$

$$\sum_m \mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{X}^{(m)*}-\mathbf{X}^{(m+1)*}\right)\cdot\left(\mathbf{X}^{(m)}-\mathbf{X}^{(m)*}\right)\geq 0$$

$$(\mathbf{q},\mathbf{f},\mathbf{x},\mathbf{X})\in\Omega_P \qquad \text{(A-8)}$$

これは，[VIP/ED-Primal]において $\theta\to\infty,\eta\to\infty$ とした VIP である．よって，[VIP/ED-0]→[VIP-ED-Primal]が証明された．

次に，逆（[VIP-ED-Primal]→[VIP/ED-0]）を証明する．まず，標準形の非線形相補性問題が一般に VIP の特殊ケースであるという事実から，[VIP/ED-0]は以下の非線形相補性問題 [NCP/ED]と等価である：

Find $(\mathbf{q},\mathbf{f},\mathbf{x},\mathbf{X})\in\mathbf{R}_+$ such that

$$\begin{aligned}&\left\{\Delta^T(\mathbf{t}(\Delta\mathbf{f})+\mathbf{e}(\mathbf{X}))-\mathbf{E}_2{}^T\mathbf{u}\right\}\cdot\mathbf{f}=0,\\ &\Delta^T(\mathbf{t}(\Delta\mathbf{f})+\mathbf{e}(\mathbf{X}))-\mathbf{E}_2{}^T\mathbf{u}\geq\mathbf{0},\qquad \mathbf{f}\geq\mathbf{0}\end{aligned}\qquad\text{(A-9)}$$

$$\begin{aligned}&\left(\boldsymbol{\mu}+\mathbf{X}^{(m)}-\Delta\mathbf{f}^{(m)}-\mathbf{X}^{(m-1)}\right)\cdot\mathbf{X}^{(m)}=0,\\ &\boldsymbol{\mu}+\mathbf{X}^{(m)}-\Delta\mathbf{f}^{(m)}-\mathbf{X}^{(m-1)}\geq\mathbf{0},\qquad \mathbf{X}^{(m)}\geq\mathbf{0}\end{aligned}\quad\forall m\quad\text{(A-10)}$$

$$(\mathbf{u}-\mathbf{V}-\mathbf{E}_1\mathbf{T})\cdot\mathbf{q}=0,\ \ \mathbf{u}-\mathbf{V}-\mathbf{E}_1\mathbf{T}\geq\mathbf{0},\ \ \mathbf{q}\geq\mathbf{0}\qquad\text{(A-11)}$$

従って，以下では，[VIP-ED-Primal']→[NCP/ED] を証明する．

まず，[VIP-ED-Primal']において，$\mathbf{X}=\mathbf{X}^*,\mathbf{q}=\mathbf{q}^*$ とおくと，式(A-8)第２項のみが残り，$\mathbf{t}(\mathbf{x}^*)\cdot\mathbf{x}\geq\mathbf{t}(\mathbf{x}^*)\cdot\mathbf{x}^*$ だから，

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}^*)\cdot\mathbf{x}^*=\min_{\mathbf{x}}.\mathbf{t}(\mathbf{x}^*)\cdot\mathbf{x}\quad s.t.\ \ (19)\,\text{and}\,(20).\qquad\text{(A-12)}$$

である．ここで，制約条件 (19)，(20)に対応するLagrange 乗数をそれぞれ **u**，**e** と書くと，最適化問題(A-10)の最適条件は，(A-9) で与えられる．

次に，$\mathbf{x}=\mathbf{x}^*,\mathbf{q}=\mathbf{q}^*$ とおくと，式(A-8)の第 3 項のみが残り，以下の最適化問題が得られる：

$$\begin{aligned}&\sum_m\mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{X}^{(m)*}-\mathbf{X}^{(m+1)*}\right)\cdot\mathbf{X}^{(m)*}\\ &=\min_{\mathbf{X}}.\sum_m\mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{X}^{(m)*}-\mathbf{X}^{(m+1)*}\right)\cdot\mathbf{X}^{(m)}\quad s.t.\ \ (20).\end{aligned}\qquad\text{(A-13)}$$

この問題の最適条件は，(A-10)で与えられる．

最後に，$\mathbf{x}=\mathbf{x}^*,\mathbf{X}=\mathbf{X}^*$ とすれば，式(A-8)の第２項のみが残り，以下の最適化問題が得られる：

$$-\mathbf{V}\cdot\mathbf{q}^*=\min_{\mathbf{q}}.-\mathbf{V}\cdot\mathbf{q}\quad s.t.\ \ (18).\qquad\text{(A-14)}$$

制約条件 (18)に対応する Lagrange 乗数を **T** と書くと，この問題の最適条件は，(A-11)で与えられる

つまり，[VIP-ED-Primal']の解では，(A-12), (A-13), (A-14)が同時に成立し，それは，(A-9)，(A-10)，(A-11)が同時に成立することを意味する．よって，[VIP-ED-Primal']→[VIP/ED-0']が証明された．

時間帯別OD需要とリンクでの渋滞を内生化した準動的交通配分

赤松 隆・牧野幸雄・高橋栄行

本研究は，静的配分の枠組では取り扱いが困難なリンクレベルでの渋滞進展を考慮した時間帯別配分モデルを構築する．より具体的には，(1)動的配分と静的配分の長所を取り入れた時間帯別配分の枠組で考え，(2)待ち行列の進展を考慮するため，動的配分におけるリンクの状態方程式と同様の条件を時間帯間で導入し，(3)利用者の時間帯・経路選択行動および均衡条件を明示的に導入し時間帯別ＯＤ交通量を内生化する．そして，そのモデルを変分不等式の枠組みで統一的に表現した上で，均衡解の性質に関する厳密な解析，射影法による収束の保証された効率的計算法の開発を行う．

Semi-dynamic Traffic Assignment Models with Queue Evolution and Elastic OD Demand

By Takashi AKAMATSU, Yukio MAKINO and Eikou TAKAHASHI

This paper presents a semi-dynamic traffic equilibrium assignment with the queue evolution that is hard to be described by the conventional static assignment models. To be specific, in our model, 1) time is divided into finite intervals; 2) each time period is treated as the static equilibrium state while queue evolution on each link in successive time periods is explicitly dealt with; 3) not only link flows but also OD demands for each period are endogenously given (they are consistent with the random utility theory). Furthermore, we prove existence and uniqueness of the equilibria and develop some efficient algorithms based on the variational inequality approach.