【土木計画学研究・論文集 No. 15 1998年9月】

非線形感度分析を用いたラムゼ価格均衡モデルの計算手法*

An application of nonliner sensitivity analysis to Ramsey price equilibrium model

宮城俊彦** 鈴木崇児***
Toshihiko MIYAGI Takaji SUZUKI

1．はじめに

規模の経済が働く状況下で企業が限界費用価格設定を行った場合、赤字が発生し、経営を維持していくことが困難になる。このような状況下では、ラムゼイ価格設定 [1]等の次善価格設定の方法が重要となる。ラムゼイ価格基準を用いた公共交通機関の料金設定は、企業のゼロ利潤いわゆるブレイクイーブンを保証した上で社会的厚生を最大化するように料金設定を行う問題となる。

ラムゼイ価格基準を公共交通機関の料金設定に用いる分析 [2]は従来から行われてきたが、これらの応用では料金設定によって生じる道路混雑を内生化した公共交通機関と自動車の間の競争が考慮されていない。これに対し、宮城ら [3]はラムゼイ価格基準を多手段ネットワーク均衡の枠組みを用いて、上位問題をラムゼイ価格基準を用いた社会的厚生の最大化問題、下位問題をネットワーク均衡問題とする２段階最適化問題として再構成した。この問題は、ネットワーク均衡問題を下位問題に持たない通常のラムゼイ価格設定問題と区別してラムゼイ価格均衡問題(Ramsey Price Equilibrium Problem：RPEP)と呼ばれている。その後、宮城・鈴木 [4]は RPEP の下位問題を変分不等式問題 (Variational Inequalities：VI) として再定式化し拡張を行った。この種の問題に対する解法は、Tobin and Friesz[5]や Yang and Yagar[6]によって非線形感度分析の応用として提案されている。本研究では、これらを参考として非線形感度分析に基づくラムゼイ価格均衡問題の計算アルゴリズムを構築し、例題計算を通して計算手法の収束性と計算過程での均衡解の勾配の近似精度を確認することを目的とする。なお、ラムゼイ価格均衡モデルの政策含意については、関連論文[7]を参照されたい。

*キーワーズ：配分交通、２段階最適化問題
**正員 工博 岐阜大学地域科学部
***正員 中京大学経済学部
(岐阜市柳戸1-1, T: 058-293-2446 F: 230-1528)
(名古屋市昭和区101-2, T: 052-832-2151 F: 835-7198)

2．ラムゼイ価格均衡モデル

公共交通機関のサービスの供給主体である交通企業は、上位問題において料金設定でサービス水準を制御するようにモデル化される。料金設定に対する利用者の反応は、与えられた料金に従って生じる利用者均衡状態として下位問題で記述される。この問題の構造は、シュタッケルベルグのリーダー・フォロアー問題[8]として知られている。ここでは、ラムゼイ価格均衡モデルの概略を説明するために図１に示すような単一ＯＤペアに対する概念的なネットワークに対して定式化を行う。

本分析では、下位問題として交通機関のフローが相互に独立したネットワーク均衡問題を２手段均衡問題の枠組み[9]で扱う。このとき個々の公共交通機関は単一の経路に対応するため、各公共交通機関の需要量は経路交通量として計算される。自動車と公共交通機関の交通需要の分担量は(1f)式に示すロジット型の関数に従うものとし、自動車と公共交通機関のそれぞれのモード内では、利用されている経路間について所要時間と料金からなる一般化経路費用が等しくなる利用者均衡状態が成立すると仮定する。以上より、ネットワークの均衡条件式は(1c)～(1e)のように、変分不等式条件として定式化される。なお、(1f)式は、自動車と公共交通機関の費用差を表す関数(1g)式として変形され、均衡条件式(1c)式に用いられる。

上位問題は、社会的効率性の観点からみた公共交通機関と自動車の最適な需要分担をもたらす公共交通機関の料金を設定しようとするものであり、(1a)式右辺の第１項は、自動車と公共交通機関の利用者の消費者余剰を表しており、第２項は公共交通機関の運営主体の生産者余剰を表している。(1b)式は公共交通機関の赤字が補助金以内になるよう

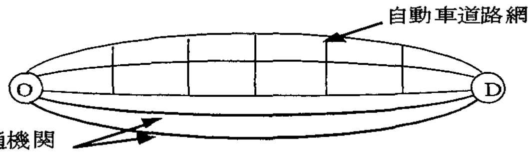

図1 単一ODペアに対する多手段ネットワーク

に経営を行うための制約条件である。

[RPEP]

U) $$\underset{\mathbf{p}}{Max}.\, Z(\mathbf{p},\mathbf{h}(\mathbf{p})) = \theta\bar{q}\ln\sum_{m=1,2}\exp\left(\frac{-u^m}{\theta}\right) + \sum_{k\in\Lambda^2}\left(p_k h_k(\mathbf{p}) - VC_k(\mathbf{h}(\mathbf{p}))\right) \quad (1a)$$

$$s.t. -\sum_{k\in\Lambda^2}\left(p_k h_k(\mathbf{p}) - VC_k(\mathbf{h}(\mathbf{p})) - FC_k\right) \le K \quad (1b)$$

L) (q^*,p^*)は以下のVIの解である。

$$\mathbf{C}(\mathbf{h}^*)^T(\mathbf{h}-\mathbf{h}^*) - w(q^{1*})(q^1-q^{1*}) \ge 0, \forall(\mathbf{h},q)\in\Omega \quad (1c)$$

$$\Omega = [\mathbf{h}: q=\Lambda\mathbf{h}, \mathbf{h}\ge 0] \quad (1d)$$

$$\Omega' = [\mathbf{v}:\mathbf{v}=\Delta\mathbf{h}, q=\Lambda\mathbf{h}, \mathbf{h}\ge 0] \quad (1e)$$

$$q^1 = \bar{q}/\left(1+\exp(u^1-u^2)\right) \quad (1f)$$

$$w(q^1) = u^1-u^2 = \ln\left(\frac{\bar{q}-q^1}{q^1}\right) \quad (1g)$$

ここで

$\bar{q}$ ：OD間の総交通量

m ：交通機関（=1自動車,=2マストラ）

q^m ：モードmの機関分担量

u^m ：均衡時のモードmを利用した旅行費用（$u^m = p^m + \beta t^m$, p^m, t^mは料金と旅行時間）

β ：時間価値

h_k, p_k, C_k ：k番目経路の交通量、料金、旅行費用、供給費用

$\mathbf{v},\mathbf{h},\mathbf{p},\mathbf{C}$ ：リンク交通量、経路交通量、料金、旅行費用ベクトル

VC_k, FC_k ：k番目経路の公共交通機関のサービス供給のための可変費用、固定費用

K ：補助金

Δ,Λ ：リンクパス、ODパス接続行列

Λ^m ：モードmについてのODパス接続行列

θ ：パラメータ

* : 各変数値が下位問題の均衡状態にあることを示す添字

なお、上位問題の経路交通量については、公共交通機関の運営主体の意思決定変数である料金として制御可能であることから、$\mathbf{h}(\mathbf{p})$と表記している。

(q^{1*}, h^*)が下位問題のVIの解であるための必要条件（Tobin and Frieszの定理1[5]）は(2)式のように与えられる。

$$-w(q^{1*}) - \varphi + E\mu = 0 \quad (2a)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{h}^*) - \lambda - \Lambda^T\mu = 0 \quad (2b)$$

$$\varphi^T\mathbf{q}^* = 0 \quad (2c)$$

$$\lambda^T\mathbf{h}^* = 0 \quad (2d)$$

$$\Lambda\mathbf{h}^* - \mathbf{q}^* = 0 \quad (2e)$$

$$\varphi \ge 0, \lambda \ge 0 \quad (2f)$$

ここで$\varphi\in R^I, \lambda\in R^{k1+k2}, \mu\in R^{2I}$はラグランジュ未定乗数でEはeを単位とする次元Iの単位行列$E=[e\ \ -e]$。ただし、この連立方程式は、経路フローが一意に決まらないために局所最適解の十分条件であるTobin and Frieszの定理3[5]を満足しない。

3．非線形感度分析の適用

シュタッケルベルグ均衡状態を想定することは、公共交通機関の経営主体が、現在の料金水準に対して追加的に値上げや値下げを行った場合、機関選択やその結果生じるネットワークフローの変化に関する情報を考慮して意思決定することを前提としている。このような意思決定を反映した計算をおこなうためには、機関選択と道路ネットワーク上での混雑の変化を同時に取り扱うようにネットワーク均衡条件式(1c)~(1e)もしくは(2)式を上位問題に含めて均衡解を求めなければならない。

ネットワーク均衡条件式(2)式の均衡解の存在と一意性が保障される場合には、パラメトリックな最適解h*とラグランジュ未定乗数$\Psi=[\lambda,\mu,\varphi]$は独立変数である価格ベクトルの隠関数$\mathbf{h}(\mathbf{p}), \Psi(\mathbf{p})$として表される[5]。その結果、RPEPはさらに簡略化して以下のように定式化できる。

$$\min_p .\, \Pi(\mathbf{p},\mathbf{h}(\mathbf{p})), \quad s.t.\ g(\mathbf{p},\mathbf{h}(\mathbf{p})) \le K \quad (3)$$

ここで、$\Pi(\mathbf{p},\mathbf{h}(\mathbf{p})) = -Z(\mathbf{p},\mathbf{h})$

$$g(\mathbf{p},\mathbf{h}(\mathbf{p})) = \sum_{k\in\Lambda^2}\left(p_k h_k - VC_k(\mathbf{h}(\mathbf{p})) - FC_k\right)$$

上位問題の意思決定変数に関連して下位問題における$\mathbf{h},\Psi$の勾配が得られれば、それらをもとに上位問題の勾配が計算でき、利用者均衡問題を下位問題にもつ非線形最適化問題の解法として、標準的な非線形最適化問題に対する多くのアルゴリズムが適用可能となる。

非線形感度分析は、この問題に対する計算手法として次の２つの性質から有効である[5]。１つめは、すべてのパラメータの摂動に対して一般的にネットワーク均衡状態が生じること、２つめはこのタイプの感度分析は摂動変数に関する意思決定変数と制約条件式に対する未定乗数の変化のみを計算すればよいため、前者の性質が保証されれば計算が可能となることである。料金を摂動変数εとして、RPEPは(4)式として表される。上位問題の意思決定変数である料金の変化に対する均衡フローの変化は、摂動変数εの変化に対する均衡フローの変化として、(4b),(4c)式の摂動変分不等式を満たすように記述される。

$$\min_{\varepsilon}.\ \Pi(\varepsilon,\mathbf{h}(\varepsilon)),\quad s.t.\ g(\varepsilon,\mathbf{h}(\varepsilon)) \le K \tag{4a}$$

$$C(h^*,\varepsilon)^T(h-h^*) - w(q^{1*},\varepsilon)^T(q^1-q^{1*}) \ge 0, \forall (h,q)\in\Omega(\varepsilon) \tag{4b}$$

$$\Omega(\varepsilon) = \left[\mathbf{h}\middle|\Lambda\mathbf{h} = \mathbf{q}(\varepsilon), \mathbf{h}\ge 0\right] \tag{4c}$$

しかしながら、先述のように一般に利用者均衡状態では、リンク交通量が一意に決まっても経路交通量は一意に決まらないため、(4)式から導かれる(2)式に対応する条件もTobin and Friesz定理３[5]を満足しないので局所最適解の必要十分条件とはならない。すなわち、摂動変数に関する解h*の勾配は常に一意には存在しない。

そこで、ある料金に対して計算された均衡解$\mathbf{v}^*(0)$が与えられた場合に、摂動変数に対する下位問題の勾配を計算するためには、凸多面体$\Omega(\varepsilon)$の中から、非退化の端点となる経路パターンを選ぶ工夫が必要となる。具体的には、特定の均衡状態から料金の摂動に対して、均衡状態で利用されている経路が利用されなくなったり、新たな経路が利用されたりしないように、勾配計算のための経路フローの組み合わせを決めることが必要となる。ここで、非退化の端点を含む経路フローの解集合を(5)式のように定義する。

$$\Gamma^*(\varepsilon) = \left[\mathbf{h}\middle|\Delta\mathbf{h} = \mathbf{v}^*, \Lambda\mathbf{h} = \mathbf{q}(\varepsilon), \mathbf{h}\ge 0\right] \tag{5}$$

摂動変数に対して非退化の端点を探索する方法としては、FW法の最短経路探索のような経路発生手法を用いることができる。このとき特定の経路フローパターンの存在は、「全ての接続されている経路で起終点間が正のフローを持てば、すべての非負のリンクフローは特定の経路フローパターンで表現することができる。」というフロー分解原理[9]で保証される。均衡状態に対する経路フロー$\mathbf{h}^*(0)$の組み合わせを決めるための一般的な方法は、均衡時にフローが正であるリンクのみを限定して他のリンクから切り離し、均衡状態におけるリンクフロー$\mathbf{v}^*(0)$をリンク容量とし、そのネットワークのリンク容量に一致する経路フローパターンを線形計画問題を用いて解くことである[5][10]。以降では、εを摂動させる前の特定の均衡状態において、フローが正であるリンクのみを抜き出した限定されたネットワークとそのフローについて、摂動問題の基準という意味で各変数に添字０を付加して記述する。

ここで、以上の過程を経て問題を正のフローを持つリンクのみに限定したとすると、全ての経路フローが正であるので$\lambda,\varphi=0$。また、非負制約については均衡解の近傍では摂動変数が変化しても必ず満たされため、(4)式に対応する均衡条件式は(2)式から以下のように簡略化される。

$$-w^0(q^{1*},0) + E\mu = 0 \tag{6a}$$

$$\mathbf{C}^0(\mathbf{h}^*,0) - \Lambda^{0T}\mu = 0 \tag{6b}$$

$$\Lambda^0\mathbf{h}^* - \mathbf{q}^*(0) = 0 \tag{6c}$$

このとき、Λ^{0T}の列ベクトルは線形独立であり、μは一意に決まる。一意な解ベクトルをμ^*と表記する。連立方程式(6)は$\varepsilon=0$の近傍において、摂動変数εに対応する均衡フローの孤立局所最適解の存在についての必要十分条件であるTobin and Frieszの定理４[5]を満足するためεに関する$\mathbf{h}^*(0)$の勾配が一意に計算できる。連立方程式(6)の$(\mathbf{h}^*(0),\mu)$に関するヤコビアンと$\varepsilon=0$での値は(7)(8)式のようになる。摂動変数に対する隠関数定理から、(9)式のように下位問題の摂動変数に関する解ベクトルの勾配が得られる。

$$J_{q^0,h^0,\mu} = \begin{bmatrix} -\nabla_q w^0(q^*,0) & 0 & E \\ 0 & \nabla_h C^0(h^*,0) & -\Lambda^{0T} \\ E^T & \Lambda^0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$J_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -\nabla_{\varepsilon} w^{0}(q^{*},0) \\ \nabla_{\varepsilon} C^{0}(h^{*},0) \\ -\nabla_{\varepsilon} q(0) \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\varepsilon} q^{*} \\ \nabla_{\varepsilon} h^{*} \\ \nabla_{\varepsilon} \mu \end{bmatrix} = J^{-1}_{q^{0},h^{0},\mu} \bullet J_{\varepsilon} \tag{9}$$

先述のように、摂動変数に関する意思決定変数の勾配が得られれば、(10)式のように上位問題での目的関数の勾配を計算することができる。

$$\nabla\tilde{\Pi}(p) = \nabla_{p}\Pi(p,h) + \left[\nabla_{q}\Pi(p,h), \nabla_{h}\Pi(p,h), 0\right]\begin{bmatrix} \nabla_{\varepsilon} q \\ \nabla_{\varepsilon} h \\ \nabla_{\varepsilon} \mu \end{bmatrix}$$
$$= \nabla_{p}\Pi(p,h) + \nabla_{h}\Pi(p,h)\nabla_{\varepsilon} h \tag{10a}$$

$$\nabla\tilde{g}(p) = \nabla_{p} g(p,h) + \left[\nabla_{q} g(p,h), \nabla_{h} g(p,h), 0\right]\begin{bmatrix} \nabla_{\varepsilon} q \\ \nabla_{\varepsilon} h \\ \nabla_{\varepsilon} \mu \end{bmatrix}$$
$$= \nabla_{p} g(p,h) + \nabla_{h} g(p,h)\nabla_{\varepsilon} h \tag{10b}$$

ここで、$\nabla_{\mathbf{s}}*$および$\nabla*(\mathbf{s})$の演算子は、$*$が単一の関数の場合には変数 s に関する勾配ベクトル、ベクトル関数の場合には変数 **s** に関するヤコビアンを表すものとする。

4. ペナルティ関数法を用いたラムゼイ価格均衡モデルの計算アルゴリズム

先述のようにラムゼイ価格均衡問題は、2段階最適化問題の1種である均衡条件式を制約式に持つ非線形計画問題となっており、非線形感度分析を応用することで、通常の降下方向法を用いて解くことができる。ここでは、ペナルティ関数法を用いた解法のアルゴリズムを示す。前提条件として、この問題自体が複数均衡解を持つケースを含むため、必ず大域的最適解に収束する保証はない。

式(3)よりペナルティパラメータγを用いて拡張目的関数$E(\mathbf{p})$を定義する。

$$\min . E(\mathbf{p}) = \Pi(\mathbf{p}) + \gamma|g(\mathbf{p})| \tag{11}$$

また、拡張目的関数の勾配ベクトルは式(10)より、

$$\nabla E(\mathbf{p}) = -\nabla\Pi(\mathbf{p}) + \gamma\nabla g(\mathbf{p})\delta \tag{12}$$

where

$$\delta : \begin{cases} if\ g(\mathbf{p}) \geq 0\ then\ \delta = 1 \\ if\ g(\mathbf{p}) < 0\ then\ \delta = -1 \end{cases}$$

Step 1) 下位問題の均衡条件式およびフロー保存条件式を満足する初期実行可能解 $\mathbf{p}^{0}$, $\mathbf{h}^{0}(\mathbf{p}^{0})$を選ぶ。

Step 2) 初期実行可能解 $\mathbf{p}^{0}$, $\mathbf{h}^{0}(\mathbf{p}^{0})$に対する目的関数値$E^{0}(\mathbf{p}^{0})$の計算。

Step 3) 非線形感度分析を用いて拡張目的関数の最急降下方向を決定。

$$\mathbf{d}^{k} = -\nabla E(\mathbf{p}^{k})$$

Step 4) 実行可能解の更新。

$$\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^{k} + \alpha\mathbf{d}^{k}$$

Step 5) $\mathbf{p}^{k+1}$に対する均衡配分を行い均衡解 $\mathbf{h}^{k+1}(\mathbf{p}^{k+1})$から、拡張目的関数値 $E^{k+1}(\mathbf{p}^{k+1})$を計算。

Step 6) $E^{k+1} > E^{k}$ならステップサイズを$\alpha = \alpha\delta_{1}$で更新して Step 4)へ

Step 7) $\alpha > \delta_{2}$なら $k = k+1$として Step 3)へ、 $\alpha < \delta_{2}$なら計算終了。

α : ステップサイズ

$\mathbf{d}$: 最急降下方向ベクトル

k : アルゴリズムの繰り返し回数

δ_{1} : 適当な正の定数

δ_{2} : 極微小な正の定数（収束判定基準）

本アルゴリズムでは、降下法として拡張目的関数に対する最急降下法を用いている。ステップサイズの更新については、Step 4)~Step 6)の部分から分かるように、目的関数値が改善されなくなると、スッテプサイズを一定の割合で小さくするという単純なアルゴリズムを用いている。

5. 例題計算を用いた計算手法の検討

（1）例題ネットワークと定式化

郊外部から都心部へ向かって50000人が通勤する状況を想定し、図2に示すネットワークに対して例題計算を行う。郊外地区を表すセントロイド

１、２、比較的ＣＢＤに近いセントロイド３からＣＢＤを表すセントロイド４へそれぞれ 20000 人、10000 人が通勤しているものと仮定する。新交通システムの導入が地方自治体によって計画されており、これが完成すると OD ペア 1-4 はそれぞれ１経路に対応する新交通システムと自動車によって結ばれる。また、OD ペア 2-4 は２経路の自動車経路で接続されているものとする。 OD ペア 3-4 については、バスと自動車によって結ばれているものとする。バスと自動車の所要費用はリンク３、６上では相互の交通量に対して独立していると仮定する。なお、本例題では、問題を単純化するため、かならず全てのリンクフローが正となり、経路フローの組み合わせが一意に決まるように、ネットワークを構成している。以下に図２のネットワークに対する RPEP の定式化を示す。まず、各リンクの費用関数は(13)式のように仮定する。

＜リンク所要費用 ＞

$$c_a(x_a) = \beta t_{a0}\left\{1 + 0.15(x_a / Q_a)^4\right\} + p_a, a \in 1,\dots,4 \quad (13a)$$

$$c_a(x_a) = \beta t_{a0} + p_a, a \in 5 \quad (13b)$$

$$c_a(x_a) = \beta t_{a0} + 0.0225(x_a / Q_a) + p_a, a \in 6 \quad (13c)$$

L2)

＜経路所要費用＞

$$C_1 = c_1(x_1) + c_3(x_3) \quad (14a)$$

$$C_2 = c_2(x_2) + c_3(x_3) \quad (14b)$$

$$C_3 = c_4(x_4) \quad (14c)$$

$$C_4 = c_3(x_3) \quad (14d)$$

$$C_5 = c_5(x_5) \quad (14e)$$

$$C_6 = c_6(x_6) \quad (14f)$$

＜フロー保存条件式＞

$$x_1 = h_1 \quad (15a)$$

$$x_2 = h_2 \quad (15b)$$

$$x_3 = h_1 + h_2 + h_4 \quad (15c)$$

$$x_4 = h_3 \quad (15d)$$

$$x_5 = h_5 \quad (15e)$$

$$x_6 = h_6 \quad (15f)$$

$$h_1 + h_5 = q_{14} \quad (15g)$$

$$h_2 + h_3 = q_{24} \quad (15h)$$

$$h_4 + h_6 = q_{34} \quad (15i)$$

c_a ：リンクａの所要費用［円/trip］
t_{a0} ：ゼロフロー時のリンクａの所要時間［分］
Q_a ：リンクａの交通容量［台/日］
p_a ：リンクａの通行料金[円]

＜均衡条件式＞

機関分担はロジットモデルで表現でき、同一モード内ではワードロップの第一原理が成り立つと仮定しているので次式が成立する。

$$\mu_{14}^1 = \mu_{14}^2 + \theta \ln \frac{h_5}{q_{14} + h_5} \quad (16a)$$

$$\mu_{34}^1 = \mu_{34}^2 + \theta \ln \frac{h_6}{q_{34} + h_6} \quad (16b)$$

$$\mu_{14}^1 = \mu_{24}^2 \quad (16c)$$

μ_{ij}^m :ＯＤペアｉｊ間のモードｍを利用した最小所要費用[円]
q_{ij} ：セントロイドｉからｊへ向かう交通量［trip］

OD ペア 1-4 間と 3-4 間の自動車利用者全体の総便益については、需要関数をロジットモデルを用いて定義しているため消費者余剰を用いて(17)式のように定義できる[11)12)]。

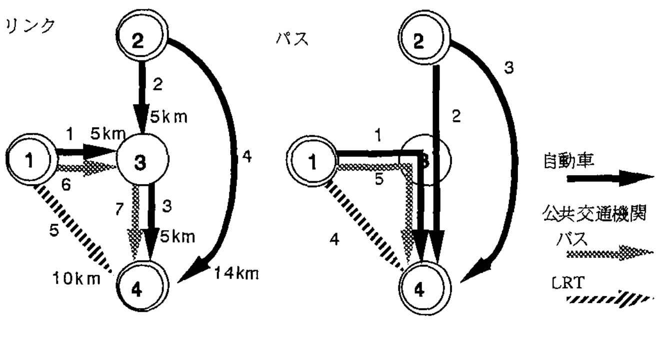

図２　単純化した都市交通ネットワーク

$$CS_{14} = yq_{14} - \theta q_{14} \ln \sum_{m=1,2} \exp\left(-\mu_{14}^{m} / \theta\right) \tag{17a}$$

$$CS_{34} = yq_{34} - \theta q_{34} \ln \sum_{m=1,2} \exp\left(-\mu_{34}^{m} / \theta\right) \tag{17b}$$

y : 交通利用者の平均所得[円/日]

ODペア2-4間については消費者余剰の損失の総計を、道路混雑による社会的損失によって定義する。各道路区間について平均費用と限界費用が以下のように定義されるので平均費用と限界費用の差を各経路交通量に対して積分し、経路ごとに分解してODペア 2-4 間を移動する人々の総所得から引くと、(17c) 式に示す総便益が定義できる[11]。

$$Ac_a = \omega t_{ao}\left(1 + 0.15\left(x_a / Q_a\right)^4\right) + p_a$$
$$Mc_a = \omega t_{ao}\left(1 + 0.75\left(x_a / Q_a\right)^4\right) + p_a$$
$$\begin{aligned} CS_{24} &= yq_{24} - \sum_{k=2,3} \int_0^{h_k} MC_k - AC_k ds \\ &= yq_{24} - 4.8t_{40}\left(x_4^5 / Q_4^4\right) - 4.8t_{20}\left(x_2^5 / Q_2^4\right) \\ &\quad -4.8t_{30}\left(x_3^5 / Q_3^4\right)h_4 / x_3 \end{aligned} \tag{17c}$$

新交通とバスの運営形態を表1に示す。公共交通機関のサービスの供給費用は(18)式の費用関数で表されている。バスと新交通システムのサービスについては、単一の交通企業が両方のサービスを供給しているものとし、インフラ部等の固定費用以外の人件費や燃料費、ターミナルの維持費等の可変費用部分については共通費用として、右辺第2項のコブダグラス型の結合費用関数で表されるものとする。なお、関数形とパラメータは日本のバス会社 81 社のデータを用いて推定した宮城・中津原[12]を参考とした。

$$\left(FC_B + FC_N\right) + VC_k\left(h_5, h_6\right)$$

表1　公共交通機関の特徴

	新交通システム	バス
路線長	10km	5km
運行速度	20km/hr	交通量に対して増加
運行頻度	8本/hr（片道）	4本/hr（片道）
営業時間	7:00 - 22:00	7:00 - 22:00
運行距離	2400km/日	600km/日
建設費用	40億円/km	——
補助金	建設費用の54.4%	——

$$= \left(FC_B + FC_N\right) + 0.001P^{0.2}H^{2.0}L^{0.5} \tag{18}$$

ここで、

FC_B ：バスの固定費用［円/日］（＝0と仮定）

FC_N ：新交通システムの建設費用の返済費用［円/日］

VC ：可変費用［円/日］

P : 燃料費［円/日］（=40円・運行距離kmと仮定）

H : 旅客数［trips/日］（$= h_5 + h_6$）

L : 総営業キロ［km/日］

交通事業者の利潤に対するブレイクイーブン制約は(19)式のように定式化できる。

$$p_5 h_5 + p_6 h_6 - FC_N + VC_k\left(h_5, h_6\right) + K \geq 0 \tag{19}$$

なお、例題計算で用いたパラメータの数値を以下に示す。

$$t_{a0} = (6, 6, 6, 6, 18, 24, 15)$$
$$Q_a = (10400, 7800, 15600, 10400, -, -)$$
$$y, \theta, \beta, P, L = 15000, 100, 40, 60000, 1500$$

（2）計算結果

19回の繰り返し計算で収束基準により計算が終了し、局所最適解への収束を確認した。最適状態での料金及び利用者数は、新交通システムについては、406.4円で4082人、バスについては304.8円で1786人となった。計算過程での新交通システム料金と目的関数である社会的総余剰の収束の過程を図３、４に示す。新交通システムとバスの料金は、公共交通機関間の分担関係だけでなく、自動車交通との分担、さらに自動車ネットワークの混雑も考慮した結果として計算されているため、料金、交通量ともに変動幅の収束の過程に類似性が見られた。計算過程において、５回目までは、ゼロ利潤制約が満たされておらず、解の更新に占めるペナルティ項の割合が非常に大きくなっているため、急激な変化となった。６回目からは、ゼロ利潤制約が満たされ、その上で社会的総余剰を最大化するような料金および交通量の組み合わせを探索しており、緩やかに推移している。このような収束過程の様子は、設定した例題と各種パラメータに依存して様々に異なってくる。

つぎに、計算過程における下位問題の均衡解の勾配の近似精度について検討する。ここでは、計算過程の途中の実行可能解の一つを例として、非線形感度分析を用いて計算した下位問題の均衡解の勾配と、実際に料金を変化させてそれぞれ均衡解を求めて差分をとって計算した勾配との比較を試みた。計算過程での新交通システムとバスの料金がそれぞれ、403.5円と302.0円の場合の実行可能解を基準とした場合の比較を表2に示す。この結果からは、必ずしも料金設定に対する均衡解の勾配の変化を正確に捉えているとは言えない。この原因の一つとして、比較の対象となる差分によって計算した実際の均衡解の勾配が、差分を計算するときの摂動量によって、限界的な変化と比較して誤差を含んでいることが挙げられる。ただし、符号条件や大小関係は正確に捉えられており、変数間の目的関数への影響などの相対的な関係は近似できていることが分かる。また、本アルゴリズムは、各繰り返し計算過程で毎回均衡解を計算する構造になっており、誤差が蓄積することはないため、計算された降下方向が降下許容方向に含まれる範囲にあれば計算可能である。よって、摂動変数に対する均衡解の変化量自体は、ある程度の誤差を含んでいるものの、最急降下方向については、計算に支障のない範囲で、ほぼ近似できていると言える。

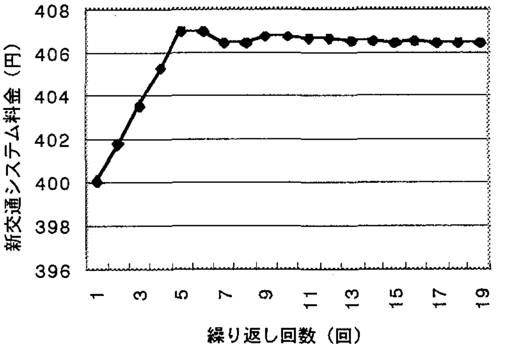

図3　新交通システム料金の収束過程

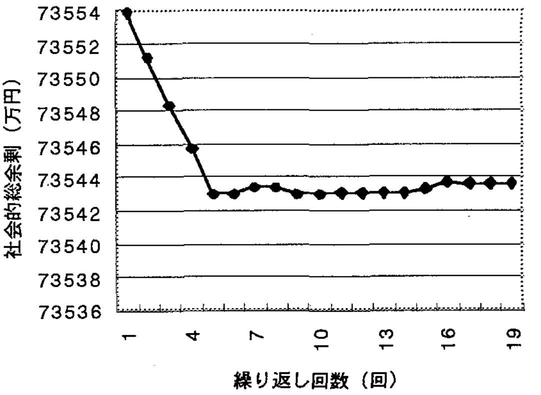

図4　社会的総余剰の変化

表2　計算過程での均衡解の変化

	p_1 = 403.5円 p_2 = 302.0円	$p_1 = p_1 + \varepsilon_1$　$p_2 = p_2 + \varepsilon_2$　$\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$		$p_1 = p_1 + \varepsilon_1$　$p_2 = p_2 + \varepsilon_2$　$\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$	
	基準料金の均衡解	均衡解	近似解	均衡解	近似解
h_1	15897.9	9.8	18.4	-3.5	-5.8
h_2	6479.1	-2.7	-5.1	-2.1	-4.6
h_3	13520.9	2.7	5.1	2.1	4.6
h_4	8199.4	-3.1	-5.8	8.6	-17.0
h_5	4101.9	-9.8	-18.4	3.5	5.8
h_6	1800.6	3.1	5.8	-8.6	-17.0
u^1_{14}	1227.9	0.7	1.4	0	0.2
u^1_{24}	1048.4	0.3	0.5	0.2	0.4
u^1_{34}	791.3	0.3	0.5	0.2	0.5
u^2_{14}	1363.5	1	1	0	0
u^2_{24}	1048.5	0.3	0.5	0.2	0.4
u^2_{34}	942.5	0.1	0.1	0.8	0.6

6．おわりに

本分析では、非線形感度分析に基づくラムゼイ価格均衡モデルの計算方法としてペナルティ関数法を応用したアルゴリズムを構築し、例題計算を通して計算手法の妥当性を検討した。今回の分析では、局所最適解への収束を確認すると伴に、計算過程で用いられる降下方向を計算するもとになる均衡解の勾配に対する非線形感度分析の近似の精度を数値例を用いて検討した。その結果、均衡解の絶対値としての変化量は完全に近似できていないものの、相対的な変化は正確に捉えられているため、降下方向の決定に関しては十分であり、計算手法として十分に利用可能であることが確認できた。さらに改良を加えていくとすると、ステップサイズの更新の部分に一次元探索のアルゴリズムを適用することにより、局所最適解への収束性を向上することができる。また、理論的には、拡張目的関数の単峰性が保証されなければ、大域的収束性の性質が保証されないため、例えばペナルティ関数法の拡張であるラグランジュ乗数法[14]への改良が考えられる。さらに、実際の交通ネットワーク問題を考える場合には、勾配計算の際に非常に大きな逆行列を定義し、計算しなければならないことが検討すべき点として残っている。

参考文献

1)Ramsey, F. (1927). A contribution to the theory of taxation. **Economic Journal, 37(1)**, 47-61.

2)Train, K.E. (1977). Optimal transit prices under increasing returns to scale and a loss constraint. **Journal of Transport Economics and Policy, 11(2)**, 185 - 194.

3)Miyagi, T., K.Izuhara and J.Morishima (1992). Ramsey optimal pricing in guideway bus system competitive with private automobile. **Papers presented at WCTR 92'**, Lyon , France.

4)Miyagi, T. and Suzuki, T.(1996) A Ramsey price programming approach with transportation network equilibrium constrains. **7th WCTR Proceeding 2**, 65-78

5)Tobin, R.L. and T.L. Friesz (1988). Sensitivity analysis for equilibrium network flow. **Transpn. Sci., 22**, 242-250.

6)Yang, H. and Yagar S. (1994). Traffic assignment and traffic control in general freeway-arterial corridor systems. **Transpn. Res-B, 28B(6)**, 463-486.

7)T.Miyagi and T.Suzuki (1997) A Ramsey price equilibrium and its computational procedure. Journal of EASTS, Vol 2,No.4, pp.1047-1062.

8)志水清孝(1982).多目的と競争の理論、共立出版、東京、216-225

9)Florian, M. and H.Spiess (1983). On binary mode choice/assignment models. **Transpn. Sci. 17(1)**, 32-47.

10)Ahuja, R.K., T.L. Magnanti and J.B. Orlin (1983). **Network Flows : theory, algorithms, and applications**. Prentice-Hall International, Englewood cliffs, NJ.

11)森杉壽芳,宮城俊彦：都市交通プロジェクトの評価、pp.88-138,コロナ社

12)Hal R. Varian,佐藤隆三監訳：入門ミクロ経済学、pp.214-226、勁草書房

13)宮城俊彦,中津原勢司(1995)：.公共輸送企業の費用構造と輸送効率性分析、運輸と経済**55**-11, 24-31.

14)今野浩,山下浩(1978)：非線形計画法、pp.245-252, 日科技連

非線形感度分析を用いたラムゼ価格均衡モデルの計算手法

宮城俊彦　鈴木崇児

規模の経済が働く状況下で企業が限界費用価格設定を行った場合、赤字が発生し、経営を維持していくことが困難になる。このような状況下では、ラムゼイ価格設定等[1]の次善価格設定の方法が重要となる。宮城ら[3]はラムゼイ価格基準を多手段ネットワーク均衡の枠組みのもとで２段階最適化問題として再構成した。本研究では、これらを参考として非線形感度分析を用いたラムゼイ価格均衡問題の計算アルゴリズムを構築し、例題計算を通して計算手法の収束性と計算過程での均衡解の精度を検討することを目的とする。

An application of nonliner sensitivity analysis to Ramsey price equilibrium model

by Toshihiko MIYAGI　Takaji SUZUKI

If the firm set price equal to marginal cost in the context of economy of scale, the firm would not be sustainable for deficit. In this case the second best pricing rules like a Ramsey pricing (1927) are important. Miyagi et al. (1992) extent the Ramsey pricing rule within the framework of binary mode choice/assignment model. This model determines the optimal fares for urban transits under the competition between automobiles and urban transits. The purpose of this paper is to investigate a computational method for the RPE model. We apply a nonlinear sensitivity analysis based on the penalty function method. Then we examine our method through numerical experiments.
