【土木計画学研究・論文集 No. 15 1998年9月】

「視点間ストレス法」によるAHPの提案

A Proposal of the AHP by the 'Inter-Viewpont Stress Method'

中西昌武**・木下栄蔵***
by Masatake NAKANISHI and Eizo KINOSHITA

1. はじめに

階層分析法AHP (Analytic Hierarchy Process) は、実用的な意思決定支援ＯＲ手法としてよく知られており、また実務への適用が多い。AHPは一対比較により対象を評価するが、尺度化の手法として固有ベクトル法を用いている。これは一対比較行列が逆数行列（対称成分の値が逆数関係）のときに行列の固有値・固有ベクトルが１つだけになる性質を応用したものである。

AHPには、一対比較行列が完全に整合的でない場合のデータモデルが不明確であるとの指摘がこれまであったが、最近、一対比較値を本来の評価値からのある種の誤差として捉えるモデル（誤差モデル）であることが分かってきた。しかし実際には一対比較値を本来の評価値そのものとして捉えるほうが良い場合が多い。そのためには、評価者の評価視点ごとの一対比較値を本来の評価値とし、意思決定は視点ごとの評価値の何らかの最適な合成にもとづいてなされるという前提に立つモデル（合成モデル）が必要になる。

本論文では合成モデルの立場から、視点間の調整をミニマムに行う新たな手法として、視点間ストレスに着目したAHP（視点間ストレス法）を提案する。

2. 一対比較評価における誤差モデルと合成モデル

AHPの創始者サーティ（Saaty）はAHPのモデルを作るに当たり、次のような評価の理想状態（完全に整合性がとれている）を想定した[1)]。

評価項目C1, C2, ..., Cnの「本来の評価値」がw_1, w_2, ... w_nであるとき、C1とC2の一対比較値a_{ij}は、

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j} \quad \text{....(1)}$$

となる。すべての評価項目の比較結果は一対比較行列$A=[a_{ij}]$で示される。

$$A=\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \quad \text{....(2)}$$

これに評価値ベクトル$W=[w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n]^T$を右からかけると$AW=nW$となることから、評価が理想状態にあるときはAの最大固有値の固有ベクトルとして評価値ベクトルを求めることが出来る（固有値n）。

評価が理想状態でないときの一対比較値行列の整合性を評価する尺度として、Saatyは、一対比較行列の固有値λを用いた整合度C.I.（Consistency Index）を提案している[2)]。C.I.は、完全な推移関係が成立するとき０となるが、経験的には、0.1を超えなければよいとされている。

$$C.I.=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1} \quad \text{....(3)}$$

また、固有ベクトル値を簡便に求める手法としては、幾何平均法と算術平均法の適用が可能である。

<幾何平均法>

一対比較行列の行ベクトル、

$$A_1=\begin{bmatrix} \frac{W_1}{W_1} & \frac{W_1}{W_2} & \cdots & \frac{W_1}{W_n} \end{bmatrix} \quad \text{....(4)}$$

$$A_2=\begin{bmatrix} \frac{W_2}{W_1} & \frac{W_2}{W_2} & \cdots & \frac{W_2}{W_n} \end{bmatrix} \quad \text{....(5)}$$

$$A_3=\begin{bmatrix} \frac{W_3}{W_1} & \frac{W_3}{W_2} & \cdots & \frac{W_3}{W_n} \end{bmatrix} \quad \text{....(6)}$$

の各列の値を幾何平均する。

$$\hat{W}_1=\frac{W_1}{(W_1W_2\cdots W_n)^{1/n}} \quad \text{....(7)}$$

$$\hat{W}_2=\frac{W_2}{(W_1W_2\cdots W_n)^{1/n}} \quad \text{....(8)}$$

---

* キーワード　計画基礎論、計画手法論
** 正会員　名古屋経済大学　助教授　経済学部
（〒484-0841 愛知県犬山市内久保61-1
TEL / FAX 0566-27-0559)
*** 正会員　工博　名城大学　教授　都市情報学部
（〒509-0261 岐阜県可児市虹ケ丘4-3-3
TEL 0574-69-0143　FAX 0574-69-0155)

$$\hat{W}_n = \frac{W_n}{(W_1W_2\cdots W_n)^{1/n}} \qquad ....(9)$$

$$\therefore \quad \hat{W}_1 : \hat{W}_2 : \ \dots\ : \hat{W}_n = W_1 : W_2 : \ \dots\ : W_n$$

<算術平均法>

A_1, A_2, A_3の各列の値を算術平均する。

$$\hat{W}_1 = W_1\left(\frac{1}{W_1}+\frac{1}{W_2}\cdots\cdots+\frac{1}{W_n}\right)/n \qquad ....(10)$$

$$\hat{W}_2 = W_2\left(\frac{1}{W_1}+\frac{1}{W_2}\cdots\cdots+\frac{1}{W_n}\right)/n \qquad ....(11)$$

$$\hat{W}_n = W_n\left(\frac{1}{W_1}+\frac{1}{W_2}\cdots\cdots+\frac{1}{W_n}\right)/n \qquad ....(12)$$

$$\therefore \quad \hat{W}_1 : \hat{W}_2 : \ \dots\ : \hat{W}_n = W_1 : W_2 : \ \dots\ : W_n$$

このように、評価が本来の評価値を整合性よく反映する場合は、いずれの計算方法でも、本来の評価値の比と同じになる。

しかし、Saatyの固有ベクトル法は、どのようなデータモデルの仮定にもとづく解析であるかが明確でない、との指摘が従来からあった[3]。すなわち、一対比較値が完全に整合でない場合の一対比較行列の固有ベクトルが、評価ウェイトとして数学的にどのような意味をもつ値であるかは、これまで全く明らかにされてこなかったのである。

この問題に対し、高橋は、本来の評価値の推定には、測定誤差が正規分布の場合はガウス・マルコフ定理により対数最小二乗法（Logarithmic Least Square method：LLS）が最適であるにもかかわらず、Saatyはなぜ固有ベクトル法を提案したのだろうか、と疑問を投げかける[4]。対数最小二乗法は、統計的誤差が最小となる解を本来の評価値の推定値にしようとするアプローチである。このように、一対比較値を本来の評価値からの誤差として捉えるモデルを「誤差モデル」と呼ぶことにする。

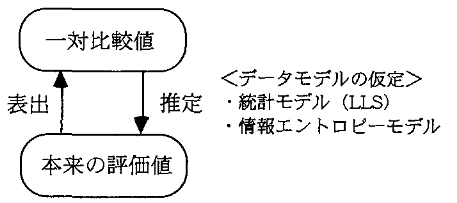
高橋が疑問をなげかけたAHPの数理モデルについて、ネイカンプ（Nijkamp）らは、λ_jをウェイト、ω_{ij}を評価対象の各特性とする効用関数であると理解し、次のような式を与えた[5]。

$$W_i = \lambda_1\omega_{i1} + \lambda_2\omega_{i2}\cdots + \lambda_j\omega_{ij}\cdots + \lambda_n\omega_{in} \qquad ....(13)$$

この問題に対し、尾崎・木下・原は、AHPの固有ベクトル値が、一対比較時点で評価者の情報エントロピーが最大となる同時確率分布と形式的に同じになることを数学的に示した[6]。これは、平たくいえば次のようになる。

「評価は本来の評価値に対し常にぶれが生じるので、どのような評価値が現れるかは不確実である。一対比較データが最も生じやすい同時確率分布を求めると、推定された評価対象の確率は固有ベクトル値と同じになる」。

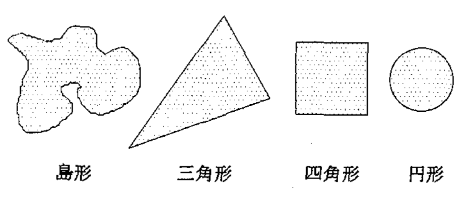
対数最小二乗法とは誤差の捉え方が異なるが、尾崎らの情報エントロピーモデルも誤差モデルの一種であるといえる。これと数学的に同じ構造を持つ固有ベクトル法もまた、誤差モデルとして位置づけて良いだろう。すなわち固有ベクトル法は、一対比較値から本来の評価値を推定する計算手法である。



図－1　誤差モデル

ところで、誤差モデルの理論的前提には疑問がある。回答のバグでない限り、評価者には、そのとき確かにそのように見えているはずであって、一対比較値こそ本来の評価値と見るべきではないだろうか。

ゲシュタルト心理学派は、何らかの心理的な作用によってどうしても実寸とは異なる見え方をしてしまう錯視図形を多数紹介している。また、著者も、1997年10月～1998年1月にかけて、名古屋経済大学の65人の学生を対象に以下のような４つの図形の面積比認知に関する一対比較実験を面接方式で行ったが、被験者には島型を実寸よりも小さく、円形を実寸よりも大きく評価する有意な傾向があった（全員が、C.I.＜0.1）。



図－2　一対比較実験の評価図形

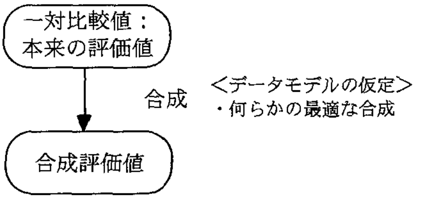
表－1　一対比較実験の結果

評価図形→	島形	三角形	四角形	円形
実面積比	0.342	0.309	0.219	0.130
固有ベクトル値	0.310	0.306	0.223	0.161
標準偏差	0.029	0.031	0.030	0.036
実面積比との差	-0.032	-0.003	+0.004	+0.031
正規化された差	-1.10	-0.10	+0.13	+0.86

これは評価の整合性と認知の正確性とが直接結びつかないことを示している。

AHPを意思決定手法に用いる場合は、一対比較値を誤差データとして捉えるのではなくて、本来データそのものとして扱えるデータモデルが必要なのである。本人に「いまどのように見えているか」こそが意思決定の源泉となる。

このモデルは、基準となる評価対象すなわち評価視点が変わると同じ観察対象でも評価内容が変わることに対応できなければならない。こうした現象についてはこれまで印東太郎[7]、シェッフェ（Scheffe）[8]、吉田正昭[9]、佐伯胖[10]などの多くの心理学者が指摘してきたし、筆者もまた認知の歪みとして指摘したことがある[11]。そこで何らかの最適な方法で、それぞれの評価視点における各評価対象の評価結果をもとに合成評価値を合成する必要が出る。このように、本来の一対比較値から合成評価値を合成するモデルを「合成モデル」と呼ぶことにする。



図－3　合成モデル

3. 視点間ストレスに着目したAHP

ここでは、視点間ストレス（後述）に着目した合成モデルによるAHPを提案する。

一対比較のプロセスを子細に観察すると次のようなステップがある。なお Ci : Ci = 1 : 1 である。

[1]はじめにC_1に視点をおき、C1:C2,　C1:C3,　… C1:Cn を順次一対比較する。

[2]つぎにC_2に視点をおき、同様の比較を行うが、C2:C1についてはすでにC1:C2の比較結果a_{12}が得られているので$a_{21}=1/a_{12}$とし、C2:C3　から開始する。

[3]以下、C3, … , Cn まで視点を移しながら評価を続ける。

ステップ(2)の$a_{21}=1/a_{12}$だが、結果が不満な場合は見直す。Saatyは対称成分の逆数関係を要求しているので見直しはこれに従わなければならない。ここではこのことを「対称逆数ルール」と呼ぶことにする。

しかし心理学でしばしば指摘されている通り、視点を変えると同じ観察対象でも評価が変わることがある。理想状態以外の評価への対称逆数ルールの適用は、このような原始データを壊してしまう可能性がある。

そこで次のような状態を前提とする評価モデルをあらたに提案する。

「一対比較評価は、視点ごとに独立して行う。視点ごとに得られた原始データは必ずしも対称成分が逆数関係にある必要はない」。

このモデルは、評価者自身による自発的調整をさまたげないが、一対比較時点での視点間の調整を要請するものではない。この結果、一対比較行列は複数の視点からの複眼的イメージとなる。

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_n \end{bmatrix} \qquad \text{cf.}\quad a_{ii}=1 \qquad \cdots\cdots(14)$$

次に、(14)式の行列を変換し、各行が視点ごとの正規化された評価対象の評価値となる行列を求める。

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdots \\ B_n \end{bmatrix} \qquad \text{cf.}\quad \sum_{j=1}^{n} b_{\cdot j}=1 \qquad \cdots\cdots(15)$$

$$b_{i1}:b_{i2}\ \cdots\ :b_{in}=\frac{1}{a_{i1}}:\frac{1}{a_{i2}}\ \cdots\ :\frac{1}{a_{in}} \qquad \cdots\cdots(16)$$

視点ごとにB_1, B_2, …, B_n が異なることは、評価視点の間で、評価結果の拮抗すなわち「視点間ストレス」が発生していることを意味する。

このB_1, B_2, …, B_n をどのように合成するかで、評価結果は異なってくる。視点間ストレスを最小化する解を求めれば、それぞれの視点の不満の総和を最も少

なくする視点間調整を行うことができる。

異なる視点の評価結果をどのように総合するかについては、幾つかのシナリオが可能である。ここでは視点間ストレスを、意思決定者個人の中で複数の意見の拮抗が発生している状態と見なすことにする。すると、視点間ストレスの最小化は、集団意思決定ストレスの最小化法[12)]を援用して解くことができる。このような手法を「視点間ストレス法」と呼ぶことにする。

ここでは、視点間ストレス値(S)を以下のように定義する。

i ：評価の基準となる視点(i=1,..n)

j ：評価対象 (j=1,...n)

b_{ij} ：視点 i における評価対象jの評価値

g_i ：視点 i の格付け値(合計を 1 とする)

e_j ：評価要素 j に関する合成評価値

$$\sum_{i=1}^{n} g_i = 1 \qquad \text{....(17)}$$

$$e_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(g_i \cdot b_{ij}) \qquad \text{....(18)}$$

$$S = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(g_i \cdot b_{ij} - e_j)^2 \qquad \text{....(19)}$$

視点の格付け値g_iの和は1とする。ここでは原始データ（視点ごとの見解）b_{ij}の値は変えないものとする。b_{ij}**はそれぞれの視点における評価の個性を表現し、これ以上分解してはならない情報単位**と考えるためである（視点ごとの見解の保持）。

したがって調整可能なデータは、視点ごとの評価を合成するために設定された視点の格付け値g_iだけである。視点間ストレス値 S が最小となる g_i 値が、求める視点格付け案である。

具体的には(17)を制約式とし(19)を最小とするg_iの値g_i*をラグランジュ未定乗数法によって解けばよい。ラグランジュ未定乗数をYとする。

$$B_i = \begin{bmatrix} b_{i1}^* \\ \cdots \\ b_{ij}^* \\ \cdots \\ b_{in}^* \end{bmatrix} \qquad G^* = \begin{bmatrix} g_1^* \\ \cdots \\ g_i^* \\ \cdots \\ g_n^* \end{bmatrix} \qquad \text{....(20)}$$

とおくと、解となる格付け値G*は式(21)で求めることができる。

この場合、g_i*は、$0 < g_i^* < 1$ となることが中西・木下によって証明されている[13)]ため、G* は視点間の格

$$\begin{bmatrix} g_1^* \\ g_2^* \\ \cdots \\ g_n^* \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (n-1)|B_1|^2, & -(B_1,B_2), & \cdots & -(B_1,B_n), & 1 \\ -(B_2,B_1), & (n-1)|B_2|^2, & \cdots & -(B_2,B_n), & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -(B_n,B_1), & -(B_n,B_2), & \cdots & (n-1)|B_n|^2, & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

....(21)

付けの配分、すなわちそれぞれの視点の「一票の重み」を示す値となる。

視点の格付けを行わない視点間ストレス無調整の合成評価値は、算術平均法の解と同じ値になる。

また、一対比較行列の大きさが大きくなるとともにC.I.も視点間ストレス値もともに大きくなる。視点間ストレス値には、各視点の見解が互いに最も食い違う場合の値が(n,n)行列において(n−1)となる性質（ただしこの値がストレス最大値となるわけではない）があるので、この値を基準に正規化するとC.I.と同じく行列の大きさから独立した指標を作ることができる。ここではこの指標を、視点間ストレス度（ S.I.：Inter-viewpoint Stress Index ）と呼ぶことにする。

4. さまざまな場合における視点間ストレスの調整

ここでは、さまざまな条件における視点間調整を分析する。対比のため、各々の一対比較行列の右には、固有ベクトル値（尾崎らの情報エントロピーモデルと数学的に同じ構造を持つ誤差モデルによるAHP評価の結果）を示す。

Saatyが近似計算法として示した幾何平均法の解（対数最小二乗法と解が同じになる）と固有ベクトル値は、$n \leq 3$ のときに完全に一致することが高橋[14)]によって証明されているので、右に示した固有ベクトル値は、幾何平均法の値として見ることもできる。

4-1．完全に整合性のとれた一対比較行列の場合

表－2は、完全に整合性のとれた一対比較行列である。

表－2　完全整合時の一対比較行列

視点↓　比較対象→	C1	C2	C3	固有ﾍﾞｸﾄﾙ
C1	1	2	4	0.5714
C2	0.5	1	2	0.2857
C3	0.25	0.5	1	0.1429

評価は視点となる対象ごとに独立して行われているので、表－2は、視点C1, C2, C3それぞれにおける比較対象C1, C2, C3に対する評価の合成であると考えられる。

それぞれの視点における評価値は、表－2の一対比較行列を変換し、視点ごとの評価値の合計が1になるように正規化して求める（表－3）。その結果、完全に整合性のとれた一対比較行列の場合、視点ごとの評価対象の評価値はすべて固有ベクトル値と一致する。また、幾何平均や算術平均とも一致する。つまり、完全整合時は、合成モデルと誤差モデルの結果は一致する。各視点の格付け値は同等となり、また視点間にはストレスが発生しないので、視点間ストレス値は（従って視点間ストレス度も）C.I.と同じく0となる。

表－3　完全整合時の視点ごとの評価値

視点↓ \ 対象→	C1	C2	C3
C1	0.5714	0.2857	0.1429
C2	0.5714	0.2857	0.1429
C3	0.5714	0.2857	0.1429

4-2. 不整合時の一対比較行列の場合

次に、対称逆数ルールは遵守しているが、不整合が発生している場合を検討する。

表－4　不整合時の一対比較行列

視点↓ \ 比較対象→	C1	C2	C3	固有ﾍﾞｸﾄﾙ
C1	1	3	0.5	0.3732
C2	0.3333	1	5	0.3866
C3	2	0.2	1	0.2402

表－4は、循環関係が発生している。整合度も、$C.I.=0.715$と悪い（$C.I.>0.1$は不整合）。

表－5　不整合時の視点ごとの評価値

視点↓ \ 対象→	C1	C2	C3
C1	0.3000	0.1000	0.6000
C2	0.7143	0.2381	0.0476
C3	0.0769	0.7692	0.1538

しかし、ここでは、このデータは意思決定者独自の価値判断が正しく反映しているものとする。この場合の視点ごとの評価対象の評価値は、表－5のように、それぞれの視点で大きく異なる。

これは、視点C1においてC2:C3、視点C2においてC1:C3、視点C3においてC1:C2が、それぞれの視点の管轄外とされた結果を反映している。実際、循環関係が発生するとき、評価者は視点に直接関係する評価対象のみを念頭において評価していることが多い。

それぞれの視点間ストレスを最小化した場合の、C1,C2,C3の合成評価値$w_1:w_2:w_3$は、それぞれの視点の格付け配分を$g_1:g_2:g_3=0.3794:0.3314:0.2892$とし、次のようになる。

$$\begin{aligned}[w_1\ \ w_2\ \ w_3]&=[g_1\ \ g_2\ \ g_3]B\\&=[0.3794\ \ 0.3314\ \ 0.2892]\begin{bmatrix}0.3000&0.1000&0.6000\\0.7143&0.2381&0.0476\\0.0769&0.7692&0.1538\end{bmatrix}\\&=[0.3728\ \ 0.3393\ \ 0.2879]\end{aligned}\quad ....(22)$$

この結果、視点間ストレス値は、調整前の0.6307（視点間ストレス度31.5%）から、0.6152（視点間ストレス度30.8%）に改善された。ただし循環関係の場合は、視点間の拮抗の解消が難しいので、視点間ストレスそれ自体はあまり改善されない。

しかしこうした拮抗状態の時こそ、合理的な理由付けに基づく視点間の格付けが意思決定へのヒントとなる。視点間ストレスの改善はわずかだが、C1,C2,C3の各視点に対し+13.8%，-0.6%，-13.2% の格付け調整の方向付けが意思決定者に示されている。この内容は評価対象の順位決定に影響するものである。

固有ベクトル法（誤差モデル）で計算すると、評価対象の順位は$C2>C1>C3$となる。いっぽう視点間ストレス法（合成モデル）だと$C1>C2>C3$となる。一対比較値を本来の評価値と見なすか、それとも誤差の現れと見なすかで、このように異なる結果を導くことがあるが、意思決定者ははたしてどちらの立場をとるべきだろうか。

ここで固有ベクトル値を合成するための視点格付値g_1,g_2,g_3を調べてみると、式(23)のようであった。

$$\begin{aligned}G'&=[g'_1\ \ g'_2\ \ g'_3]\\&=\begin{bmatrix}0.3732\\0.3866\\0.2402\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0.3000&0.1000&0.6000\\0.7143&0.2381&0.0476\\0.0769&0.7692&0.1538\end{bmatrix}^{-1}\\&=[0.2809\ \ 0.3666\ \ 0.3525]\end{aligned}\quad ....(23)$$

視点間ストレス法の結果と異なり、固有ベクトル法では、視点C1を一番低く格付けしている。しかし視点ごとの評価を本来データとし、視点間調整を行おうとする立場からすれば、このような格付けは視点間ストレス値を0.6707（視点間ストレス度33.5%）に増大させるだけであり、受け入れがたいものである。

4-3. 対称成分が逆数関係にならない場合

次に、対称成分が逆数関係にならない場合を検討する。

従来のAHPは、対称逆数を厳格に要請していた。しかし実際に視点ごとの評価を行ってみると、対称逆数でない事例を多く経験する。比較の基準となる対象を入れ替えるだけで評価が変わりうる現象については、提示位置の左右交換で発生する空間誤差や提示順序の交換で発生する時間誤差などさまざまなものが実際におこりうる。水野は、これらを誤差として片づけてしまうことに疑問を示し、むしろ人格特性に関係づけて積極的に評価すべき場合もあると指摘する[15]。筆者の実験の再テストでも、多くの被験者が、同じ箇所について繰り返し、一対比較の視点交換に対し対称逆数とはいえない反応を示している。

そこで、合成モデルにおいては、バグでないと判断される限り、対称逆数でない場合も本来の評価値として認める立場をとることにする。

視点間ストレス法（合成モデル）では、対称逆数でない場合も、適用が可能である。

固有ベクトル法（誤差モデル）についてはどうか。対称逆数でない一対比較行列のランクは1でなくなるので、固有値および固有ベクトルが複数現れ、このままでは解は一つに決まらない。そこで　固有ベクトル法は対称逆数ルールを立てて、入力値が対称逆数になるように厳正なコントロールを行っている。仮にもし対称逆数でないような一対比較行列がデータとして渡されたときは多くの場合、対称成分同士の値の平均値を使って便宜的に逆数行列を作成し、その上で固有ベクトル法を実施する方法がとられている。

表－6　対称逆数にならない場合の一対比較行列

視点↓ ＼ 比較対象→	C1	C2	C3
C1	1	3	6
C2	0.2	1	0.8
C3	0.1	5	1

表－6は、対称逆数にならない場合を示している。この評価値を視点ごとに正規化した値を表－7に示す。視点間ストレス法は、この値をもとに最適な視点の格付けと合成評価値を求めることになる。

表－7　対称逆数にならない場合の視点ごとの評価値

視点↓ ＼ 対象→	C1	C2	C3
C1	0.6667	0.2222	0.1111
C2	0.6897	0.1379	0.1724
C3	0.8929	0.0179	0.0893

それぞれの視点間ストレス値を最小化した場合の、C1,C2,C3の合成評価値 $w_1:w_2:w_3$ は、それぞれの視点の格付け配分を $g_1:g_2:g_3=0.3604:0.3564:0.2831$ とし、

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix} B \\
&= \begin{bmatrix} 0.3604 & 0.3564 & 0.2831 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6667 & 0.2222 & 0.1111 \\ 0.6897 & 0.1379 & 0.1724 \\ 0.8929 & 0.0179 & 0.0893 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.7389 & 0.1343 & 0.1268 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\quad \text{....(24)}
$$

となる。これにより視点間ストレス値は、調整前の0.0558（視点間ストレス度2.8%）から、0.0323（視点間ストレス度1.6%）に改善された。

固有ベクトル法は対称逆数でなければ実施できないので、ここでは表－6の値をもとに表－8のような逆数行列を作り、固有ベクトル値の計算を行う。

表－8　表－6から便宜的に作成した逆数行列

視点↓ ＼ 比較対象→	C1	C2	C3	固有ベクトル
C1	1	3.8730	7.7460	0.7290
C2	0.2582	1	0.4000	0.1101
C3	0.1291	2.5000	1	0.1609

固有ベクトル法（誤差モデル）で計算すると、評価対象の順位は $C1>C3>C2$ となっていた。いっぽう視点間ストレス法（合成モデル）による順位は $C1>C2>C3$ となる。この事例もまた、一対比較値を本来の評価値と見なすか、それとも誤差の現れと見なすかで、評価結果が異なりうることを示している。

表－8の場合、固有ベクトル法の視点間ストレス値は2.2086（視点間ストレス度110.4%）であり、最小視点間ストレス値0.0323（視点間ストレス度1.6%）

と比べものにならないほど大きくなっている。

また固有ベクトル値を合成するための視点の格付値g_1, g_2, g_3は、

$$
\begin{aligned}
G' &= \begin{bmatrix} g'_1 & g'_2 & g'_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.7290 \\ 0.1101 \\ 0.1609 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0.6667 & 0.2222 & 0.1111 \\ 0.6897 & 0.1379 & 0.1724 \\ 0.8929 & 0.0179 & 0.0893 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -0.0652 & 0.8790 & 0.1862 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\quad \text{....(25)}
$$

となり、視点C1を排斥する格付けとなっている。この結果は、視点間ストレス値を最小にする格付け値の$0 < g_i < 1$、すなわち視点間の配分イメージと大きくかけ離れている。また視点C2については、極端に高く格付けしている。このような配分が固有ベクトル法の視点間ストレス値を大きくさせた原因であることは明らかである。だがこの結果を解釈するためのデータは評価行列のどこに求めたらよいというのだろうか。

この事例ではC1への評価がもともと高かったため、誤差モデルを使ってもC1が1位となり、意思決定の大勢には影響がないかもしれないが、評価方法に隠された問題を内蔵している。

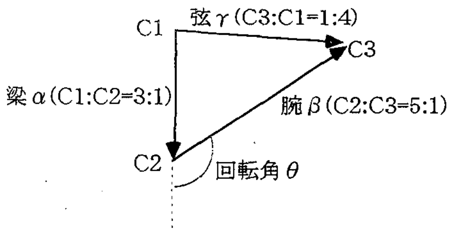
5. 整合度指標としての視点間ストレス値

視点間ストレス法においては、視点間ストレス値そのものが整合度の指標となる。本節では、これと固有ベクトル法におけるC.I.との関係について述べる。

一対比較行列における整合度には、入力値である一対比較行列のそれぞれのペアの結合がきれいな推移関係を形成できるかどうかを評価できる指標としての機能が期待される。C.I.は(2)式で示す理想状態（完全な推移関係）が結果的に固有ベクトルの関係になることに着目して作られている。一方、視点間ストレス法は、必ずしもそれを理想としているわけではないが、完全な推移関係が成立すると(14)の各行の正規化された値がすべて一致し、視点間ストレス値は（従って視点間ストレス度も）0になる。

C.I. と視点間ストレス値はモデルも計算方法も異なる指標だが、完全な推移関係が成立するときに0となり、この状態から遠ざかるとともに値が大きくなる点で共通する。

ここでは(3,3)行列を例に取り上げて、一対比較値の変化と、C.I. および視点間ストレス（S , S.I.）との関係を検討する。



図－4　ストレス三角形の例

一対比較値の状態は、ストレス三角形の形態変化で類別することにする[16]。ストレス三角形は、評価対象C1,C2,C3の一対比較を有向グラフの三角形で表したものである。三角形の三辺の長さ[α], [β], [γ]は次のように定義する。

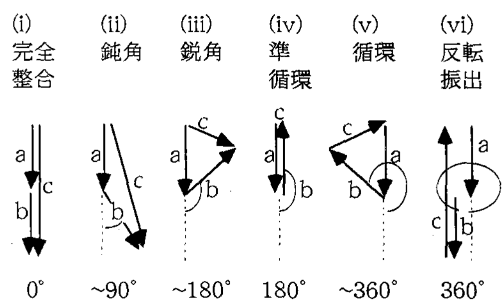
α：C1のC2に対する重み、　[α]=log α

β：C2のC3に対する重み、　[β]=log β

γ：C3のC1に対する重み、　[γ]=log γ

ただし、α, βはα≧βかつβ≧γとなるように選ぶ。αを梁、βを腕、γを弦と呼ぶ。また、梁αの延長線に対する腕βの回転角を∠C1C2C3の外角θで表す（図－4）。

すると、一対比較値の状態は、図－5のようなストレス三角形の回転角フェーズを持つことが分かる。

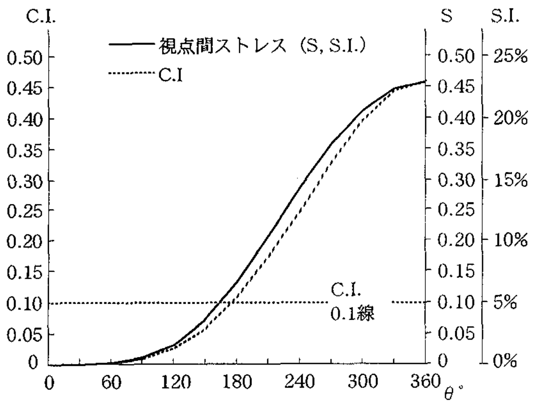


図－5　ストレス三角形の回転角フェーズ

ここでは$\alpha = \beta = 2$の場合を取り上げる。結果は表－9および図－6の通りである。腕βの回転角の増大とともに、C.I.の変化は一対比較値の推移関係からのずれの増大を、また視点間ストレスの変化は視点間の評価データのギャップの増大を示している。両指標は異なる観点から定義されているものの、変化のパターンはともによく似ている。

表－9　α＝β＝2の場合のC.I.と視点間ストレス

回転角θ	弦γ	C.I.	視点間ストレス	
			S	S.I.
0	4.0000	0.0000	0.0000	0.0000
30	3.8155	0.0001	0.0001	0.0001
60	3.3220	0.0019	0.0022	0.0011
90	2.6650	0.0092	0.0110	0.0055
120	2.0000	0.0268	0.0329	0.0165
150	1.4320	0.0592	0.0731	0.0366
180	1.0000	0.1087	0.1329	0.0665
210	0.6980	0.1742	0.2072	0.1036
240	0.5000	0.2500	0.2857	0.1429
270	0.3752	0.3276	0.3573	0.1787
300	0.3010	0.3954	0.4124	0.2062
330	0.2621	0.4448	0.4465	0.2233
360	0.2500	0.4584	0.4579	0.2290



図－6　C.I.と視点間ストレス(S , S.I.)

次に、対称逆数でない一対比較行列に対し便宜的に逆数行列を作成して固有ベクトル法を適用する方法が、C.I.の計算に悪影響を与える点について簡単に触れる。

視点に影響されやすい評価者の中には、視点交換に対し $(a_{ij}>1)\cap(a_{ji}>1)$ などのように対称成分に関する評価の一部が安定的に拮抗する者がいる。筆者の実験でも５名がそのような反応を示したが、一件矛盾するこのようなファジーな反応こそ評価者本来の評価状況であると考えられる。整合度の指標にはこうした状況を検出する機能が求められるが、対称拮抗のデータの場合は、対称成分の値が相殺され、C.I.が小さく出てしまうことがある（上記５名のC.I.も、相殺の結果、0.1以下になった）。

表－10は、視点交換によるC1とC2の評価の対称拮抗を示している。ここには評価者のさまざまな感性が

表－10　対称拮抗の評価を示す一対比較行列

視点↓　比較対象→	C1	C2	C3
C1	1	2	7
C2	1.5	1	4
C3	0.1	0.7	1

表－11　C.I.が小さく出た便宜的な逆数行列

視点↓　比較対象→	C1	C2	C3	固有ベクトル
C1	1	1.1547	8.3666	0.5645
C2	0.8660	1	2.3905	0.3378
C3	0.1195	0.4183	1	0.0976

C.I. = 0.0691
視点間ストレス値（調整前）= 0.1894
視点間ストレス度 S.I.（調整前）= 9.5%

投影されているものと思われる。

表－11は、ここから作成した逆数行列であるが、表－10の対称拮抗にもかかわらずC.I.が小さい。これに対し、視点間ストレスは拮抗の存在を示す値となっている。先のC.I.と視点間ストレス値との対応関係から判断すれば、おそらく逆数行列の作成により、本来のC.I.値の３分の２ほどが相殺されてしまったものと推定される。視点間ストレスの場合は、このような相殺は発生しない。

6. 視点間ストレス法の適用可能性

評価者は、必ずしも評価対象の実寸通りに反応しているわけではないが、評価者なりのまとまったイメージで評価を行っている。ある対象についてはきれいな推移関係で評価し、別の対象については矛盾を受容しながら評価している。そのような評価者像と、一対比較値を何らかの誤差と捉える固有ベクトル法（誤差モデル）との間には、擦り合わないギャップがある。

対象の見え方は、実際の値とは別の認知的事実である。視点間ストレス法（合成モデル）では「その時どう見えたか」という事実関係を重視する。ここではC.I.や対称逆数ルールなどによるデータの統制は行なわない。評価品質の確認は、フィードバックされた合成評価値を見て評価者自身が行う。その結果、評価者の意見が変わることはむしろ歓迎される。

一対比較行列の整合性が高い場合は、固有ベクトル法も視点間ストレス法も似たような結果を示すが、そ

れは完全な推移関係が成立するときに互いのモデルが一致するためである。

一対比較行列の整合性が悪くなると、どちらのモデルの立場をとるかで適用結果が異なってくる。一対比較行列の整合性の悪さが評価者の誤差に起因するという仮説が持てれば固有ベクトル法を実施しても良いが、そうでない場合は一対比較値を本来の評価値と捉える視点間ストレス法を適用すべきである。

C.I.と視点間ストレスは、似たようなパターンの整合度の値を返すが、C.I.は逆数行列でなければ計算できない。これに対し、視点間ストレスには逆数行列以外の行列にも適用できる柔軟性がある。

ただし視点間ストレス値（または視点間ストレス度）は、本来の評価値である一対比較値が視点間でどのように異なるか。またそれを踏まえて視点間の調整と評価の合成をどのように行うか、を勘案するためのコントロール・データとしてのみ活用する。

視点間ストレスが大きい場合は、評価のバグによるものでない限り、我々が以前に指摘した[17]ように、そこには何らかの評価者固有の価値構造が潜んでいる可能性がある。意思決定をより有益にするためには、合成評価値を求める前に、ひとまずそれらの構造の分析を行う必要があろう。このことは評価者の自己発見にも貢献する。

また視点間ストレス法では、一対比較値の間に完全な推移関係が成立する場合でも、必ずしも一対比較値が実際の値と一致するわけでないという立場をとる。意思決定の源泉は、評価者が評価対象を捉えるときの実在感そのものにある。視点間ストレス法は、そこを出発点として、取得された一対比較値の視点間のずれを最小化する合成評価値の提示までを任務としている。一対比較値から実際の値を求める技術の確立は、これとは別に取り組むべきさらに大きな研究課題である。

なお、対称成分が逆数でない場合に対しては、従来型のAHPでは、バックレィ（Buckley）のファジィAHP[18]のように、一対比較値のファジィ拡張などで対応してきた。これは誤差モデルの素直な延長であるともいえる。しかしこの方法だと区間値や帰属度を入力する必要が発生し、評価者の負荷が増大することによって評価品質が低下するおそれがある。評価のあいまいさの多くが視点間の不一致や対称逆数の破れなどに現れると考えれば、これらのあいまいさは視点間ストレス法で十分吸収できるものと考える。

7. おわりに

本論文では、これまでAHPで適用されてきた固有ベクトル法の問題点（一対比較値を本来の評価値からの誤差と捉える誤差モデル）を指摘するとともに、これを克服する視点間ストレス法（一対比較値を本来の評価値と捉える合成モデル）を提案した。

また、固有ベクトル法では、評価者なりの価値観による循環関係や対称拮抗にうまく対処できないが、このような事態を想定したモデルをもつ視点間ストレス法ではこの問題に対処できることを示した。

視点間ストレス法は、集団意思決定ストレス法と理論的に同じ構造をもっているので、この２つを結合した意思決定支援システムが構築できる可能性がある。これは今後の課題である。

参考文献

1) T. L. Saaty : *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, 1980.

2) T. L. Saaty : op.cit.

3) 高橋磐郎：ＡＨＰからＡＮＰへの諸問題II, オペレーションズ・リサーチ, Vol.43, No.2, 1998.2

4) 高橋：前掲論文

5) P. Nijkamp and A. Van Delft : *Multi-Criteria Analysis and Regional Decision-Making*, Martinus Nijhoff Social Science Division＝金沢哲雄・藤岡明房訳：多基準分析と地域的意思決定, 勁草出版サービスセンター, 1989

6) 尾崎都司正・木下栄蔵・原敬：AHPとロジットモデルとの関係, 土木計画学研究・論文集, No.14, 1997, pp.157-166

7) 印東太郎：製品設計におけるモチベーション・リサーチ, 調査と技術, 102号, 1961

8) H. Scheffe : ‘An Analysis of Variance for Paired Comparison’, *Journal of American Statistics Association*, No.47, 1952

9) 吉田正昭：価値の心理学的研究, 東京大学出版会, 1970

10) 佐伯胖：イメージ化による知識と学習, 東洋館, 1982

11) 中西昌武・木下栄蔵：階層分析法ＡＨＰにおける意思決定ストレスのモデル化に関する研究, 土木計画学研究・論文集, No.13, 1996, pp.153-160

12) 中西昌武・木下栄蔵：集団意思決定ストレス・シナリオのＡＨＰへの適用, 土木計画学研究・講演集, No.19, 1997

13) 中西昌武・木下栄蔵：集団意思決定ストレスの集団ＡＨＰへの適用，（*Journal of Operations Research Society of Japan* Vol.41, No.4に掲載予定）

14) I. Takahashi : 'AHP Applied to Binary and Ternary comparison', *Journal of Operations Research Society of Japan*, Vol.33, No.3, 1990, pp.199-206

15) 水野欽司：データの性質と分析の要件，東洋編：データ解析Ｉ，東京大学出版会所収，1975, pp.37-39

16) 中西昌武・木下栄蔵：前掲論文，1996

17) 中西昌武・木下栄蔵：前掲論文，1996

18) J. J. Buckley : 'Fuzzy Hierarchical Analysis', *Fuzzy Sets and Systems*, 17, 1985, pp.233-247

「視点間ストレス法」によるＡＨＰの提案

中西昌武・木下栄蔵

論文要旨

本論文では、AHP (Analytic Hierarchy Process)における評価要素の新たな重みづけ手法「視点間ストレス法」を提案する。この手法は評価視点によって異なる評価値同士を、視点間のストレスが最も小さくなるよう合成する。

従来の固有ベクトル法では一対比較行列における循環関係や対称成分の拮抗に有効に対処できないが、視点間ストレス法ではこの問題に対処できる。

また視点間ストレス値は、視点間ストレス法における整合度指標として有効である。

A Proposal of the AHP by the 'Inter-Viewpont Stress Method'

by Masatake NAKANISHI and Eizo KINOSHITA

ABSTRACT:

This paper proposes an 'inter-viewpoint stress method', a new method of weighing evaluation items for the AHP -- Analytic Hierarchy Process. By this method, various evaluation values by evaluation viewpoint are synthesized with the minimum inter-viewpoint stress.

The circulation relations or the conflicts between symmetric elements in the pairwise comparison matrix could not be effectively processed by the conventional eigenvector method. The new method, on the contrary, is able to solve these problems.

Value of the inter-viewpoint stress is effective as a consistency index for the inter-viewpoint stress method.
