【土木計画学研究・論文集 No.15 1998年9月】

貯水池システムの統合操作ルール設計のための分権的アルゴリズムの開発*

A Distributed Algorithm for Designing the Optimal Integrated Operation Rule of a Multi-Reservoir System *

多々納裕一**

by Hirokazu TATANO**

1. はじめに

ダム貯水池は安定的に水の利用を可能とする施設の代表であろう。しかし近年の環境保全の意識の高まりや適した立地の減少などの理由により大規模なダム貯水池の開発は行いにくい状況となってきている。けれども社会生活の向上と共に、より信頼性の高い水の供給が望まれているのが現状である。従って既存のダム貯水池群のより高度なコントロールが必要となっている。

貯水池操作ルールの最適化手法に関してはこれまでに多くの研究が蓄積されてきている。その中でも確率ダイナミックプログラミングは、少数の貯水池を有する流域の貯水池群の統合的操作ルールを検討する上で最も有用な手法のひとつであった[1)2)]。しかしながら貯水池数の増加に伴って問題のサイズが指数的に増加する「次元の呪い」のため統合操作ルールの実現は困難であった。これまでに、次元の呪いを克服するための研究が数多くなされてきたが、それらは近似解を導出するか[3)-5)]、極めて限定的な状況での厳密解法を与えている[6)]に過ぎない。

本研究では、各々の貯水池の状態の推移確率がその貯水池や直上流の貯水池群からの放流量には影響されるが，他の貯水池の状態には依存しない場合を対象として多数の利水を目的とした貯水池からなるシステムの統合操作ルールを厳密に求める方法を提案していく。これは，各々の貯水池への流入量がそれぞれマルコフ連鎖（高次のマルコフ連鎖でも良い）を成し，かつ，当該期の流入量は空間的な相関を有している場合を包括するような想定である．具体的には、まず貯水池群の統合操作ルールの設計問題がマルコフ決定過程となることを示し、平均期待損失最小化問題として操作ルール設計問題を定式化する。この問題はやはり、次元の呪いのために多くの貯水池を有するシステムには適用できない。本研究では、状態の推移確率が整合的であり予測が完全に整合的であるように調整を図りながら、各貯水池が他の貯水池からの放流量に関して主観的な予測を行い、それをもとに放流量を決定するという個別に最適化する手続きを繰り返せば漸近的に原問題の最適ルールが得られるような新しい方法を提示していく。

2. 貯水池群の統合操作ルール設計問題の定式化

(1) 流域モデルの定式化

本研究では、m 個の貯水池を有するシステムを想定する。貯水池はそれぞれ河道によって連結されているものとする。一般性を失うことなく，各貯水池にはその貯水池へ連結する貯水池からの放流量と、その貯水池へ直接流入する河川または残留域からの流入があるものとする.

通常の確率DP等を用いた貯水池操作ルールの最適化モデルと同様に，時間を離散時間とし，状態及び決定を有限離散変数とする．離散時間を想定してモデルを構成することの目的は，できるだけ解かれるべき問題を単純化し，計算に要する労力を削減することと,各々の現象に対して適切な時間スケールを選択することにある.本研究では，利水用の貯水池操作を想定している．利水を目的とする場合，数時間とか数日といった短い時間スケールは本質的でない．このため，概ね5日～30日程度の単位時間を想定することが多い.

状態空間を有限離散空間と仮定することの一つ目の意義は，状態空間を有限とすることで最適な操作ルールの存在を保証することができることにある.（例えば，連続な状態空間上では必ずしも確率DPの解が存在しない[8)].）また,二つ目の意義は，操作ルールを陽的な形で導出することにある．もちろん，時間軸・状態空間をともに連続として扱っても，問題の定式化は行える．しかしながら，このような想定の下で操作ルールを陽的に解として求めることができるのは，特殊な場合に限られる．操作ルール

*キーワーズ：計画基礎論，計画手法論，水資源計画
**博(工)、京都大学防災研究所総合防災研究部門
(宇治市五ケ庄、TEL 0774-38-4308, FAX 0774-38-4044)

の設計を行うためには，モデルの解としてルールが陽的に求まることが必要であるから，本研究ではこのような想定をおくこととする．

いま、各貯水池は添え字 i によって区別されるものとしよう。システム内の貯水池の集合を $\mathcal{I}=\{i|i=1,\cdots,m\}$ で定義する。さらに、貯水池 $i\in\mathcal{I}$ に直接河道で接続する貯水池の集合を $\mathcal{I}^i\subseteq\mathcal{I}$ で定義し、その第 j 要素を $k^i(j)$ で与えよう。すなわち、$\mathcal{I}^i=\{k^i(j)|j=1,\cdots,m^i\}$。第 n 期の貯水池 $i\in\mathcal{I}$ への他の貯水池からの放流の影響を受けない河川や残留域からの流入量を I_n^i、第 n 期期首の貯水池 i の貯水量を S_n^i、第 n 期における貯水池 i からの放流量を R_n^i とおく。これらは、いずれも以下のような有界な離散変数であるとする。

$S_n^i=0,1,\cdots,v^i\quad(i\in\mathcal{I})$

$R_n^i=0,1,\cdots,\bar{r}^i\quad(i\in\mathcal{I})$

$I_n^i=0,1,\cdots,\bar{i}^i\quad(i\in\mathcal{I})$

さらに，システム内の貯水池からの当該期の放流量を所与とした場合に，貯水池システムの状態が完全エルゴード的[7]マルコフ連鎖を成すものとし，加えて，各々の貯水池の状態の推移確率がその貯水池や直上流の貯水池群からの放流量には影響されるが，他の貯水池の状態には依存しないものと仮定する．

状態の推移に関するマルコフ性の仮定から，$n+1$ の貯水池システムの状態 X_{n+1} は，n 期の貯水池システムの状態 X_n と各貯水池からの放流量 R_n のみに依存し，過去の状態や放流量には依存しない．いま，n 期の貯水池システムの状態 X_n が $x\in X$ である場合に，各貯水池からの放流量 $R_n=r$ の下で,第 $n+1$ 期に 状態 X_{n+1} が y に推移する確率を $P(y|x,r)$ と表記しよう．このとき,各々の貯水池の状態の推移確率がその貯水池や直上流の貯水池群からの放流量には影響されるが他の貯水池の状態には依存しないという仮定は次式が成り立つことと等価である．

$$P^i(\tilde{y}^i|x^i,b^i(r),r^i)=\sum_{y\in X|_{\tilde{y}^i}}P(y|x,r) \tag{1}$$

ここで，$P^i(\tilde{y}^i|x^i,b^i(r),r^i)$: 直接接続する上流の貯水池群からの放流量が $b^i(r)$ で与えられる時の貯水池 i の状態の推移確率，$X|_{\tilde{y}^i}=\{x\in X|x^i=\tilde{y}^i\}$である．式 (1) の仮定は，本研究で提案するアルゴリズムが適用可能な状況を規定する最も重要な仮定である．

この仮定が意味する内容を具体的に把握するために，この仮定が満たされる状況を記述してみよう．比較的一般的な十分条件は，各々の貯水池への流入量 $(I_n^1,\cdots,I_n^m)$ が それぞれマルコフ連鎖を成し，当該期の流入量に関して空間的な相関を有している場合である．すなわち，

$$I_n^i=f^i(I_{n-1}^i,\cdots,I_{n-l}^i)+\varepsilon_n^i,(\forall i\in\mathcal{I}) \tag{2}$$

ここで，$\varepsilon_n=(\varepsilon_n^1,\cdots,\varepsilon_n^m)'$ は同時分布$\phi(\varepsilon_n)$に従う m 次元確率変数であり，一般には互いに相関を有している，すなわち，$\mathrm{Cov}[\varepsilon_n^i,\varepsilon_n^j]\ (j\neq i)$ であって良い．しかしながら，当該期におけるある貯水池への流入量の生起確率は，1期あるいは数期前の他の貯水池への流入量には直接影響を受けることがないとの想定である．このような想定が現実性は厳密には実データを用いて検証される必要があるが，計算単位時間が比較的長い場合には概ね適用可能であろうと考えられる．また，確率DPを用いた研究の多くが同種の想定をしていることからも，この仮定の現実性は少なくとも間接的には担保されているものと考える．

式 (2) が成り立つ場合を想定して，式 (1) の仮定が実際に成り立つことを示そう．いま，$\theta(z_n|z_{n-1},\cdots,z_{n-l})=\Pr\{I_n=z_n|I_{n-1}=z_{n-1},\cdots,I_{n-l}=z_{n-l}\}$ として，

$\theta(z_n|z_{n-1},\cdots,z_{n-l})=\phi(z_n-f(z_{n-1},\cdots,z_{n-l}))$

となる.このとき，一般性を失わず簡単化のために貯水池間の距離が十分に短く計算単位時間内に直下流の貯水池に流達するものとする．連続条件から、任意の貯水池 $i\in\mathcal{I}$ において、

$$S_{n+1}^i=S_n^i+I_n^i+\sum_{j=1}^{m^i}R_n^{k^i(j)}-R_n^i$$

が常に成り立つから，状態変数（ $m\times l$ ベクトル）を $X_n=(S_n,I_n,\cdots,I_{n-l+1})'$とおけば，状態変数$X_n$は マルコフ連鎖をなし，式 (1) の仮定をも満たす．状態推移確率 $P(y|x,r)$ は次式で与えられる．

$$P(y|x,r)=\begin{cases}\theta(z_{n+1}|z_n,\cdots,z_{n-l+1}) \\ \qquad(\text{for }\forall i\in\mathcal{I},\delta^i(x^i,y^i)=1,s_{n+1}^i<v^i) \\ \sum^{(1:\mathcal{K})}\cdots\sum^{(m:\mathcal{K})}\theta(z^1,\cdots,z^m) \\ \qquad(\text{for}\forall i,\delta^i(x^i,y^i)=;\ \exists i,\ s_{n+1}^i=v^i) \\ 0\quad(\text{otherwise.})\end{cases} \tag{3}$$

ここで，

$$\delta^i(x^i,y^i)=\begin{cases}1 & (s_{n+1}^i=s_n^i+z_n^i-r_n^i+\sum_{j\in\mathcal{I}^i}r_n^j), \\ 0 & (\text{otherwise}),\end{cases}$$

であり,$\mathcal{K}=\{i\in\mathcal{I}|s_{n+1}^i=v^i\}$．さらに，$\sum^{(i:\mathcal{K})}$ は次式で定義される部分和を与えるオペレータである．

$$\sum{}^{(i:\mathcal{K})}f(z)=\begin{cases}\sum_{w^i=z^i}^{\bar{i}^i}f(z^1,\cdot,w^i,\cdot,z^m) & (i\in\mathcal{K}) \\ f(z)\quad(i\notin\mathcal{K})\end{cases}$$

この時，貯水池 i の状態推移確率 $P^i(y^i|x^i,b^i(r),r^i)$ は

$$P^i(y^i|x^i,b^i(r),r^i)=\begin{cases}\theta^i(z_{n+1}^i|z_n,\cdots,z_{n-l+1}) \\ \qquad(\delta^i(x^i,y^i)=1,s_{n+1}^i<v^i) \\ \sum^{(i:\mathcal{K})}\theta^i(z_{n+1}^i|z_n,\cdots,z_{n-l+1}) \\ \qquad(\delta^i(x^i,y^i)=1,s_{n+1}^i=v^i) \\ 0\quad(\text{otherwise.})\end{cases} \tag{4}$$

で与えられ，実際に式(1) が満たされることを確認できる．ここで，Z：流入量ベクトルI_nの定義域であり，

$$\theta^i(z^i_{n+1}|z_n,\cdots,z_{n-l+1}) = \sum_{z_{n+1}\in Z|_{z^i_{n+1}}} \theta(z_{n+1}|z_n,\cdots,z_{n-l+1}).$$

さらに，一般性を失うことなく，貯水池 i の直下流に存在する評価地点では、取水がなされ、水利用が行われるが、単位計算期間内に取水量と同量の水量が還流されるものとする。取水量はその地点の流量（すなわち、貯水池 i からの放流量 R^i_n ）に依存すると考えられるが、十分な水量が貯水池から放流されない場合には水不足に伴う社会経済的損失が生じる。そこで、貯水池 i 直下流の評価地点における社会経済的損失を貯水池からの放流量の関数$l^i(R^i_n)$ として表現するものとする。

本研究では、流域内に存在する貯水池群は統括管理されており、無限期間内に流域全体で発生する期待損失の平均値（１期あたりの期待損失の和）を最小化するような操作ルールを設計することが目的として設定されているものとする。以上のような設定のもとで、これらの貯水池群の統合操作ルールの設計ルールに関して考察しよう。

(2) 統合操作ルール設計問題の定式化

状態ベクトルが $X^i_n = x^i$,上流の貯水池群からの放流量が $b^i(r)$ で与えられるとき,貯水池 i の放流量 R^i_n の変域$\Omega^i(x^i,b^i(r))$ は、

$$\Omega^i(x^i,b^i(r)) = \{R^i_n|\underline{\mathrm{R}}^i(x^i,r)\le R^i_n \le S(x^i,b^i(r),r^i)\} \quad (5)$$

となる。ここで，$S(x^i,b^i(r),r^i) = s^i_n + z^i_n - r^i + \sum_{j\in\mathcal{I}^i} r^j$.,$\underline{\mathrm{R}}^i(x^i,r) = \max\{0, S(x^i,b^i(r),r^i) - v^i\}$ である．従って、状態ベクトル X_nの値 x が与えられた場合の統合操作 $r(x)$ は次の制約を受ける。

$$r(x)\in\Omega(x) = \{r=(r^1,\cdots,r^m)|r^i\in\Omega^i(x^i,b^i(r),r^i)\}$$

このとき、統合操作ルール設計問題はＭＤＰ理論を用いて、平均期待損失最小化問題として以下のように定式化できる。

$$V(x)+g = \min_{r\in\Omega(x)}\sum_{i\in\mathcal{I}} l^i(r^i) + \sum_{x\in X} V(y)P(y|x,r) \quad (6)$$

この問題には政策改良法等が適用可能であるが、貯水池の数 m が大きいと状態の組み合わせが指数的に増大するため現実にこの問題を解くことは不可能である。

いま、問題(6)の双対問題を求めよう。問題(6)の双対問題は以下の線形計画問題となる。

$$\text{(LP1)}\quad \min_{h(x,r)}\sum_{x\in X}\sum_{r\in\Omega(x)} l(r)h(x,r) \quad (7)$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{x\in X}\sum_{r\in\Omega(x)} P(y|x,r)h(x,r) = \sum_{r\in\Omega(z)} h(y,r) \quad (8)$$

$$\sum_{x\in X}\sum_{r\in\Omega(x)} h(x,r) = 1 \quad (9)$$

$$h(x,r)\ge 0, \quad (10)$$

ここで、$h(x,r)$ は、状態ベクトル X_n と放流量ベクトル R_n が実現値 (x,r) を同時にとる確率（同時生起確率）である。

さて、 $h^*(x,r)$ を上の線形計画問題の解とすると、最適操作ルールは混合戦略として与えられることになる。すなわち、状態ベクトルが実現値xをとった場合に放流量ベクトルrを選択する確率$\psi(r|x)$は次式で与えられる。

$$\psi(r|x) = h^*(x,r)/\sum_{r\in\Omega(x)} h^*(x,r). \quad (11)$$

ここでは、貯水池群の統合操作設計問題を動的計画問題あるいは線形計画問題として定式化した。しかしながら、これらの問題はシステムに含まれる貯水池の数が増大すると、変数の数が指数的に増大するという厄介な性質を持っている。この性質は「次元の呪い」として広く知られた現象である。以下では、この「次元の呪い」を克服するために、分権的アルゴリズムに関して考察しよう．

3. 貯水池群の統合操作ルール設計問題における分権的設計手法の提案

(1) 予測の導入

いま、第i番目の貯水池における決定変数に、貯水池群$\mathcal{I}^i$からの放流量ベクトルの主観的予測$\tilde{b}^i\in B^i$ を追加しよう。(ただし，$B^i = \times_{j\in\mathcal{I}^i}\mathcal{R}^i$、 $\mathcal{R}^i = \{0,1,\cdots,\bar{r}^i\}$ である。）すなわち、貯水池$i\in\mathcal{I}$での決定変数を２種類の決定変数$(\tilde{b}^i,r^i)\in B^i\times\mathcal{R}^i$で記述する。この時、貯水池$i$における予測 $\tilde{b}^i$ を所与とすれば、実行可能な放流量の集合$\Omega^i(x^i,\tilde{b}^i)$は式(5) で$b^i(r)$を$\tilde{b}^i$に置換することによって与えられる。

このとき、貯水池iにおける決定$(\tilde{b}^i,r^i)$の値域を貯水池iでの「可能決定空間」$\Gamma^i(x)$と呼び、次式で定義する。

$$\Gamma^i(x^i) = \{(\tilde{b}^i,r^i)\in B^i\times\mathcal{R}^i|\tilde{b}^i\in B^i, r^i\in\Omega^i(x^i,\tilde{b}^i)\} \quad (12)$$

ここで、注意すべきことは、個別の貯水池の可能決定空間は当該貯水池の状態量にのみ依存し、貯水池システムに含まれる他の貯水池の状態に依存しないという点である。すなわち、予測の導入によって個別の貯水池の可能決定空間は分離されるのである。

$B = \times_{i\in\mathcal{I}}B^i$として，システム全体での予測ベクトルを$\tilde{b}\in B$と定義し,貯水池システム全体の決定を$(\tilde{b},r)\in B\times\mathcal{R}$に拡張しよう。このとき、貯水池システム全体に関する予測$\tilde{b}\in B$を所与とすれば、システム全体での実行可能な放流量ベクトル$r\in R$の集合$\Omega(x,\tilde{b})$は、$\Omega(x,\tilde{b}) =$

$\times_{i\in\mathcal{I}}\Omega^i(x^i,\tilde{b}^i)$ で与えられる．この貯水池システムにおける決定 $(\tilde{b},r)$ の値域（「可能決定空間」$\Gamma(x)$）は以下の関係を満たす。

$$\Gamma(x)=\times_{i\in\mathcal{I}}\Gamma^i(x^i) \tag{13}$$

このことは、予測の導入によって、貯水池システム全体の可能決定空間が個別の貯水池の可能決定空間の直積として与えられることになることを示している。

さて、拡張された貯水池システムの決定 $(\tilde{b},r)\in B\times A$ を所与とすると、貯水池システム全体の状態の状態推移確率 $P(y|x,\tilde{b},r)$ は 同様に式(3) で $b^i(r)$ を $\tilde{b}^i$ に置換することによって与えられる。さらに，式 (1) より，i 番目の貯水池の状態の条件付き周辺分布は他の貯水池の状態と決定から独立である。従って、

$$P^i(\tilde{y}^i|x^i,\tilde{b}^i,r^i)=\sum_{y\in X|_{\tilde{y}^i}}P(y|x,\tilde{b},r). \tag{14}$$

さて、拡張された決定空間をもつ操作ルール設計問題を定式化することとする。この際、本来の問題 (LP1) と同値となる計画問題を得るためには、拡張された決定空間を本来のものと整合させる制約を付加しなければならない。

いま、現実に行われる放流量の決定と予測とが一致するとき、この予測をを'整合的予測'と呼ぶ。予測 $\tilde{b}\in B$ が整合的であるための条件は、各々の貯水池からの放流量が $r\in\mathcal{R}$ であるときに次式で与えられる。

$$\tilde{b}=b(r) \tag{15}$$

ここで、式 (15) は純粋戦略上での整合的予測の条件を与えている。線形計画型の計画問題 (LP1) では、戦略は混合戦略として定義されているので、(LP1) と同値となる計画問題を導くためには、式 (15) と同等の条件を混合戦略に対して定義する必要がある。いま、集合 $\overline{\Lambda}(x)$ を以下のように定義しよう。

$$\overline{\Lambda}(x)=\{(\tilde{b},r)\in\Gamma(x)|\tilde{b}\neq b(r)\} \tag{16}$$

このとき、混合戦略上での整合的予測の条件は

$$h(x,\tilde{b},r)=0,\qquad(\forall x\in X,\forall(r,\tilde{b})\in\overline{\Lambda}(x)), \tag{17}$$

で与えられる．ここで、$h(x,\tilde{b},r)$ は状態 x と決定 $(\tilde{b},r)$ の同時生起確率である。

いま、混合戦略（状態が x である時に、決定 $(\tilde{b},r)$ が選択される確率）を、$\psi(\tilde{b},r|x)$ を用いて表すと、同時生起確率 $h(x,\tilde{b},r)$ は以下のように分解される。

$$h(x,\tilde{b},r)=\psi(\tilde{b},r|x)\pi(x). \tag{18}$$

ただし、$\pi(x)$ は状態 x の定常生起確率である。

状態の推移過程は完全エルゴード的[7]であるから、それぞれの状態の定常生起確率 $\pi(x)$ は正の値[8]をとる。したがって、式 (17) は次式と等価である。

$$\psi(\tilde{b},r|x)=0,\ (\forall x\in X,\forall(r,\tilde{b})\in\overline{\Lambda}(x)). \tag{19}$$

この条件式 (19) は、他の貯水池からの放流量に関する予測が誤っているような決定が選択される確率はゼロでなければならないことを示している。言い換えれば、整合的な予測のみを含む決定が正の確率で選択されなければならないことを要請している。

ここで，注意すべきことはここで導入した予測はあくまでも問題を分解可能とするために導入した技巧的な決定変数であるということである．予測が導入されたからといって，現実の運用・操作に際して個別の貯水池でそれぞれ予測をすることを必要としているわけではない．最適な操作ルールが求まれば，そのルールは式 (15) の整合性条件を満たすから，予測の自由度はもはやなく，貯水池システムの状態に対して放流量ベクトルが決定されることになる．

以上の結果をもとにLP型の本来のMDP問題 (LP1) を新しいLP問題に置き換えよう。ここで、$h(x,\tilde{b},r)$ が非負であることから、方程式 (23) は多数の方程式 (17) の組と同等である。

定理 3.1 線形計画型の操作ルール設計問題 *(LP1)* は以下の問題と同値である。

(LP2)
$$\min_{h(x,\tilde{b},r)}\sum_{x\in X}\sum_{\tilde{b}\in B}\sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b})}l(r)h(x,\tilde{b},r) \tag{20}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{x\in X}\sum_{\tilde{b}\in B}\sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b})}P(y|x,\tilde{b},r)h(x,\tilde{b},r)$$
$$=\sum_{\tilde{b}\in B}\sum_{r\in\Omega(y,\tilde{b})}h(y,\tilde{b},r) \tag{21}$$
$$\sum_{x\in X}\sum_{\tilde{b}\in B}\sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b})}h(x,\tilde{b},r)=1 \tag{22}$$
$$\sum_{x\in X}\sum_{(\tilde{b},r)\in\overline{\Lambda}(x)}h(x,\tilde{b},r)=0 \tag{23}$$
$$h(x,\tilde{b},r)\geq 0. \tag{24}$$

証明 集合 $\Lambda(x)$ を次式で定義する。

$$\begin{aligned}\Lambda(\mathrm{x})&=\{(\tilde{b},r)\in\Gamma(x)|\tilde{b}=b(r)\}\\&=\{(b(r),r)\in B\times\mathcal{R}|r\in\Omega(x)\}\end{aligned}$$

この時、$\Lambda(x)\cup\overline{\Lambda}(x)=\Gamma(x)=B\times\Omega(x)$ かつ $\Lambda(x)\cap\overline{\Lambda}(x)=\phi$ である。従って、式 (17) により、

$$\sum_{\tilde{b}\in B}\sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b})}P(y|x,\tilde{b},r)h(x,\tilde{b},r)=\sum_{r\in\Omega(x)}P(y|x,b(r),r)h(x,b(r),r)$$
$$\sum_{\tilde{b}\in B}\sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b})}h(x,\tilde{b},r)=\sum_{r\in\Omega(x)}h(x,b(r),r).$$

したがって，問題 (LP2) は次の問題と等価である．

(LP3)
$$\min_{h(x,\tilde{b},r)}\sum_{x\in X}\sum_{r\in\Omega(x)}l(r)h(x,b(r),r)$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{x\in X}\sum_{r\in\Omega(x)}P(y|x,b(r),r)h(x,b(r),r)$$
$$=\sum_{r\in\Omega(y)}h(y,b(r),r)$$
$$\sum_{x\in X}\sum_{r\in\Omega(x)}h(x,b(r),r)=1$$

$$h(x,b(r),r) \geq 0$$

ここで、$P(y|x,r) \ = \ P(y|x,b(r),r)$ であることに留意し、操作変数を $h(x,r) = h(x,b(r),r)$ とおいて問題(LP3)を書き換えると、問題(LP3)は問題(LP1)に一致することが示される。逆に、問題(LP1)の $h(x,r)$、$P(y|x,r)$ をそれぞれ $h(x,b(r),r)$、$P(y|x,b(r),r)$ に置き換えると、問題(LP3)が得られる。さらに、同様な変形によって問題(LP3)と問題(LP2)が同値であることが示せる。 □

(2) 個別貯水池の確率的ダイナミクスの導入

他の貯水池からの放流量に関する予測を導入することによって、個別の貯水池の可能決定空間は当該貯水池の状態量のみに依存することが示された。しかしながら、問題(LP2)における確率ダイナミクスは依然としてすべての貯水池の状態および決定に依存しており、個別の貯水池における確率的なダイナミクスは直接的には取り扱われていない。この節では、まずはじめに、個々の貯水池の確率ダイナミクスを定式化する。次いで、これらを制約として追加してえられた操作ルール設計問題が原問題(LP1)と一致することを示す。

$h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)$ を i 番目の貯水池の決定 $(\tilde{b}^i,r^i)$ と状態 x^i の同時生起確率と定義する。この時、$h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)$ は貯水池システム全体での決定と状態の同時生起分布の周辺分布に他ならない。すなわち、

$$h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i) = \sum_{x\in X|_{x^i}} \sum_{b\in B|_{\tilde{b}^i}} \sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b})|_{r^i}} h(x,\tilde{b},r) \tag{25}$$

このとき、i 番目の貯水池の確率ダイナミクスは式(21)-(23)の両辺をそれぞれ $y\in X|_{y^i}$ に関してに関して集計することによって以下のように与えられる。

$$\sum_{x^i\in X^i} \sum_{\tilde{b}^i\in B^i} \sum_{r^i\in\Omega^i(x^i,\tilde{b}^i)} P^i(y^i|x^i,\tilde{b}^i,r^i)h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)$$

$$= \sum_{\tilde{b}^i\in B^i} \sum_{r^i\in\Omega^i(y^i,\tilde{b}^i)} h^i(y^i,\tilde{b}^i,r^i), \tag{26}$$

$$\sum_{x^i\in X^i} \sum_{\tilde{b}^i\in B^i} \sum_{r^i\in\Omega^i(y^i,\tilde{b}^i)} h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i) = 1 \tag{27}$$

$$h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i) \geq 0 \tag{28}$$

式(1)が成り立つことに注意すると，個別貯水池の確率ダイナミクス（式(26)、(27)、(28)）は、全体の貯水池の確率ダイナミクス（式(21)-(23)）が成立しているときには同時に成立する。さらに、損失関数に関する仮定から、以下の決定問題は問題(LP2)と同値であることが導かれる。

$$\text{(LP4)} \quad \min_{h(x,\tilde{b},r)} \sum_{i=1}^{m} \sum_{x^i\in X^i} \sum_{\tilde{b}^i\in B^i} \sum_{r^i\in\Omega^i(x^i,\tilde{b}^i)} l(r^i)h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{x^i\in X^i} \sum_{\tilde{b}^i\in B^i} \sum_{r^i\in\Omega^i(x^i,\tilde{b}^i)} P^i(y^i|x^i,\tilde{b}^i,r^i)h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)$$

$$= \sum_{\tilde{b}^i\in B^i} \sum_{r^i\in\Omega^i(y^i,\tilde{b}^i)} h^i(y^i,\tilde{b}^i,r^i) \tag{29}$$

$$\sum_{x^i\in X^i} \sum_{\tilde{b}^i\in B^i} \sum_{r^i\in\Omega^i(y^i,\tilde{b}^i)} h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i) = 1 \tag{30}$$

$$h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i) \geq 0 \tag{31}$$

$$h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)$$

$$= \sum_{x\in X|_{x^i}} \sum_{b\in B|_{\tilde{b}^i}} \sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b}^i)|_{r^i}} h(x,\tilde{b},r) \tag{32}$$

$$\sum_{x\in X} \sum_{\tilde{b}\in B} \sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b})} P(y|x,\tilde{b},r)h(x,\tilde{b},r)$$

$$= \sum_{\tilde{b}\in B} \sum_{r\in\Omega(y,\tilde{b})} h(y,\tilde{b},r) \tag{33}$$

$$\sum_{x\in X} \sum_{\tilde{b}\in B} \sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b})} h(x,\tilde{b},r) = 1, \tag{34}$$

$$\sum_{x\in X} \sum_{(\tilde{b},r)\in\overline{\Lambda}(x)} h(x,\tilde{b},r) = 0, \tag{35}$$

$$h(x,\tilde{b},r) \geq 0. \tag{36}$$

ここで、問題(LP4)は個別の貯水池の確率ダイナミクスに関する m 組の条件式（式(29)-(31)）、及び、貯水池システム全体の確率ダイナミクスに関する一組の条件式（式(33)-(36)）という独立な変数のみを有する制約式群とそれらを互いに関連付ける条件式群（式(32)）とから成り立っている．そこで、式(29)-(31)を個別ダイナミクス、式(33)-(36)を全体ダイナミクスと呼び、さらに、式(32)を調整条件と呼ことにしよう。先に指摘したように、個別ダイナミクスと全体ダイナミクスは $m+1$ 組の独立した制約となっている。このことは、LP4が対角ブロック構造を有する線形計画問題となっていることを示している。したがって，はDantig-Wolfの分解原理[9]が適用可能であるが、全体ダイナミクスを含む子問題は原問題を拡張した問題(LP2)と同等のサイズの問題となる。従って、LP4に直接Dantig-Wolfの分解原理を適用することは、何ら「次元の呪い」から逃れる術を提供しないことになる。

(3) 制約式集計化法の導入

制約式集計化法はErmolievら[10]により、大規模な制約を有する凸計画問題を解くために開発された手法である。この方法は、各々の制約式に重みをかけて集計化した制約を有する子問題を解き、集計化の重みと各子問題の解の重みを系統的に調整しながら、子問題の解の系列の線形結合を逐次的に算定することによって原問題の解を求めるアルゴリズムである。統合的貯水池操作ルール設計問題は、多くの場合、極めて大規模な線形計画問題になるが、制約式集計化法を用いて逐次的に原問題の解に収束する比較的小規模な問題の系列を生成することができる。

定理 3.2 Ermoliev, et. al.(1995)[10]

以下の凸計画問題（原問題）を考える。

$\min_{x\in X}\{f(x)|Mx=d\}$

$x\in R^n$、$f:R^n\to R$は微分可能凸関数、Aは$m\times n$行列、$d\in R^m$とXの組はコンパクトである。$\{\tau_k\}$を$\tau_k\in[0,1]$、$\lim_{k\to\infty}\tau_k=0,\sum_{k=0}^{\infty}\tau_k=\infty$、$x^0\in X$を満たすとすると、$x^{k+1}=(1-\tau_k)x^k+\tau_k u^k$によって生成される点列$\{x^0,x^1,\cdots\}$は原問題の解に収束する。ここで$u_k$は以下の問題の解である

$u^k=\arg\min_{u\in X}\{f(u)|<Mx^k-d,Mu-d>\leq 0.\}$

ただし、<> は内積を表わす。

前節において、問題(LP4)に分解原理を適用する可能性に関して考察した。その結果、理論的には分解原理の適用は可能ではあるが、「次元の呪い」から逃れることはできないことが明らかとなった。その原因は、問題(LP4)が全体システムの確率ダイナミクスというサイズの大きい制約を有するためであった。そこで、ここでは、全体システムの確率ダイナミクス（(33)-(36)）と、全体システムと部分システムのダイナミクスの関連関係を記述している調整条件（式(32)）に制約式集計化法を適用することにする。その計算アルゴリズムを以下に示す。

1. 実数$\tau_k\geq 0$（$\lim_{k\to\infty}\tau_k=0,\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k=\infty.$）を設定する。
2. 最初の解$z_0(x,\tilde{b},r)$、$z_0^i(x,\tilde{b},r)$ $(i\in\mathcal{I})$を置き、繰り返し計算に入る。

$z_{k+1}(x,\tilde{b},r)=(1-\tau_k)z_k(x,\tilde{b},r)+\tau_k h_k(x,\tilde{b},r)$

$z_{k+1}^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)=(1-\tau_k)z_k^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)+\tau_k h_k^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)$

ここで$h_k^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)$, $h_k(x,\tilde{b},r)$は以下の問題の解である.

$$\text{(MP1)}\quad \min\sum_{i=1}^{m}\sum_{x^i\in X^i}\sum_{\tilde{b}^i\in B^i}\sum_{r^i\in\Omega^i(x^i,\tilde{b}^i)} l^i(r^i)h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i) \tag{37}$$

s.t.

$$\sum_{x^i\in X^i}\sum_{\tilde{b}^i\in B^i}\sum_{r^i\in\Omega^i(y^i,\tilde{b}^i)} P^i(y^i|x^i,\tilde{b}^i,r^i)h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i) = \sum_{\tilde{b}^i\in B^i}\sum_{r^i\in\Omega^i(y^i,\tilde{b}^i)} h^i(y^i,\tilde{b}^i,r^i) \tag{38}$$

$$\sum_{x^i\in X^i}\sum_{\tilde{b}^i\in B^i}\sum_{r^i\in\Omega^i(y^i,\tilde{b}^i)} h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)=1 \tag{39}$$

$$h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)\geq 0 \tag{40}$$

$$\sum_{x^i\in X^i}\sum_{\tilde{b}^i\in B^i}\sum_{r^i\in\Omega^i(y^i,\tilde{b}^i)} u_k^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i) \leq\sum_{x\in X}\sum_{\tilde{b}\in B}\sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b})} u_k^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)h(x,\tilde{b},r) \tag{41}$$

$$\sum_{y\in X}\sum_{x\in X}\sum_{\tilde{b}\in B}\sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b})} w_k(y)P(y|x,\tilde{b},r)h(x,\tilde{b},r) \leq\sum_{\tilde{b}\in B}\sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b})} w_k(y)h(y,\tilde{b},r) \tag{42}$$

$$\sum_{x\in X}\sum_{(\tilde{b},r)\in\Lambda(x)} h(x,\tilde{b},r)=1 \tag{43}$$

$$h(x,\tilde{b},r)\geq 0 \tag{44}$$

ただし、

$$\begin{aligned} u^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i) &= z_k^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i) - \sum_{x\in X|_{x^i}}\sum_{b\in B|_{\tilde{b}^i}}\sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b}^i)|_{r^i}} z_k(x,\tilde{b},r), \\ w_k(y) &= \sum_{x\in X}\sum_{\tilde{b}\in B}\sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b})} P(y|x,\tilde{b},r)z_k(x,\tilde{b},r) - \sum_{\tilde{b}\in B}\sum_{r\in\Omega(y,\tilde{b})} z_k(y,\tilde{b},r). \end{aligned}$$

(4) 分解原理の適用

a) 主問題

大規模な制約を集計化した問題(MP1)に対して、分解原理を適用する。問題(MP1)は、問題(LP4)と同様に独立した$m+1$組の制約条件と一組の調整条件を有している。しかしながら、問題(LP4)とは異なり、問題(MP1)では全体システムの確率ダイナミクスは集計化の結果、わずか2本の制約となっている。従って、問題(MP1)に分解原理を適用し、調整された分権的アルゴリズムを形成することは有効であろう。

いま、$\mathcal{H}^i$及び$\mathcal{H}$を以下のように定義しよう.

$\mathcal{H}^i=\{h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)|h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)$ は式(38)-(40)を満たす$\}$

$\mathcal{H}=\{h(x,\tilde{b},r)|h(x,\tilde{b},r)$ は式(42)-(44)を満たす$\}$.

これらの定義より、$\mathcal{H}^i$及び$\mathcal{H}$は、凸多面体を形成することがわかる。多面体$\mathcal{H}^i$及び$\mathcal{H}$の端点の数をN^i及びNとおき、それらの第j番目の端点をそれぞれ$h_j^i\in\mathcal{H}^i$及び$h_j\in\mathcal{H}$で表わす。この時、$\forall h^i\in\mathcal{H}^i$または$\forall h\in\mathcal{H}$は、以下のように端点の線形結合によって表現できる。

$$h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)=\sum_{j=1}^{N^i}\alpha_j^i h_j^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i), \tag{45}$$

$$h(x,\tilde{b},r)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j h_j(x,\tilde{b},r), \tag{46}$$

ここで$\sum_{j=1}^{N^i}\alpha_j^i=1,\ \alpha_j^i\geq 0,\ \sum_{j=1}^{N}\alpha_j=1,\ \alpha_j\geq 0$であり、これらを問題(MP1)に代入して主問題(MP2)を得る。

$$\text{(MP2)}\quad \min\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n^i} f_j^i\alpha_j^i \tag{47}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{N}\alpha_j=1, \tag{48}$$

$$\sum_{j=1}^{N^i}\alpha_j^i=1 \tag{49}$$

$$\sum_{j=1}^{N^i}t_j^i\alpha_j^i-\sum_{j=1}^{N}T_j^i\alpha_j+\alpha^{m+i}\leq 0 \tag{50}$$

$$\alpha_j^i\geq 0\quad \alpha_j\geq 0 \tag{51}$$

ただし、 f_j^i, t_j^i, T_j^i は以下で与えられる。

$$f_j^i = \sum_{x^i\in X^i}\sum_{\tilde{b}^i\in B^i}\sum_{r^i\in\Omega^i(x^i,\tilde{b}^i)} l^i(r^i)h_j^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i) \tag{52}$$

$$t_j^i = \sum_{x^i\in X^i}\sum_{\tilde{b}^i\in B^i}\sum_{r^i\in\Omega^i(y^i,\tilde{b}^i)} u^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)h_j^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i) \tag{53}$$

$$T_j^i = \sum_{x\in X}\sum_{b\in B}\sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b})} u^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)h_j(x,\tilde{b},r) \tag{54}$$

この問題(MP2)に含まれる変数の数は極めて多い。加えて、変数の係数を事前にすべて列挙することは大変困難である。というのは、これらの係数を知るためには、$\mathcal{H}^i$及び$\mathcal{H}$の端点をすべて列挙しなければならないからである。そこで、以下の列の生成の手続きが必要となる。

b) 列の生成

問題(MP2)で実行可能基底解(Ξ)が見つかっているものとする。この基底解を所与とすると、主問題(MP2)の制約式（式(48)-(51)）に対応する双対変数が定まる。これらの双対変数をそれぞれμ、μ^i、λ^iとおくと、変数α_j、α_j^iに対応するシンプレクッス乗数はそれぞれ

$$\bar{f}_j = -\mu^i + \lambda^i T_j^i \tag{55}$$

$$\bar{f}_j^i = f_j^i - \mu^i - \lambda^i t_j^i \tag{56}$$

で与えられる。ここで、すべてのシンプレックス乗数が非負であれば、現在の基底解(Ξ)が問題(MP2)の最適解である。逆に、対応するシンプレックス乗数が負となる変数があれば、その変数を基底に加えることで目的関数値を改善することができる。

この判定を行うために、$\min_{j\in\{1,\cdots N\}}\bar{f}_j$、及び、$\min_{j\in\{1,\cdots N^i\}}\bar{f}_j^i$に着目しよう。そして、これらの$m+1$個の値のうち、負のものがあれば次の基底を構成する変数の候補に加えることにしよう。もちろん、これらがすべて正の値をとれば、その場合にはわれわれは最適解に達していることになる。

定義より、$\min_{j\in\{1,\cdots N\}}\bar{f}_j$ を見つける問題は

$$(\mathrm{SP[0]})\min\sum_{i=1}^{m}\sum_{x\in X}\sum_{\tilde{b}\in B}\sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b})}\lambda^i u^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)h(x,\tilde{b},r)-\mu$$

$$\mathrm{s.t.}\sum_{y\in X}\sum_{x\in X}\sum_{\tilde{b}\in B}\sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b})} w_k(y)P(y|x,\tilde{b},r)h(x,\tilde{b},r)$$

$$\le\sum_{\tilde{b}\in B}\sum_{r\in\Omega(x,\tilde{b})} w_k(y)h(y,\tilde{b},r),$$

$$\sum_{x\in X}\sum_{(\tilde{b},r)\in\Lambda(x)} h(x,\tilde{b},r)=1,$$

$$h(x,\tilde{b},r)\ge 0$$

と同値であり，同様に、$\min_{j\in\{1,\cdots N^i\}}\bar{f}_j^i$を求める問題も

$$(\mathrm{SP[i]})\min_{h^i}\{\sum_{x^i\in X^i}\sum_{\tilde{b}^i\in B^i}\sum_{r^i\in\Omega^i(x^i,\tilde{b}^i)}$$

$$(l^i(r^i)-\lambda^i u^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i))h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)-\mu^i\}$$

$$\mathrm{s.t.}\sum_{x^i\in X^i}\sum_{\tilde{b}^i\in B^i}\sum_{r^i\in\Omega^i(y^i,\tilde{b}^i)} P^i(y^i|x^i,\tilde{b}^i,r^i)h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)$$

$$=\sum_{\tilde{b}^i\in B^i}\sum_{r^i\in\Omega^i(y^i,\tilde{b}^i)} h^i(y^i,\tilde{b}^i,r^i)$$

$$\sum_{x^i\in X^i}\sum_{\tilde{b}^i\in B^i}\sum_{r^i\in\Omega^i(y^i,\tilde{b}^i)} h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)=1$$

$$h^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)\ge 0$$

と書ける．これらの問題を解いた結果定まった目的関数の値が負であれば、求まった解（端点）に対応する主問題の変数（α_{j^*}，もしくは$\alpha_{j^*}^i$）をもとに式(52)-(54)により、主問題(MP2)の係数を算定する。このようにして、複数の列を同時に生成することができる。

また、(SP[i])の双対をとると以下のようになる。

$$V^i(x^i)+g^i=\min_{(\tilde{b}^i,r^i)\in\Gamma^i(x^i)} l^i(r^i)-\lambda^i u^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)$$

$$+\sum_{y^i\in X^i}P^i(y^i|x^i,\tilde{b}^i,r^i)V^i(y^i) \tag{57}$$

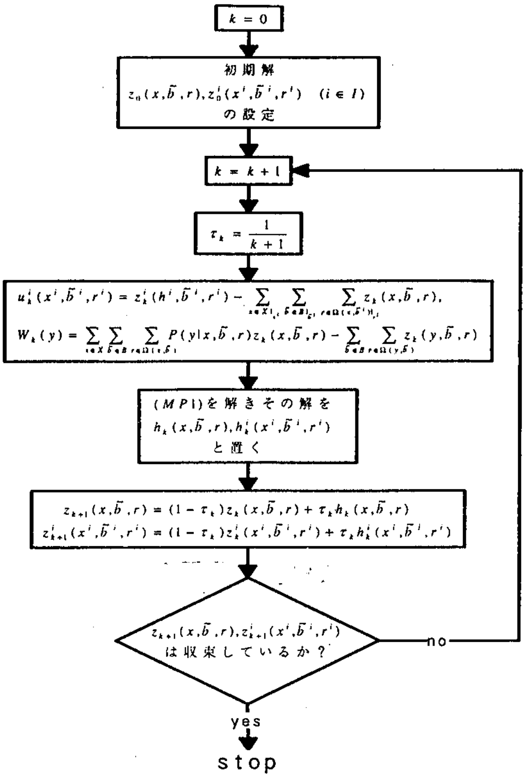
これは、損失関数が$l^i(r^i)-\lambda^i u^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)$と修正された場合の単一の貯水池$i$の操作ルール設計問題のMDPによる（ＤＰ型）の定式化と同値である。言い換えれば、問題(SP[i])は、個別の貯水池の管理主体が決定すべき問題となっていることがわかる。この問題では，予測の価値が$-\lambda^i u^i(x^i,\tilde{b}^i,r^i)$の項に表現されている．この項は，全体システムのダイナミクスと個別システムのダイナミクスの整合性を担保するための条件（式(25)，式(50)）に対して主プロセス及び主問題で定められ，個別の貯水池における予測が整合的となる誘因を与えている．

c) 限定主問題

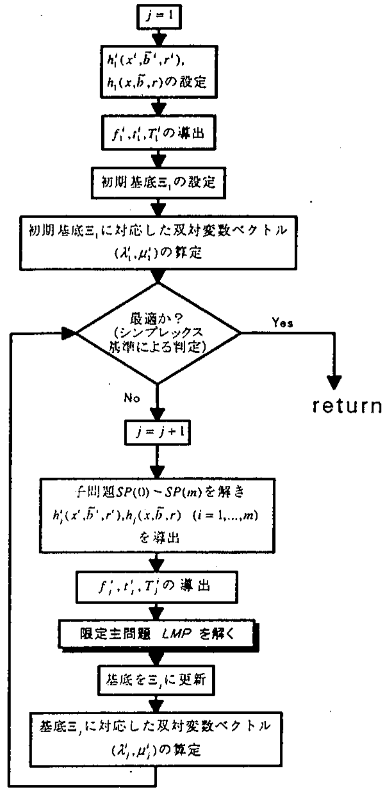
列の生成によって、新たに基底に加える候補となりうる複数の端点が選ばれた。この情報をもとに、主問題における基底の更新を行い、新しい基底に対応する双対変数を子問題(SP[0],SP[i]$_{i\in m}$)に代入し解を求めることで列の生成が行われ、更に新たな基底の候補を求めることができる。このためには、列の生成によって得られた新しい基底の候補を以前の基底と入れ替えることが必要である。このために、当初の基底と新たに生成された列のみからなる問題（限定主問題）を考えよう。

いま、主問題の基底解が$\Xi=(\alpha_{B_1},\cdots,\alpha_{B_{2m+1}})$で与えられているものとしよう。第$k$番目の基底$\alpha_{B_k}$の目的関数での係数及び制約条件の係数をそれぞれ$f_{B_k}$、$\delta_{B_k}$、$\delta_{B_k}^i$、$t_{B_k}$と書くこととする。子問題(SP[0],SP[i]$_{i\in m}$)から、生成された新たに生成された列の番号をそれぞれ$j(0)$,$j(i)$と書くことにすると、限定主問題は以下のように定式化される。

$$(\mathrm{LMP})\ \min\sum_{k=1}^{2m+1}f_{B_k}\alpha_{B_k}+\sum_{i=1}^{m}f_{j(i)}^i\alpha_{j(i)}^i \tag{58}$$



図－1　LP4に関する制約式集計化アルゴリズム



図－2　MP1の分権的解法

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^{2m+1} \delta_{B_k}\alpha_{B_k} + \alpha_{j(0)} = 1 \tag{59}$$

$$\sum_{k=1}^{2m+1} \delta_{B_k}^i \alpha_{B_k} + \alpha_{j(i)}^i = 1 \tag{60}$$

$$\sum_{k=1}^{2m+1} t_{B_k}\alpha_{B_k} + t_j^i \alpha_j^i(i) - T_j^i(0)\alpha_j(0) = 0 \tag{61}$$

$$\alpha_{B_k} \geq 0,\ \alpha_j(0) \geq 0,\ \alpha_j^i(i) \geq 0 \tag{62}$$

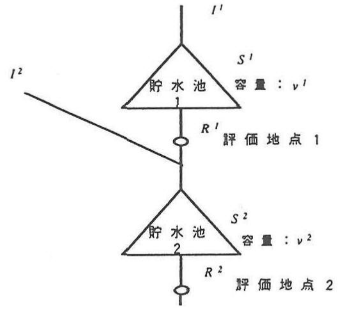
この問題を解き、新たな基底を見つけ、双対変数の値を子問題に受け渡せば、上述の手順で最終的に問題(MP1)の最適解に到達しうる計算プロセスが構成される。

(5) 統合操作ルール設計のための分権的手法の提案

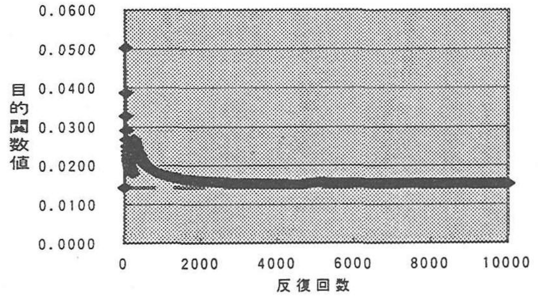
以上の考察に基づいて統合操作ルール設計問題を解くためのアルゴリズムを図－1および図－2にまとめる。本アルゴリズムは、これまで「次元の呪い」により実現が困難であった貯水池群の統合操作ルール設計問題の厳密解の導出に対し「予測の導入」、「確率的ダイナミクス制約の付加」、「制約式集計化法の導入」、「分解原理の適用」を行うことで問題を逐次的な計算過程に置き換え、厳密解の導出を可能にした。このことで，各々の子問題は高々単一貯水池の状態の次元を持つDPとして定式化できている．従って，各々の子問題を解くことは原問題に比して容易であり，かつ，貯水池の数が増加しても子問題の数が増え，親問題のサイズが加法的に増加するのみであり，もはや指数的な問題サイズの増加は生じない．反面、本アルゴリズムには当節で解説したように多くの反復、収束計算のルーチンを含んでいる。このために，計算効率は多少犠牲になる可能性がある．しかし本アルゴリズムをプログラムとして計算機上で実行する際、これらの計算過程により不都合が生じることは少ないだろう。

4. 数値計算事例

ここでは、実際に数値計算事例を示し本アルゴリズムの特性を解説する．特色を明確化するために，図－3に示すような河道によって直列に連結された2貯水池i ($i = 1, 2$)・2評価地点を有する流域を想定し、これら2貯水池の統合的操作ルールを設計する場合を考える。また、貯水池1、貯水池2へ直接流入する河川又は残留域からの流入は、空間的には従属関係にあるが時間的には独立かつ同一



図－3　流域モデル



図－4　目的関数値の変化（初期操作ルール１）

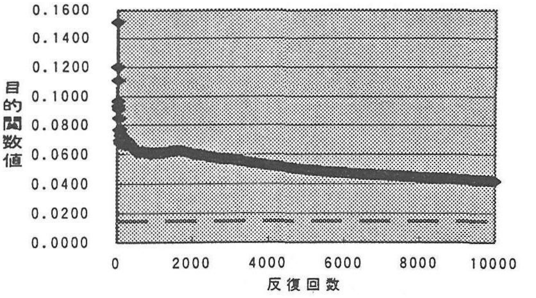
であり、各貯水池への流入量は離散的に与えられ、対応する確率 $\theta^i(z^i)$ は表－１の式で与えられる。もちろん，このとき仮定 (1) は満される．

表－1　流入量の生起確率

z	0	1	2
$\theta^1(z)$	0.10	0.30	0.60
$\theta^2(z)$	0.20	0.50	0.30

各貯水池 $i(i = 1,2)$ における貯水容量 $v_i(i = 1,2)$ をそれぞれ 1、各貯水池直下流の評価地点での必要流量を 1 とする。各評価地点における損失は評価地点に直接連結する上流の貯水池からの放流量のみに依存する関数であり、各評価地点においては放流量 r_i が必要流量に満たない場合すなわち $r^i = 0$ の場合に、各評価地点において被害 $l_i(0) = 1$ が生じるものとする。

図－4、図－5は初期操作ルール１、２を用いた場合の目的関数値の変化を表している。ここで，初期操作ルール 1 は個別の貯水池に関して目的関数を最適化して選られたルールであり，初期操作ルール 2 はいずれの貯水池においても放流可能量が需要量を下回らない限りちょうど需要分（すなわち，1 単位）を放流するというルールである．これらの図から提案したアルゴリズムによって逐次的に



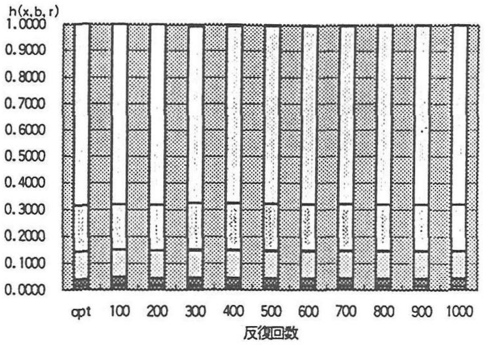
図－5　目的関数値の変化（初期操作ルール２）

得られる操作ルールの目的関数値が、原問題の与える最適な目的関数値に漸近していく様子が観察される。しかしながら、設定した操作ルールに依存して漸近する速度に開きが生じることも読み取れる。初期操作ルール１は初期操作ルール２に比べより早い速度で最適解に漸近していることがわかる。初期操作ルール１は初期操作ルール２に比べて、より最適解に近い（目的関数値の小さい）ルールであり、その分漸近速度も早いものと推測される。漸近速度が初期解に依存するという性質はこの種のモデルの場合往々にして生じる性質であるが、本研究で提案したアルゴリズムでも同様の結果となった。この点に関しては、今後改良の余地が残されているものと考える。

図－６に初期操作ルール１を用いた場合の同時生起確率　$h(x,\tilde{b},r)$　の変化を示す。互いに異なるハッチは $h(x,\tilde{b},r)$ が正となる $(x,\tilde{b},r)$ の組み合わせ毎に異なるハッチが対応しており、さらにハッチされた領域の大きさは対応する組み合わせ $(x,\tilde{b},r)$ が生じる同時生起確率に対応している。この図から、反復回数 100 回以上の領域では最適操作ルールとほとんど変わらない操作ルールが得られている。したがって，比較的早い段階で反復を止めても操作ルール自体はあまり変化しないことがわかる。

5. おわりに

本研究では、平均期待損失最小化問題として定式化される複数の貯水池群の統合操作ルール設計問題（原問題）を取り上げ、逐次的にこの問題の解に収束する分権的アルゴリズムを提案した。本研究で提案したアルゴリズムでは、統合管理者及び個別の貯水池の管理者が解く問題は、それぞれ比較的小規模の線形計画問題あるいは動的計画問題であり、これらの問題は比較的容易に解くことができる。従って、本研究で提案したアルゴリズムにより、「次



図－6　同時生起確率の変化（初期操作ルール1）

元の呪い」のため厳密解を求めることが困難なほど大規模な貯水池群の統合操作ルール設計問題を解くことが可能となったということができる。

しかしながら、このアルゴリズムにはアルゴリズムの中には二重の収束計算のルーチンが含まれているため、原問題を直接解くのに比べて、最適解への収束速度が遅い。もちろん、原問題が直接解ける場合は原問題自体が小規模である場合に限られる。原問題が極めて大規模な場合には、本研究で提案した手法以外の方法が利用可能な数少ない手法の一つであることには違いがない。

漸近速度やその初期解への依存性等、改善すべき課題は少なくないが、制約式集計化法の基準化や、制約式集計化法におけるステップサイズτ_kの設定法の改善等によって収束効率の向上を図るなどの方法が考えられる。この点に関しては今後の課題としたい。

最後に、本研究は主としてIIASA（オーストリア）滞在中の研究であり、特にProf. Ruszczynskiには大変多くの示唆を受けた。ここに感謝の意を表するものである。

参考文献

1) Yakowitz, S.: Dynamic Programming Applications in water resources, Water Resources Research, Vol.18(4), pp.673-696, 1982.
2) Yeh, W. G.: Reservoir Management and Operation Models: A State-of-the-Art Review, Water Resources Research, Vol.21(12), pp.1797-1818, 1985.
3) Turgeon, A.: Optimal Operation of Multireservoir Power Systems with Stochastic Inflows, Water Resources Research, Vol.16(2), pp.275-283, 1980.
4) Tai, F.K. and Goulter, I.C.,: A Stochastic dynamic Programming Based Approach to the Operation of a Multireservoir System, Water Resources Bulletin, Vol.23(3), pp.371-377, 1987.
5) He, Q. and Bogardi, J.J.: Application of a Simplified Composite Reservoir Concept for the Optimal Operation of a Water Supply Reservoir System, in Simonovic S.P., et al. (eds.) "Water Resource Systems Application", University of Manitoba, Winnipeg, pp.298-307, 1990.
6) 竹内邦良：貯水量の累加損失係数を用いた貯水池群の最適操作手法、土木学会論文報告集、第222号、pp.93-103、1974.
7) Mine, H. and Okaki, S.: Markovian Decision Processes, Elsevier, 1970.
8) White, D.J.: Markov Decision Processes, WILEY, 1993.
9) ダンツィーク 著　小山昭雄 訳：線型計画法とその周辺 (Linear Programming and Extensions), HBJ出版局, 1983.
10) Ermoliev, Y.M., Kryazhimskii, A.V. and Ruszczynski, A.: Constraint Aggregation Principle in Convex Optimization, WP-95-015, IIASA, 1995.

貯水池システムの統合操作ルール設計のための分権的アルゴリズムの開発

多々納裕一

本研究では貯水池群の統合操作ルールを求める方法を提案する。まず貯水池群を含む流域をモデル化しこの問題がマルコフ決定過程となることを示す。次いで平均期待損失最小化問題として貯水池群の統合的操作ルール設計問題を定式化する。さらに制約式集計化法を用いて逐次的に原問題の解に収束する小規模な問題の系列を生成する。さらに「予測の導入」、「個別貯水池の確率的ダイナミズム制約の付加」により制約式集計化法での子問題を分解し、より効率的なアルゴリズムを構築した。

A Distributed Algorithm for Designing the Optimal Integrated Operation Rule of a Multi-Reservoir System

Hirokazu TATANO

The Paper presents a method to covert a large (centralized) multi-dimensional MDP problem to a sequence of problems which consist of a coordination LP problem and small decentralized MDP problems for each subsystem. It is shown that the sequence of the solutions of the problems converged to the solution of the original MDP problem. Based on this result, a decentralized algorithm to sole a multi-dimensional MDP problem is proposed. As a numerical example, optimization of the release policy of a multi-reservoir system is considered to illustrate the applicability of the algorithm to large MDP problems.