【土木計画学研究・論文集 No.14 1997年9月】

Hub-Spokes/Point-to-Point や集約型／直行型輸送など 階層的輸送システムの均質無限平面上における定式化と解法

*Modeling and Solving of Hierarchical Transport Systems such as Hub-Spokes / Point-to-Point and/or Consolidated / Direct Delivery in the Uniform Boundless Plane**

家田 仁**
By IEDA, Hitoshi

1．はじめに

航空や海運（特にコンテナ輸送）における Hub-Spokes タイプ輸送と Point-to-Point タイプ輸送、宅配便や郵便あるいは種々の販売物流などにおける多段階のターミナル集約輸送と直行トラック輸送、あるいは乗換えを伴うバスや列車などのマストラによる集約輸送とドア to ドア型のマイカーなど、輸送の方式は極めて多様である。需要の密度や距離特性、あるいは機材やインフラの技術的条件、さらにトリップ目的や品目などの特性によって定まる、輸送途上やターミナルにおける（ユーザーの利便などを含めた広義の）コストの特性に応じて、どのような輸送方式が経済合理性をもつのかという問題は、Hub 空港や港湾の整備問題、都市の物流交通問題などを持ち出すまでもなく、交通計画上の重要な研究課題である。また、このような「規模の経済性」と「輸送の利便性」のトレードオフに立脚した輸送形態の問題は、交通学に関する教育メニューの中でも、ハイライトの一つと言えよう。

本稿では、point-to-point タイプの直行輸送は、（多段階）集約タイプの輸送の特殊ケースであることから、これらをまとめて「階層的輸送」としてとらえ、均質な無限平面上で定式化を試み、その最適形態をＤＰ（動的計画法）で解く方法を示す。そして、前提となる諸ファンダメンタルズと、合理的選択の結果として採用される（はずの）輸送方式：すなわち（ゼロも含めた）輸送段階数（階層数）、各段階におけるターミナルカバレッジのサイズ（すなわち、各段階でのターミナル密度）などの関係を明示的に分析しようとするものである。

このような階層的な輸送システムの問題については、従来から少なからぬ研究が行われてきた[1)2)]。最もポピュラーな研究の流れは、現実を模擬した所与のネットワークと需要特性の下に、各階層のターミナルの立地配置や各点を巡回する輸送ルートをコスト最小化などの観点から求めようとする、階層的なネットワークの設計に関する研究である[3)-8)など]。いうまでもなく、困難でしかも非凸な整数計画問題であるため、いずれもヒューリスティックな解法がとられ、また階層数（高々二階層程度）や階層毎のターミナル数が所与であることが多い。ターミナル数の適値を求めようとする場合でも少なからぬ研究で総当たり法がとられている。適用対象としては、新聞の配送、ごみの収集、宅配便などがある。

Wirasinghe によれば、階層的輸送システムは、三つのレベルの制御変数によって設計される[6)]。すなわち、第一のマクロレベルでは階層数など輸送タイプ及び各階層の施設数と施設規模、第二のメゾレベルではこれら施設の立地配置、第三のミクロレベルでは配送ルートや配送スケジューリングなどである。この分類から言えば、上記のような大方の研究は、マクロレベルの変数を所与として、メゾ及びミクロレベルの変数の最適化を行うことを主な関心としてきたといえよ

---

* キーワーズ：物資流動、交通網計画、ターミナル計画

** 正会員、工博、東京大学大学院社会基盤工学専攻, 113 文京区本郷 7-3-1, Fax:+81-3-5800-6868, Email: ieda@trip.t.u-tokyo.ac.jp

う。一方、本研究の関心は、第一のマクロレベルの問題である。第二のメゾ問題や第三のミクロ問題も、もちろん重要なトピックではあるが、第二の立地点については、ストックや輸送のコスト最小化などよりも、所要の広さをもつ用地がどこに確保できるか、といった要素が実務では支配的であるし、第三の配送ルーティングについても、実際には、交通条件などが日々変動しやすく、また試行錯誤による改善も容易であるため、（日常的管理ではともかくも）施設計画レベルでの最適化の意義は必ずしも大きくない。このような状況を背景として、筆者の知る範囲では、輸送業実務者や交通施設計画実務者にとって最適化が必要な計画要素は、特にマクロレベルの問題にあるようである。

一方、Hall の研究などでは、実用性は直ちに追求されず、諸ファクターが輸送形態にどのような効果をもたらすのかコンセプチュアルな分析を行うことを主な目的としている[9)-13)]。本研究の基本スタンスもこれと共通する点が多い。これらの研究では、マクロレベルのシステム計画ファクターにも関心が置かれ、集約化による規模の経済性と、輸送距離・輸送時間の増大のトレードオフとして積み合わせ輸送を捉え、単純な矩形のエリアを対象として、輸送タイプ毎にコストを算出しその基本特性を調べている。しかし、コスト特性にかなりの注意が払われている反面、数理最適化の演算は行われず、総当たり法によりコストが直接比較されている。同じく、均質な正方形領域で階層的輸送を定式化し、宅配便を念頭において二段階輸送のターミナル数などをヒューリスティックな方法により最適化し、さらにそこから経験式を導いた黒川の研究がある[14)]。ただし、この研究では、階層数が所与である点や、計算時間上、対象領域が有限に限られる点などに不満が残る。

より現実的なコスト構造の分析に基づいて宅配便事業者における階層的輸送の最適計画を定式化し、実地データに基づいてそのモデル推定を行った研究に筆者らの研究などがある[15)-17)]。これは、宅配便で実施されている三段階輸送において、経営資源の大局を決めてしまう計画ファクターである、配送ゾーン数、センター数、ベース数と各輸送段階のトラックサイズを、サービス水準に応じた顧客逸失の機会費用を含めた広義のコスト最小化原理に基づいて求めるものである。しかし、このアプローチはやや細密に過ぎ、個別の問題の検討には向いていても、階層的輸送の一般的な特性を能率的に分析検討するのには必ずしも適していない。

なお、階層的輸送をやや異なるアプローチで扱ったものに、Current の研究などがある[18)-21)]。これは、所与のネットワーク上に、起終点が決まった一本の上位交通機関のルートを、総コスト最小化の観点から計画しようとするもので、一種の二段階輸送システムの計画問題である。しかし、かなり特殊ケースを扱うもので、本研究の問題設定とは重なるところが少ない。

階層的システムの問題としては、輸送の問題ばかりでなく、各種の階層的施設の空間的配置の問題がある。古典の Christaller や Loesch の著作をはじめ[22)-23)]、少なからぬ研究が経済地理学などで取り上げられてきた。代表的な Christaller[22)] は、周知のように、施設（都市）が提供する種々のサービスの、経済的到達範囲に着目し、施設（都市）の階層が上がるに従って、施設（都市）のカバレッジが逐次定数倍（３倍、あるいは４倍、７倍）となるシステムを示し、後世に非常に大きな影響を残した。前述の Wirasinghe の分類に従えば、これらでは、本研究と同様にあくまでマクロレベルの問題に関心がおかれ、古典ならではの多くの示唆を与えてくれる。しかし、階層システムがどのような原理（例えば最適化あるいは均衡）によって形成されるのかといった点については明示的な記述が少なく、問題は十分に定式化されていない。その後、実証に重点が置かれた研究は数多いが[24)-25)]、より数理的な研究としては、階層的に序列化されたサービスを行う施設（病院など）について、階層数と階層別の施設数を所与として、与えられたネットワーク上でその配置と規模（capacity）の最適化を行う問題設定となっていることが多い[26)-20)]。方法論的には素朴な総当たり法ながら、的確な定式化がなされた Doekmeci の研究[27)]から、確率的変動要素を考慮する研究[28)]、連続的平面を対象にボロノイ分割法により施設の圏域を求める方法[29)]などもみられる。全般的にみると、少なくとも数理的アプローチをとる研究では、前述の輸送サイドでの研究と同様に、 Wirasinghe による

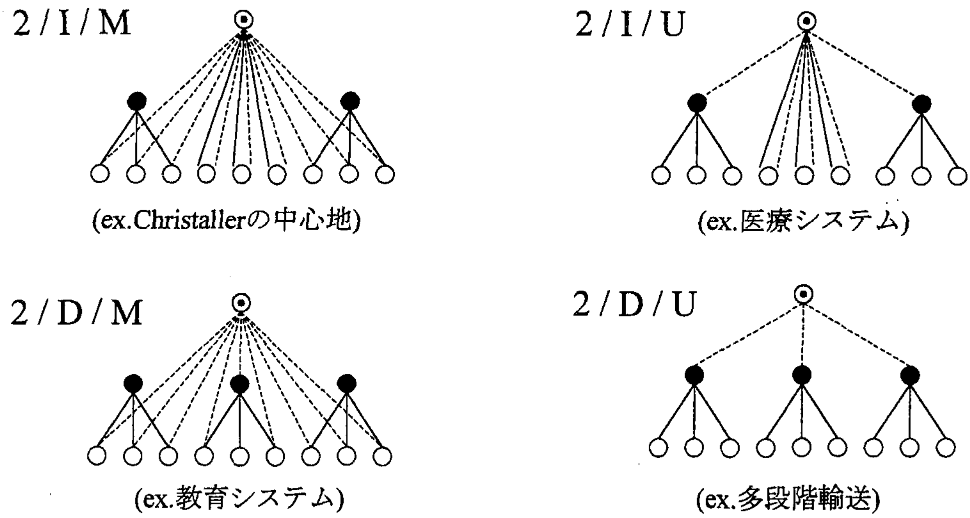


図-1 階層的システム (hierarchical system) の分類（例）
k=2, I:integrated, D:discriminating, M:multipath, U:unipath

メゾレベルの問題に主な関心が置かれ、古典以降ではマクロレベルの問題にあまり注意が向けられていない。

階層的輸送の問題と、階層的な施設計画問題には、類似点が多い。Narula や Mirchandani は、これら種々の階層的システムの統一的な分類を試みている[30-31]。特に Narula[30] の分類がわかりやすい。これは、階層数及びサービスの種類を k 個として、下位から階層順位をつけた時、施設と提供サービスの関係によって {Discriminating：第 i 階層の施設は、第 i サービスを提供する} と {Integrated：第 i 階層の施設は、第 1 サービスから第 i サービスまでを提供する} とに分け、同時にサービス提供のパスの形態によって {Multipaths：いずれの階層の施設も最下位ノードにサービスを提供する} と {Unipath：第 i 階層の施設は、第 i サービスを i-1 階層ノード（施設）にサービスを提供する} とに分け、階層的システムを k/I/M、k/I/U、k/D/M、k/D/U の四種に分類している。それぞれの簡単なイメージを図－1 に示す。Narula の分類法に従えば、k/I/M には郵便局配置、Christaller 的な都市群システムなどが、k/I/U には医療サービスなどが、k/D/M には学校教育システムなどが、そして k/D/U には工場-倉庫-小売といった階層的流通過程や各種の階層的輸送の問題などが対応することになる。従って、この表記に従えば、本研究は、**「均質な無限平面の上に k/D/U システムを構築する時、最適な階層数 k（k=0 も含む）と階層別の最適施設数（施設配置密度）を見出す問題**」と言いかえられる。

なお、本研究では解法上はＤＰを用いているが[32]（そして、筆者はそれ自身に重点を置いていないが）、輸送や施設配置問題にＤＰを用いることは、もちろん新しいことではない。ただ、その多くは時間的なステップ毎の意思決定の問題を扱うものである[33-36]。空間的なネットワークの設計問題にＤＰを用いた研究[37]もないではないが、本研究のような輸送上の空間的な階層性に関心を持った研究は見当たらない。

本研究のモデルは仮定・解法ともに極めて単純である。しかし、前述のように階層的輸送システムのマクロレベルの計画問題は、（あまりにも単純なためか）従来あまり扱われてこなかった領域のようである。本研究のアプローチは、今のところ現実の輸送計画やターミナル整備計画などといった実務に直ちに活用できないが、輸送体系の広域でのマクロな特性分析や評価などには応用の余地が少なくないものと考えている。本稿ではまだそこまで至っていないが、マクロな実証データとの突き合わせによって、現実の階層的システムのより深い理解につながるであろう。そうした意味で、その単純さの故に「合目的」的であると考えている。

さらにまた、本研究の拡張によって、幹線－補助幹

線－区画街路などといった道路機能の階層的構造、各種公共施設の配置問題、卸－小売など流通チャンネルや本社－支社－支店－営業所など商業機能の階層構造、都市群の経済・社会機能から見た階層的構造、あるいは中央政府と地方政府の行政的機能の構造、などといった、ここで定式化したk/D/U以外のタイプの問題にも展開が可能であろうと考える。

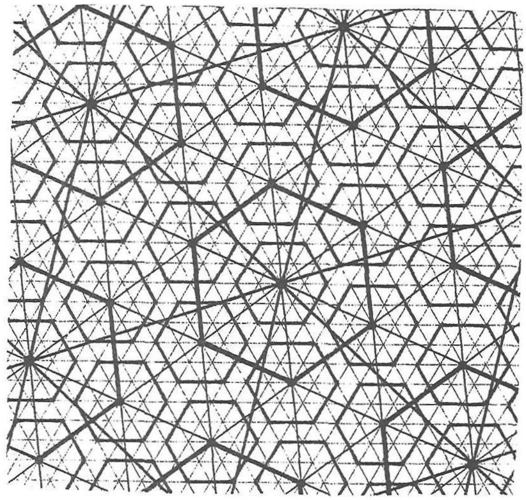
2．階層的輸送モデルの定式化

（1）多段階輸送の表現方法

無限に広がる均質な平面を、隣接する格子点間の距離が D_1 の正三角格子によって表現し、各格子点に一つづつのノードを対応させる。これを基本格子と呼ぶ（図－2）。これらの任意の二つの格子点間で輸送需要が発生し、コスト最小化などといった何らかの合理的な視点に立って輸送が行われる状況を考える。

このような格子点間輸送の方法の一つは、各格子点間をそれぞれ直接結んで輸送（直行輸送：point-to-point 輸送）する方法である。もう一つの方法は、基本格子点群をいくつかのグループにとりまとめ、それらの上位に新たに一つづつターミナルを設け、各基本格子点の発着の輸送を一旦これらのターミナルに集約し、グループ外との輸送をターミナル間でまとめて直行輸送する方式（集約輸送：hub-spokes 輸送）である。この場合、この二つの輸送方式のどちらが有利なのか？もし集約輸送を行う場合には、1つのターミナルの下にいくつの基本格子点を配備するべきか？といった計画問題が発生する。さらに、宅配便の例に見られるように、このような集約輸送を多段階にわたって繰り返した後に直行輸送する方式も考えられるから、問題は、何段階で集約するか？あるいはしないか？各レベルでのターミナルテリトリー（1つのターミナルの下位に入る格子点群を取り囲む領域）の大きさはどうすべきか？といった要素の同時決定問題となる。

そこでは規模の経済性を前提にして、集約の度を高めるほど輸送密度が増え、平均コストが低下する反面、積み替えコストなどのターミナルコストや総輸送距離（時間）が伸びるなどの損失が増えるというトレードオフがある。また、同じような集約の程度でも、



図－2　正三角格子と正六角テリトリー（例）

正三角形で形成される基本格子網の上に、基本格子の2倍の辺長をもつ正六角形のテリトリーが作られ、中心に一次ターミナルが置かれている。一次ターミナルを格子点として新たな正三角格子が形成され、さらにその1倍長の辺長をもつ新たな正六角テリトリーが置かれている。

集約段階数を抑えた場合には、ターミナルコストが抑えられる反面で、ターミナルテリトリーのサイズが大きくなるためテリトリーの内々輸送量が増え、せっかく集約してもターミナル間の輸送にまわされる量が減るから、集約の効果が薄れる、というトレードオフも生じる。

さて、格子点とターミナルの幾何学的な関係をおさえておこう。まずターミナルは、テリトリーの図心に設けられるものとする。こうして作られたターミナル群は新たな上位の格子点群となる。テリトリーの形状は、本来一義的には決められないが、ここでは、辺長が D_1 の自然数倍である正六角形（ＨＴ（Hexagonal Territory）と呼ぶ）をとることとする。これは、蜂の巣状のＨＴが正方形などに比べて等方性が高いことと、しかもＨＴの中心に置かれたターミナルによって新たに生み出される格子点も同じく正三角形の格子点となるので、以降で述べるような再帰的な操作に向いているためである（図－2）。

無限に広がる辺長ｄの正三角格子に、ｎを自然数として辺長ｎ･ｄのＨＴを設け、その中心にターミナルを置き、新たな上位の格子点とする（図－3）。隣接する新たなターミナル間の距離、すなわち上位の正三角格子の辺長Ｄは、簡単な計算により、

$D=f_n d$　　ここで、 $f_n=(3n^2+3n+1)^{1/2}$ .....(1)

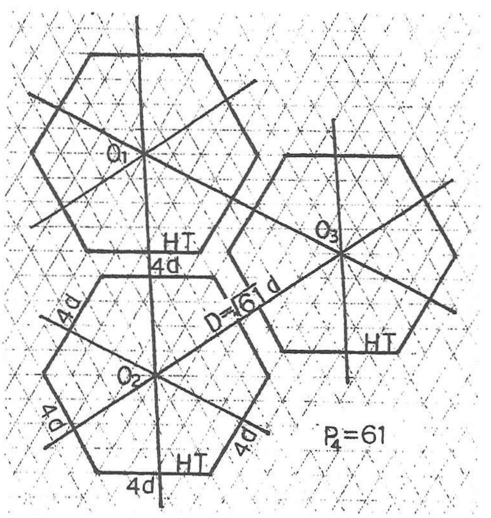
となる。また、このＨＴに含まれる格子点の数 P_n は、以下となる。

$P_n=3n^2+3n+1$ .....(2)

（２）多段階輸送の最適化法

今、基本格子辺長を D_1 として、このような集約輸送が高々K 回まで（すなわち 0 回から K 回まで集約輸送が許される。ただし、0 回とは集約を行わず直行輸送することを意味する。）繰り返され、最後に直行輸送が行われるものとする。また、各段階のＨＴの辺長は、その直前の段階の正三角格子の辺長の高々Ｎ倍とする。

直行輸送のステップをも含めると、輸送ステップ数は、最低１ステップ、最大 K+1 ステップとなる。下位から k 番目の輸送ステップ(ここで $1 \leqq k \leqq K+1$) では、辺長 D_k の格子群とその上位のＨＴ間で集約輸送が行われるか、あるいは辺長 D_k の格子群間で直行輸送が行われる。ＨＴのターミナルが作る新たな上位正三角格子の辺長 D_{k+1} は、(1)式によって、格子点の辺長 D_k の f_n 倍（ただし、$1 \leqq n \leqq N$）となる。従って、第１番目のステップから通算すれば、 D_{k+1} は、D_1 の $f_1{}^k$ 倍, $f_1{}^{k-1}f_2$ 倍, .., $f_N{}^k$ 倍という具合に、「Ｎ種のものから重複を許して k 個取り出す組み合わせの数」だけの値をとることができる。この組み合わせの数 M_k は、



図－３　ＨＴとターミナル間距離（例）

基本格子辺長の４倍長のＨＴの例。ＨＴの内部には 61 この基本格子点が含まれている。ＨＴの図心に置かれたターミナル間の距離は, SQR(61)になっている。

$M_k={}_N H_k={}_{N+k-1}C_k=(N+k-1)!/\{(N-1)!k!\}$ ......(3)

となる。ここで、(3)式より、

$M_k=(N+k-1)k^{-1}M_{k-1}$ .....(4)

が成り立つことが確かめられる。 M_k 個の組み合わせ中の m 番目の D_{k+1} の値を $D_{k+1}(m)$ $(1 \leqq m \leqq M_k)$ と書き、m と $D_{k+1}(m)$の値が対応したリストが作られたとする。（基本格子辺長 D_1 についても、便宜上以降では $D_1(1)$と書く。）

今、下位から k 番目の輸送ステップにおいて、（１ステップ下位の）格子点辺長が m'番目の値 $D_k(m')$ $(1 \leqq m' \leqq M_{k-1})$ であるとする。ただし、k=1 の時、下位の格子パターンは所与で一種に限られるから、$M_0=1$ とする。これを辺長が格子辺長の n 倍のＨＴに集約すると、次のステップの格子点辺長 $f_n D_k(m')$の値を上記の $D_{k+1}(\cdot)$のリストを用いて検索すれば、

$D_{k+1}(m)=f_n D_k(m')$ .....(5)

となる添え字 m を見いだすことができる。m や m'は、ＨＴパターンのコード番号を表していることになる。さてこの時、辺長の n 倍のＨＴへの集約化の前提付きで、この第 k 番目の輸送ステップ及びそれより上位の輸送ステップに要するコスト $C(k,m',n)$を考える。これは、ＨＴのテリトリー内の各格子点とＨＴのターミナルの間でのフィーダー輸送に関わるコスト $C_T(k,m',n)$と、ＨＴに集約した以後の輸送（ＨＴ間の直行輸送、またはさらに上位の集約輸送）に要するコストの和として表すことができる。ただし、「n=0」の場合は、直行輸送の時のコストを表すことにする。従って、コスト $C(k,m',n)$の n についての最小値 $C_{min}(k,m')$は、「第 k 輸送ステップでのコスト $C_T(k,m',n)$と、その n を前提にしたときに、第 k+1 輸送ステップ以降に要するコストの最小値 $C_{min}(k+1,m)$ の和」を最小とする n によって与えられる。各コストを第k輸送ステップにおける格子点１ヶ所あたりで算出すると、(1)～(5)式より、以上の関係は次式のように表現されることになる。

$$C_{min}(k,m')=\min_{0 \leqq n \leqq N_{max}}\{C_T(k,m',n)+(1/P_n)C_{min}(k+1,m)\}$$

$$\text{for } 1 \leqq k \leqq K+1$$

$$\text{for } 1 \leqq m' \leqq M_{k-1} \quad ......(6)$$

ここで、 $M_k=(N+k-1)k^{-1}M_{k-1}$　$(M_0=1)$、

$m: D_{k+1}(m)=f_n D_k(m')$ 、

$P_n=3n^2+3n+1$、 $f_n=(3n^2+3n+1)^{1/2}$

(6)式の｛｝の最小値を与える n を $n^{opt}(k,m')$、その $n^{opt}(k,m')$ に対応した m を $m^{opt}(k,m')$ とする。この問題は、無数の組み合わせをもつ整数計画問題であるが、C_{min} が上記のような再帰的な表現になっていることから、いわゆる動的計画法（ＤＰ）によって格段に少ない労力で解くことができる。

具体的にいうと、k=1 から逐次(6)式をたどると、最後には k=K+1 のステップに至る。仮定により、このステップでは直行輸送のケースのみ考えればよい。従って、

$C_{min}(K+1,m')= C_T(K+1,m',0)$ 、

$n^{opt}(K+1,m')=0$、

for $1 \leqq \forall m' \leqq M_K$ .....(7)

となる。こうして得られた $C_{min}(K+1,m')$を用いて、今度は、１段下の第 K ステップについて、$1 \leqq \forall m' \leqq M_{K-1}$ に対して $C_T(K, m',n) + (1/P_n)C_{min}(K+1,m)$を計算し、その最小値を与える n、すなわち $n^{opt}(K,m')$を探索し、$C_{min}(K,m')$と $m^{opt}(K,m')$を求めることができる。このようにして逐次 k を減少させ、すべての k と m'（ただし、$1 \leqq k \leqq K+1$、$1 \leqq m' \leqq M_{k-1}$）について、$C_{min}(k,m')$、$n^{opt}(k,m')$、$m^{opt}(k,m')$の演算を進めれば、最後には、k=1、（$1 \leqq m' \leqq M_0=1$）に至り、$C_{min}(1,1)$、$n^{opt}(1,1)$、$m^{opt}(1,1)$が求められる。なお $C_{min}(1,1)$が、最適な輸送パターンによって達成される最小のコストを表すことはいうまでもない。最適な輸送パターンを知るには、逆に k=1, m'=1 からスタートして、$n^{opt}=0$（直行輸送）となるまで、順次 k を増やし m' を更新しながら、$n^{opt}(k,m')$と $m^{opt}(k,m')$を追跡していけばよい。あとは、コスト関数を定式化すれば、上記のプロセスを適用することが出来る。

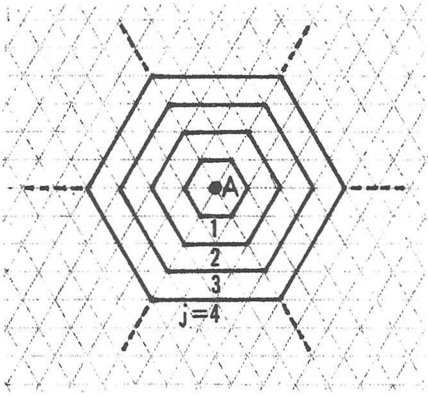
(3)輸送需要の定式化

辺長Ｄの格子点群の任意の一点Ａと、そこから距離が r だけ離れた格子点の間の輸送需要を q_r とした時、輸送需要 q_r が距離に応じて減衰し、

$q_r=we^{-ar}$

ただし、w と a はパラメータ .....(8)

と表されるものとする。Ａ点の周囲に同心的に多層の正六角形を描くと（図－４）、Ａ点から j 層目の六角形上の、任意の格子点（その点数は、6j）までの距離 r_j に対しては、j 層目の六角形の辺長が D・j となることから、次の不等式が成立する。



図－４　説明図(1)
点Ａの周辺の各格子点は、点Ａを中心とする正六角形のいずれかの上に位置している。

$(\sqrt{3}/2)D \cdot j \leqq r_j \leqq D \cdot j$ ......(9)

その代表値として近似的に最大値と最小値の単純平均をとると、

$r_j=b \cdot D \cdot j$

ここで、$b=(\sqrt{3}+2)/4 =0.933...$ .....(10)

となる。Ａ点の発着輸送需要Ｑは、Ａ点と他の各点との間の輸送需要の総和である。Ａ点以外のすべての点は、 Ａ点の周りのいずれかの層の正六角形の辺上にある。従って、Ａ点の発着輸送需要Ｑは、Ａ点と他の点との間の輸送需要を(8)式と(10)式を用いて計算し、多重の正六角形に従って無限遠まで総和をとれば算出され、以下のようになる。

$$Q = \sum_{j=1}^{\infty} 6jq_r = \sum 6jwe^{-abDj}$$

$$= 6w \sum je^{-abDj} = 6we^{-abD}/(1-e^{-abD})^2 \quad .....(11)$$

となる。なお、上式の無限級数 Σje^{-abDj} は、両辺に e^{-abD} を掛けたものを、それぞれ両辺から差し引くことによって算出され、その極限をとると収束することが確認できる。これより、Ｑが与えられた時のパラメータ w を求めることができるから、逆に１格子点の発着量Ｑが与えられた時、距離が r だけ離れた格子点間の輸送需要 q_r は、

$$q_r = we^{-ar} \quad .....(12)$$

ここで、

$$w = (Q/6)\cdot e^{abD}(1-e^{-abD})^2$$

となる。

辺長が nD のＨＴには、(2)式により P_n 個の格子点が含まれるから、ターミナルに発着する総輸送量 Q_{HTTL} は、

$$Q_{HTTL}= P_nQ =(3n^2+3n+1)Q \quad .....(13)$$

となる。

次にこのＨＴの内部で輸送が完結する内々輸送量 Q_{HTIN} を算出する。ＨＴに含まれ、かつＨＴの中心から i 層目の正六角形の頂点の１つに点Ｂをとる（図−５）。この点の周囲に同心的に正六角形状の層を描くと、点Ｂから数えて j 層目の正六角形上に位置し、かつ同じＨＴに所属する格子点の数 N(j,i,n)は、簡単な考察によって以下のように求められる。

N(j,i,n)=

<u>i=0 の時、</u>

$6j \qquad 1 \leqq j \leqq n$

<u>0<i<n の時、</u>

$6j \qquad 1 \leqq j \leqq n-i$

$2(n-i+j)+1 \qquad n-i+1 \leqq j \leqq n$

$2n+1 \qquad n+1 \leqq j \leqq n+i$

<u>i=n の時、</u>

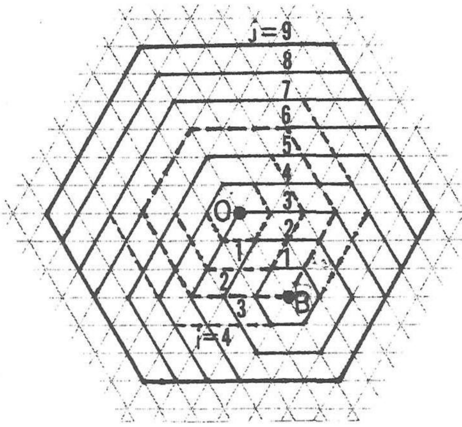
$2(n-i+j)+1 \qquad 1 \leqq j \leqq n$

$2n+1 \qquad n+1 \leqq j \leqq 2n \quad .....(14)$

このとき、 Ｂ点から第 j 層の正六角形上の各点とＢ点との距離を前項と同様に(10)式により $b\cdot D\cdot j$ で近似すれば、両点間の輸送量は、(12)式によって算出できる。そこで、 ＨＴの内々輸送量の総和 Q_{HTIN} は、（第 i 層上にある）Ｂ点の数６ i と（Ｂ点から）第 j 層目にある格子点数 N(j,i,n)とをかけ、ダブルカウントに注意して総和をとることによって、近似的に以下のように求めることができる。

$$Q_{HTIN} =(1/2)\left[\sum_{j=1}^{n} N(j,0,n)we^{-abDj} + \sum_{i=1}^{n} 6i \sum_{j=1}^{n+i} N(j,i,n)we^{-abDj}\right] \quad ...(15)$$

ＨＴの内部の各点が、ターミナルを通じてＨＴの外部とやりとりする輸送量は、新たな上位格子点の１点あたりの発着輸送量 Q'となる。この値は、(13)式のＨＴの総輸送量から(15)式の内々輸送量を差し引き、



図－５　説明図(2)

ＨＴの内部の点ＢとＨＴ内の他の点との関係を示している。点ＢはここではＨＴの中心から３層目の正六角形上にとられている。他の点はすべて、Ｂ点を中心とするいずれかの正六角形の上に乗っている。

$$Q'=Q_{HTTL}-Q_{HTIN}=(3n^2+3n+1)Q-Q_{HTIN} \quad .....(16)$$

と求められる。

輸送ステップ k における m'番目の格子点辺長 $D_k(m')$に対応した、格子点発着輸送量を前項の表記法に従い $Q_k(m')$とする。（同じく、基本格子点の発着輸送量を $Q_1(1)$：所与、とする。）この時、第 k 輸送ステップで辺長が格子点辺長の n 倍のＨＴに集約される場合、輸送ステップ k+1 における格子点発着輸送量（の一つ）は、任意の n に対応して $D_{k+1}(m)= f_nD_k(m')$となる m を検索しておき、(12)式と(15)式の D と Q にそれぞれ $D_k(m')$と $Q_k(m')$を代入し、(16)式を用いて次のように算出される。

$$Q_{k+1}(m)=(3n^2+3n+1)Q_k(m')-Q_{HTIN} \quad .....(17)$$

こうして下から逐次、$Q_k(m')$ $(1 \leqq k \leqq K、1 \leqq m' \leqq M_{k-1})$ が求められる。

(4)コストの定式化

コストとしては、輸送コストとターミナルコストを取り入れる。輸送量 q を距離 r だけ輸送するコスト C（貨幣的なコストも時間的なコストもその他諸々合わせて扱う。）が、単位距離及び単位輸送量あたりの平均コストを c_A として次のように記述されるものとする。

$$C = c_A \cdot q \cdot r = c_1 q^{1-s_1} r \qquad .....(18)$$

ここで、$c_A = c_1 q^{-s_1} \quad (0 \leqq s_1 < 1)$

パラメータ s_1 は、輸送における「規模の経済性」の高さを表し、$s_1=0$ の時には、規模の経済性が存在せず、平均コストは輸送量によらず一定となる。

格子点辺長が D で、格子点発着輸送量が Q の時、これらを各格子点間の直行輸送で輸送する場合の、一つの格子点当たりのコストを $C_T(0)$とすると、これは(18)式に(10)式と(12)式の距離と輸送量を代入し、無限遠まで総和をとることによって以下のように算出される。なお、この無限級数は、(11)式の級数と同様に操作し、(11)式の結果も併用することによって計算できる。

$$C_T(0) = \sum_{j=1}^{\infty} (6j) c_1 q_r^{1-s_1} (bDj)$$
$$= 6bDc_1 \sum j^2 (we^{-abDj})^{1-s_1}$$
$$= 6bDc_1 w^{1-s_1} \sum_{j=1}^{\infty} j^2 e^{-a_1 j}$$
$$= 6bDc_1 w^{1-s_1} (e^{-a_1} + e^{-2a_1})/(1-e^{-a_1})^3$$

ただし、

$$w = (Q/6) \cdot e^{abD}(1-e^{-abD})^2$$
$$a_1 = a(1-s_1)bD \qquad .....(19)$$

次にHTに集約輸送する時の、HT内の各点とHTの中央に設けられるターミナルとの間の（1つのHTあたりの）輸送コスト C_{C1} を算出する。上記と同様に正六角形の層に従って算出する。この場合すべてが一旦ターミナルへ輸送されるわけであるから、輸送量は各点とも Q で一定である。従って、(18)式より、

$$C_{C1} = \sum_{j=1}^{n} (6j) c_1 Q^{1-s_1} (bDj) = 6bDc_1 Q^{1-s_1} \sum j^2$$
$$= bDc_1 n(n+1)(2n+1) Q^{1-s_1} \qquad ....(20)$$

となる。

ターミナルコスト C_{C2} は、1ターミナルあたりの取扱い量を q としたとき、(18)式と同様に「規模の経済性」を考慮し、

$$C_{C2} = c_2 q^{1-s_2}$$

ただし、 $0 \leqq s_2 < 1$ ....(21)

となるものとする。

HT内の各点の発着量の総和がターミナルの取扱量であるから、ターミナルコスト C_{C2} は、(13)式により算出される発着量を、(21)式に代入して、

$$C_{C2} = c_2 (3n^2+3n+1)^{1-s_2} Q^{1-s_2} \qquad ....(22)$$

となる。

よって、辺長 nD のHTを設けて集約輸送を行う際の1格子点あたりのコスト $C_T(n)$は C_{C1} と C_{C2} の和を(2)式のHTの格子点数で除すことにより、以下のように与えられる。

$$C_T(n) = (C_{C1} + C_{C2})/P_n$$
$$= bDc_1 Q^{1-s_1} n(n+1)(2n+1)/(3n^2+3n+1)$$
$$+ c_2 Q^{1-s_2} (3n^2+3n+1)^{-s_2} \qquad ....(23)$$

ただし、$1 \leqq n \leqq N$ （n=0 の時: (19)式）

3．適用計算例

以上より、基本格子の辺長と輸送需要やコストに関する諸パラメータが与えられると、 まず(5)式による $D_k(\cdot)$と(17)式による $Q_k(\cdot)$を算出しておけば、これらに基づいて、(19)式と(23)式により任意のケースのコスト $C_T(\cdot)$を計算できるから、(6)式及び(7)式以下のプロセスを通じ、広義のコスト最小化に基づく最適な輸送方式を容易に見いだすことができる。

表－1は、諸パラメータを与えた時の最適な輸送方式を求め、図示した計算例である。1)Case1～6 ではコストにおける「規模の経済性」が高まるにつれて、2)Case3 と Case7～10 では輸送の足が長くなるにつれて、3)Case12～14 では輸送需要の密度が低いほど、いずれも集約の度合いが高くなっていることがわかる。また、Case10 に比べて Case11 では、積み替えや迂回ルートによる時間ロスなどターミナルコストのウェイトが高まることによって、より集約度の低いタイプの輸送方式へと移行することがうかがえる。

4．まとめと今後の課題

本稿では、Hub-Spokes 的な集約輸送と Point-to-Point 的な直行輸送とを、まとめて階層的輸送と捉え、輸送の基本的特性を分析するため、無限に広がる均質な平面における基礎的な定式化を行いその解法を示した。現段階のモデルは、非常に単純化してあるため、個々の実務的な輸送問題の解決には全く不向きであるが、単純であるがゆえに操作性が高く、種々のファ

表－1　適用計算例

BTG は基本格子、Direct は直行輸送を表す。表中の上段左は、直前ステップの格子辺長を単位とするＨＴの辺長。上段（ ）は、基本格子辺長を単位とした隣接ターミナル間距離。*下段左*は、ＨＴに含まれる直前ステップの格子点数。*下段[ ]内*は、ＨＴに含まれる基本格子点数。

Case	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5	Case 6	Case 7	Case 8	Case 9	Case 10	Case 11	Case 12	Case 13	Case 14
D_1	$D_1=1$													
Q_1	$Q_1=10^{-2}$											$Q_1=10^{-4}$	$Q_1=10^{-2}$	$Q_1=1$
a	a=1						a=4	a=2	a=0.5	a=0.1		a=1		
c	$c_1=c_2=10^{-2}$										$c_1=10^{-2}, c_2=1$			
s	$s_{1,2}=0.5$	$s_{1,2}=0.6$	$s_{1,2}=0.7$	$s_{1,2}=0.8$	$s_{1,2}=0.9$	$s_{1,2}=0.95$	$s_1=s_2=0.7$					$s_1=0.95, s_2=0.05$		
						Direct				**Direct**		**Direct**		
3^{rd} level Terminal					**Direct**	3(42.58) *37[1813]*			**Direct**	2(50.27) *19[2527]*	**Direct**	3(42.58) *37[1813]*	**Direct**	
2^{nd} level Terminal		**Direct**	**Direct**	**Direct**	4(20.66) *61[427]*	1(7.0) *7[49]*		**Direct**	2(11.54) *19[133]*	2(11.53) *19[133]*	7(56.67) *169[3211]*	1(7.0) *7[49]*	5(41.58) *91[1729]*	**Direct**
1^{st} level Terminal	**Direct**	1(2.65) *7[7]*	3(6.08) *37[37]*	5(9.54) *91[91]*	1(2.65) *7[7]*	1(2.65) *7[7]*	**Direct**	1(2.65) *7[7]*	1(2.65) *7[7]*	1(2.65) *7[7]*	2(4.36) *19[19]*	1(2.65) *7[7]*	2(4.36) *19[19]*	25(44.17) *1951[1951]*
BTG	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)	BTG(1)
# of Terminals for a BTG	0	0.143	0.027	0.011	0.145	0.164	0	0.143	0.15	0.151	0.053	0.164	0.053	0.001

BTG : Basic Triangle Grid　（基本格子）上段 : n; Side of HT in adjacent lower grid distance (D; Distance of adjacent HT terminal in D_1)
Direct : Direct Transport　（直行輸送）*下段 : P_n ; # of adjacent lower grid [Σ P_n ; Cumulative # of basic grid]*

ンダメンタルズの変化と輸送方式とがどのような関係にあるのかなどといった基本特性分析をはじめ、大都市圏の物流システム・政策の評価などマクロな分析、あるいはまた交通学教育用にも適しているものと考える。

本研究に関する今後の課題としては以下などがあげられる。

1) 適用面では、宅配便その他の種々の輸送問題へのマクロなスタイルでの適用と、現実の輸送市場の基本特性の比較分析、及び都市群のマクロ構造分析などへの適用。
2) 本モデルを用いて種々の条件下における最適な輸送形態を求め、条件に応じて輸送形態を判別する経験式を抽出すること。
3) モデル面では、空間の不均質性と有限性をモデルの操作性を損なわずに取り込む方法の検討を行うこと。
4) Narula の分類による、他のタイプの階層的システムの定式化を試みること。

末筆ながら、本稿の作成にあたっては、本学大学院の村木康行氏と岡村敏之氏に数式のチェックなどでご協力いただいた。深く感謝する次第である。

参　考　文　献

1) 例えば、小林清晃：輸送計画の研究、所書店, 1977
2) 例えば、McKinnon,A.C.: Physical Distribution Systems, Routledge, 1989
3) Jacobsen,S.K. et al: A Comparative Study of Heuristics for a Two-Level Routing-Location Problem, European J.of Operational Res., Vol.5, pp.378-387, 1980
4) Madsen, O.B.G.: Methods for Solving Combined Two Level Location-Routing Problems of Realistic Dimensions, European J.of Operational Res., Vol.12, pp.295-301, 1983
5) Moore, G. et al. : The Hierarchical Service Location Problem, Management Science, Vol.28(7), pp.775-780, 1982
6) Wirasinghe, S.C.: An Approximate Procedure for Determining the Number, capacities and Locations of Solid Waste Transfer-Stations in an Urban Region, European J.of Operational Res., Vol.12, pp.105-111, 1983
7) Perl, J., et al: A Warehouse Location-Routing Problem, Transpn.Res.-B, Vol.19B, No.5, pp.381-396, 1985
8) 徳永他：宅配輸送におけるセンター配置及び輸送経路決定モデル、土木計画学研究・論文集、No.12、pp.519-525、1995
9) Hall, R.W.: Comparison of Strategies for Routing Shipments through Transportation Terminals, Transpn.Res.-A, Vol.21A, No.6, pp.421-429, 1987

10)Hall, R.W.: Direct versus Terminal Freight Routing on a Network with Concave Costs, Transpn.Res.-B, Vol.21B, No.4, pp.287-298, 1987
11)Daganzo,C.F.: A Comparison of In-Vehicle and Out-of-Vehicle Freight Consolidation Strategies, Transpn.Res.-B, Vol.22B, No.3,pp.173-180, 1988
12)Campbell, J.F.: Freight Consolidation and Routing with Transportation Economies of Scale, Transpn.Res.-B, Vol.24B, No.5, pp.345-361, 1990
13)Hall, R.W.: Design for Local Area Freight Networks, Transpn.Res-B, Vol.27B, No.2, pp.79-95,1993
14)黒川：物流システムの設計手法に関する研究、東京大学学位論文（船舶海洋工学専攻）、1997
15)家田他：マクロ集配輸送計画モデルの構築とその「地区型共同集配送」評価への適用、土木計画学研究・論文集、No.10、pp.247-254、1992
16)家田他：積合わせトラック物流における都市内集配活動のモデル化とその推定、土木計画学研究・論文集、No.11、pp.215-222、1993
17)家田他：都市内物流システムの体系的研究、日本交通政策研究会、1995
18)Current, J.R.: The Hierarchical Network Design Problem, European J.of Operational Res., Vol.27, pp.57-66, 1986
19)Current, J.R.: The Design of a Hierarchical Transportation Network with Transshipment Facilities, Transpn. Science, Vol.22, No.4, pp.270-277,1988
20)Current,J.R. et al: The Hierarchical Network Design Problem with Transshipment facilities, European J.of Operational Res., Vol.52, pp.338-347, 1991
21)Pirkul, H. et al: The Hierarchical Network Design Problem: A New Formulation and Solution Procedures, Transpn. Science, Vol.25, No.3, pp.175-182, 1991
22)Christaller, W.: Die zentralen Orte in Sueddeutschland, Verlag von Gustav Fischer, 1933, （江沢訳：クリスタラー都市の立地と発展、大明堂、1969）
23)Loesch, A.: Die raeumliche Ordnung der Wirtschaft, Gustav Fischer, 1962, （篠原訳：レッシュ経済立地論、大明堂、1968）
24)森川：中心地論(I), pp.29-97, 大明堂, 1980
25)林：中心地理論研究、大明堂、1986
26)杉浦：立地と空間的行動、pp.48-60、地理学講座５、古今書院、1989
27)Doekmeci,V.F.: An Optimization Model for a Hierarchical Spatial System, J.of Regional Science, Vol.13, No.3, pp.439-451, 1973
28)O'Kelly,M.E. et al.: Hierarchical Location Models with Probabilistic Allocation, Regional Studies, Vol.18.2, pp.121-129, 1984
29)Okabe, A., et al.: Spatial Tessellations Concepts and Applications of Voronoi Diagrams, pp.454-458, John Wiley & Sons, 1992
30)Narula,S.C.: Hierarchical Location-Allocation Problems: A Classification Scheme, European J.of Operational Res., Vol.15, pp.93-99, 1984
31)Mirchandani,P.B.: Generalized hierarchical facility Locations, Transpn.Science, Vol.21, No.2, pp.123-125, 1987
32)ＤＰの概要を示すものとしては、例えば、杉山昌平：動的計画法、日科技連
33)徳永他：ダイナミック・プログラミングによる航空ネットワークのスケジューリングモデル、土木学会論文集 No.440／Ⅳ-16、pp.109-116、1992
34)Huan,G.H. et al: Grey Dynamic Programming for Waste-Management Planning under Uncertainty, J.of Urban Planning and Development, Vol.120, No.3,pp.132-156, 1994
35)Gamerman,D.et al: Dynamic Hierarchical Models, J.of Royal Statistical Society, Series B, Vol.55, No.3, pp.629-642, 1993
36)Elmaghraby,S.E.: Resource Allocation via Dynamic Programming in Activity Networks, European J.of Operational Research,Vol.64,pp.199-215, 1993
37)Lotarev,V.T.: Design of One Class of Transportation Networks by Dynamic Programming, Automation and Remote Control, Vol.50, No.2, pp.233-241, 1989

Hub-Spokes / Point-to-Point や集約型／直行型輸送など階層的輸送システムの均質無限平面上における定式化と解法

家田　仁

本研究は、Hub-Spokes／Point-to-Point 輸送、物流やマストラ等の多段階にわたる集約輸送／直行輸送などといった多様な輸送方式を、一括して「階層的輸送モデル」として定式化し、ＤＰで解くことによって需要密度や距離特性、規模の経済性などを含めたコスト特性などのファンダメンタルズと合理的選択の結果として採用される輸送パターンの関係を明示的にとらえようとするものである。本モデルは、現段階ではシンプルではあるが、輸送体系の広域でのマクロな特性分析や評価などに応用できるものと考える。

Modeling and Solving of Hierarchical Transport Systems such as Hub-Spokes / Point-to Point and/or Consolidated / Direct Delivery in the Uniform Boundless Plane

IEDA, Hitoshi

A "Hierarchical Transport Model" is proposed and formulated, so that it could simulate various types of transport systems, such as hub-spokes / point-to-point concept in air and sea market, or consolidation / direct delivery systems for the macroscopic wide-area analysis and for the assessment of the characteristics of these transport systems. This model can derive the cost-minimum transport pattern based on dynamic programming strategy considering various features of the given factors such as "distance attenuation" in demand and "economies of scale" in cost.