Nested LOGIT 型交通・住居立地統合均衡モデルとその効率的解法*

Efficient Algorithms for Solving Nested LOGIT type Combined Residential-Location and Transportation Network Equilibrium Models

赤松 隆**・半田正樹***
by Takashi AKAMATSU and Masaki HANDA

1. はじめに

交通と立地の相互作用を扱う交通・立地統合モデルは従来から数多く研究されてきた．その結果，多くの理論的進展がなされ，静的なモデルについては，経済理論の観点から合理的といえるモデリング技術がほぼ確立したといえる．そのような最近の合理的なモデリング方法に基づいた統合均衡モデルでは，内生化する変数に関連する全ての主体の選択行動をランダム効用モデルによって記述し，モデル全体の理論的整合性・一貫性を保つことが意図されている．

しかし，それらの多くの統合モデルでは交通配分サブ・モデルだけは*確定的* 均衡や flow independent なモデルが用いられている．すなわち，交通配分段階まで含めてランダム効用理論と完全に整合的な統合均衡モデルは，ほとんど見当たらない．その理由の一つは，確率均衡配分を含む統合モデルは解法の開発が困難であると考えられていたためであろう．

本研究は，最近明らかにされた確率均衡配分の特性を利用すれば，完全にランダム効用理論と整合的な統合モデルも容易に解けることを示すものである．より具体的には，Nested LOGIT 型ランダム効用モデルに基づいた交通統合均衡モデルおよび交通・立地統合均衡モデルの厳密解法を示すことを本稿の目的とする．なお，交通・立地統合均衡モデルは，企業立地，雇用人口，賃金等を内生化した一般均衡モデルへの拡張も可能である[2]．しかし，本稿では確率均衡型の統合モデルの厳密解法を明確に示すことに重点を置くため，モデル構造を理解しやすい限定的な住宅立地・交通統合モデルのみを扱い，一般均衡モデル等の拡張モデルに関する議論は割愛する．

* Keywords: 住宅立地，発生・分布・配分交通，統合均衡
** 正会員 工博 豊橋技術科学大学 知識情報工学系
(〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1
E-mail:akamatsu@tutkie.tut.ac.jp)
*** 学生会員 豊橋技術科学大学 知識情報工学専攻

2. Nested LOGIT 型の確率的交通ネットワーク均衡モデル

本節では，Nested LOGIT 型の（需要変動型）確率的交通ネットワーク均衡モデルの解法について考察する．なお，本節で示すモデルは，[1]で示されたものと基本的に同じである（モデルの詳細は[1]を参照）．

2.1 モデルの定式化

交通ネットワーク利用者の選択行動が，上位階層を目的地選択，下位階層を経路選択とする Nested LOGIT モデルによって表現されるとする．ここで，目的地選択における効用は “OD ペア固有の効用－移動コスト”，経路選択における効用は “－経路コスト” で表されると仮定すると，目的地および経路の選択確率は，それぞれ以下の式で与えられる．

$$P(r|d,o)=\frac{\exp\left[-\theta C_r^{od}\right]}{\sum_r \exp\left[-\theta C_r^{od}\right]} \quad \forall r,od \qquad (1)$$

$$P(d|o)=\frac{\exp\left[\zeta\left(V_{od}-S_{od}\right)\right]}{\sum_d \exp\left[\zeta\left(V_{od}-S_{od}\right)\right]} \quad \forall d \qquad (2)$$

ここで，$P(r|d,o)$：経路 r の選択確率，$P(d|o)$：目的地 d の選択確率，C_r^{od}：ODペア od の経路 r の交通コスト，V_{od}：ODペア固有の効用（魅力度），$S_{od}(\mathbf{C}^{od})$：ODペア od の期待最小費用，θ,ζ：選択の分散を示すパラメータである．

このとき，発生交通量 O_o を所与とした際のOD交通量の期待値および経路交通量の期待値は，

$$q_{od}=O_o P(d|o) \quad \forall od \qquad (3)$$

$$f_r^{od}=q_{od}P(r|d,o) \quad \forall r,od \qquad (4)$$

となる．ここで，q_{od} はODペア od の交通量期待値，f_r^{od} はODペア od の経路 r の交通量期待値である．また，リンク変数と経路変数の間には以下の関係が成立

する：

$$x_{ij} = \sum_r f_r^{od}\ \delta_{ij,r}^{od} \qquad (5)$$

$$C_r^{od} = \sum_{ij} t_{ij}\ \delta_{ij,r}^{od} \qquad (6)$$

ここで，x_{ij} はリンク ij の交通量，$\delta_{ij,r}^{od}$ はリンク－経路接続行列（リンク ij がODペア od の経路 r 上にあるなら1，そうでなければ0）である．

なお，リンクコスト t_{ij} は交通量の単調増加関数：

$$t_{ij} = t_{ij}(x_{ij}) \qquad (7)$$

で決定されるものとする．以上の関係式(1)～(7)を同時に満たした状態を Nested LOGIT 型の交通ネットワーク均衡（NL-TNE: Nested Logit based Transportation Network Equilibrium）モデルと呼ぶ．

2.2 等価な最適化問題

2.2.1 等価最適化問題

前節に示した定式化は大規模な非線形連立方程式となっているため，直接的に解析を行ったり，均衡解を求めることは困難である．しかし，従来の研究[1,2]により，このモデルは以下のような数理計画問題[NL-TNE-Path]と等価であることが知られている：

$$\min . Z_1 \equiv ZV(\mathbf{x},\mathbf{q}) - ZH_f(\mathbf{f},\mathbf{q}) - ZH_q(\mathbf{q}) \qquad (8)$$

subject to

$$O_o = \sum_d q_{od} \quad \forall o \qquad (9)$$

$$q_{od} = \sum_r f_r^{od} \quad \forall od \qquad (10)$$

$$f_r^{od} \geq 0 \quad \forall r, od \qquad (11)$$

and (5),

where

$$ZV(\mathbf{x},\mathbf{q}) \equiv \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) d\omega - \sum_{od} q_{od} V_{od} \qquad (12)$$

$$ZH_f(\mathbf{f},\mathbf{q}) \equiv -\frac{1}{\theta} \sum_{od} \sum_r f_r^{od} \ln\left(f_r^{od} / q_{od}\right) \qquad (13)$$

$$ZH_q(\mathbf{q}) \equiv -\frac{1}{\zeta} \sum_{od} q_{od} \ln\left(q_{od} / O_o\right) \qquad (14)$$

以下では，この問題の解の一意性，および NL-TNE モデルとの等価性を確認する．

2.2.2 解の一意性と等価性

(1)[NL-TNE-Path]の解の一意性

問題[NL-TNE-Path]の目的関数の $\mathbf{f}$ に関する項は，第１項と第２項である．第１項は $\mathbf{f}$ に関する線形関数（凸関数），第２項は（エントロピー関数の狭義凹性から）狭義凸関数である．したがって，その和である目的関数は $\mathbf{f}$ に関して狭義凸関数である．また，$\mathbf{q}$ に関しても，第１項は線形関数であり，第２項および第３項は狭義凸関数である．よって，目的関数は$(\mathbf{f},\mathbf{q})$に関して狭義凸関数である．次に，制約条件は$(\mathbf{f},\mathbf{q})$に関する非負条件と線形等式であるから，$(\mathbf{f},\mathbf{q})$の許容領域は，明らかに閉凸集合である．よって，[NL-TNE-Path]は狭義凸計画問題であり，$(\mathbf{f},\mathbf{q})$に対して大域的に唯一の解を持つ．

(2)[NL-TNE-Path]と NL-TNE モデルの等価性

[NL-TNE-Path]の解が，NL-TNE モデルと等価であることを確認するためには，この問題の最適性の必要十分条件が NL-TNE モデルの定式化(1)～(7)となることをみればよい．

この問題は凸計画問題であるから，以下のような Kuhn-Tucker 条件が，最適性の必要十分条件となる．

$$f_r^{od} \frac{\partial L}{\partial f_r^{od}} = 0 \ \text{ and } \ \frac{\partial L}{\partial f_r^{od}} \geq 0 \quad \forall r, od \qquad (14)$$

$$q_{od} \frac{\partial L}{\partial q_{od}} = 0 \ \text{ and } \ \frac{\partial L}{\partial q_{od}} \geq 0 \quad \forall od \qquad (15)$$

$$q_{od} \geq 0 \quad \forall od \qquad (16)$$

and (3), (4), (11).

ここで，L は，以下のように定義される Lagrangian である．

$$L(\mathbf{f},\mathbf{q},\mathbf{S}^*,\mu^*) \equiv Z_1 + \sum_{od} S_{od}^* \left\{ q_{od} - \sum_r f_r^{od} \right\} + \sum_o \mu_o^* \left\{ O_o - \sum_d q_{od} \right\} \qquad (17)$$

$(\mathbf{f},\mathbf{q})$が正値であると仮定すると，最適条件(14)～(17)は

$$f_r^{od} = q_{od} \frac{\exp\left[-\theta C_r^{od}\right]}{\sum_r \exp\left[-\theta C_r^{od}\right]} \quad \forall r, od \qquad (18)$$

$$q_{od} = O_o \frac{\exp\left[\zeta\left(V_{od} - S_{od}\right)\right]}{\sum_d \exp\left[\zeta\left(V_{od} - S_{od}\right)\right]} \quad \forall d \qquad (19)$$

に帰着する．これらは NL-TNE モデルの定義式と全く同一である．以上より，[NL-TNE-Path]の最適解は，NL-TNE モデルと等価であることが示された．

2.2.3 等価最適化問題のリンク変数による表現

[NL-TNE-Path]は，経路変数を含んでいるため，実際規模のネットワークでは，そのままの形式で扱うことは困難である．しかし，固定需要型の確率的均衡配分の場合[4]と全く同様にして，経路変数をリンク変数に分解した問題を考えることができる．すなわち，[NL-TNE-Path]は，起点別リンク交通量$\{x_{ij}^{o}\}$で表現された以下の問題[NL-TNE-Arc]と等価である：

$$\min . Z_2 \equiv ZV(\mathbf{x},\mathbf{q}) - ZH_x(\mathbf{x}) - ZH_q(\mathbf{q}) \tag{20}$$

subject to

$$\sum_i x_{ik}^{o} - \sum_j x_{kj}^{o} + \sum_d q_{od}\delta_{ok} - q_{od}\delta_{dk} = 0 \quad \forall k, od \tag{21}$$

$$x_{ij} = \sum_o x_{ij}^{o} \quad \forall ij \tag{22}$$

$$x_{ij}^{o} \geq 0 \quad \forall ij, o \tag{23}$$

and (9),

where

$$ZH_x(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\theta}\sum_o \left\{ HL(\mathbf{x}^{o}) - HN(\mathbf{x}^{o}) \right\} \tag{24a}$$

$$HL(\mathbf{x}^{o}) \equiv -\sum_{ij} x_{ij}^{o} \ln x_{ij}^{o} \tag{24b}$$

$$HN(\mathbf{x}^{o}) \equiv -\sum_j (\sum_i x_{ij}^{o}) \ln(\sum_i x_{ij}^{o}) \tag{24c}$$

この問題に対する一意性および NL-TNE モデルとの等価性は，[NL-TNE-Path]の場合と同様に確認することができるが，ここでは省略する．

2.3 アルゴリズム

数理計画問題[NL-TNE-Arc]は，一般ネットワークでの取り扱いが困難な経路変数を含んでいないため，標準的な network programming のための解法を応用して効率的に解くことができる．以下では，それらの中でも，計算手順が比較的単純でかつ効率的な部分線形化(Partial Linearization)アルゴリズム[9]を適用する場合を考える．

2.3.1 部分線形化アルゴリズム

部分線形化アルゴリズムのアウトラインは，Frank-Wolfe 法とほぼ同じであり，相違点は，降下方向ベクトルを決定するために解く補助問題のみである．すなわち，以下のような流れとなる：

Step.0: (初期許容解を求める)

繰り返し回数 n:=1;

初期許容解 $\mathbf{X}^1$ を求める．

Step.1: (降下方向ベクトルを求める)

元の問題を部分線形近似した*補助問題*を解き，その解を $\mathbf{X}^{sub}$ とする．

降下方向ベクトル $\mathbf{d}:=\mathbf{X}^{sub}-\mathbf{X}^{n}$.

Step.2: (１次元探索)

以下の１次元最適化問題を解き，ステップサイズαを求める．

$$\min . Z_2(\mathbf{X}^n + \alpha\mathbf{d}) \qquad \text{subject to} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Step.3: (解の改定)

$\mathbf{X}^{n+1}:=\mathbf{X}^{n}+\alpha\mathbf{d}$;

Step.4: (収束判定)

収束していれば終了．そうでなければ，$n:=n+1$ として Step.1 へ．

Frank-Wolfe 法では，元の問題を線形近似した補助問題を考えるが，部分線形化アルゴリズムでは，部分的に線形化された問題を考える．この方法は，非線形項を考慮するため Frank-Wolfe 法よりも収束が速く，補助問題が効率的に解けるなら，全体としても効率的に解けることは明らかである．

また，凸計画問題に対して，一般的な部分線形化アルゴリズムが厳密解に大域的に収束することは，Patriksson[10]により証明されている．

2.3.2 部分線形近似問題とその効率的な解法

上記のアルゴリズム Step 中の未知変数 $\mathbf{X}$ は，[NL-TNE-Arc]に適用する場合， $\mathbf{X}=(\mathbf{x},\mathbf{q})$である．このアルゴリズムの適用が成功するためには，Step 1 の補助問題の未知変数 $\mathbf{X}^{sub}=(\mathbf{x}^{sub}, \mathbf{q}^{sub})$を効率的に求めることが重要である．以下では，その効率的解法を考える．

問題[NL-TNE-Arc]に対して，リンクコスト関数積分項のみを線形近似した補助問題を考えると，n 回目の繰り返しにおける補助問題は，

$$\min . Z_2^{sub} \equiv \mathbf{t}^n \cdot \mathbf{x}^{sub} - ZH_x(\mathbf{x}^{sub}) - ZH_q(\mathbf{q}^{sub}) \tag{25}$$

subject to (21)～(23) and (9),

$$\text{where} \quad \mathbf{t}^n \equiv \mathbf{t}(\mathbf{x}^n) \tag{26}$$

となる．これは，*flow independent な Nested LOGIT 型確率配分* の等価最適化問題である．したがって，補助問題の解 $\mathbf{X}^{sub}$ は以下の手順で容易に求めることができることがわかる：

1) リンクコストパターン $\mathbf{t}^n$ に対する期待最小費用 $\mathbf{S(C(t^n))}$を計算する.

2) 1) で得られた $\mathbf{S(C(t^n))}$を用いて，補助ＯＤ交通量 $\mathbf{q}^{sub}\mathbf{(V,S)}$を式(2),(3)により計算.

3) リンクコストパターン $\mathbf{t}^n$および 2)で得られた補助ＯＤ交通量 $\mathbf{q}^{sub}$ を用いて LOGIT 型確率的配分を行い，その結果を補助リンク交通量 $\mathbf{X}^{sub}$ とする.

1)で行う期待最小費用の評価には，entropy 関数との共役関係式[8,1,2]および経路選択 entropy の分解表現[1,2,4]を用いればよい．この方法を用いれば，経路の列挙を避けることができ，大規模ネットワークでも容易に計算可能となる.

ここで注意すべき点は，3)で行う LOGIT 型確率的配分である．これは，よく知られている Dial のアルゴリズムを用いて容易に計算できそうにみえる．しかし，それでは必ずしも厳密解への収束は保証されない．実際，Dial のアルゴリズムを利用する逐次平均法[11]では振動を起こしてしまうことが報告されている．その理由は以下の通りである．Dial のアルゴリズムでは，*"efficient paths"* のみに配分対象経路が限定される．この *efficient paths* は，リンクコストパターン $\mathbf{t}^n$ に応じて決まるため，繰り返し計算のたびに（$\mathbf{t}^n$が変化し）配分対象経路が変化する．その結果，アルゴリズム写像の連続性（closedness）が保証されず，一般的にはその収束も保証されないのである.

この問題を回避するためには，Markov 連鎖によるアルゴリズム[3,5]を利用すればよい．この方法では，配分対象経路はリンク・コスト・パターンによらず一定であるため，収束が保証される．また，計算量も Dial のアルゴリズムとほぼ同じ程度で済む.

3. Nested LOGIT 型の立地・交通確率均衡モデル

本節では，前節の NL-TNE モデルの拡張とみなすことのできる Nested LOGIT 型の立地・交通確率均衡モデルの解法について考察する．そのモデルは，基本的には Anas[6]の住居立地・交通統合均衡モデルと同様である．ただし，[6]では，居住地及び交通経路の２種類の選択行動が LOGIT モデルで同時選択として扱われており，やや不自然な構造となっている．そこで，本稿では，より自然な Nested LOGIT モデルに修正した場合を扱う.

3.1 モデルの定式化

本モデルは，a)消費者の居住地・交通経路選択行動，b)家主の選択行動，c)交通ネットワーク条件；の各々を表現する３つのサブ・モデルに加え，交通サブモデルと立地サブモデルをリンクさせるための d)住宅需要と住宅供給の一致条件から成る．これらのサブ・モデル（各主体とその行動）の間の関係を図１に示す.

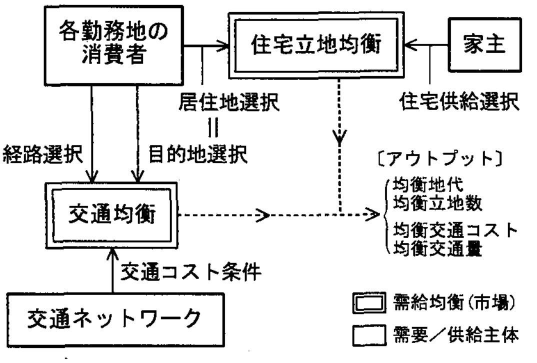

図１ 交通・立地均衡モデルの主体間の関係

以下では，これらのサブモデル等の定式化を順に示す.

a)消費者の選択行動

消費者の勤務地は所与であるとし，居住地選択と勤務地－居住地間の交通経路選択の２種類の選択行動を考える．そして，第２節で示した NL-TNE モデルでの目的地が居住地に対応するものとする（出発地は所与の勤務地）．このとき，居住地と経路の選択確率はそれぞれ，第２節の式(1),(2)で与えられ，ＯＤ交通量，経路交通量はそれぞれ，式(3),(4)で与えられる．ただし，各居住地ゾーンの住宅は均質であると仮定し，式(2)の中のＯＤペア固有の確定的効用 V_{od}は，

$$V_{od} \equiv \overline{U}_{od} - \alpha\rho_d \tag{27}$$

で与えられるものとする．ここで，ρ_d：居住地 d の地代（立地・交通市場均衡条件から決まる内生変数），α：消費者の地代限界不効用パラメータ，$\overline{U}_{od}$ ：地代と交通費用を除く OD ペア od 固有の効用(外生変数).

b)家主の選択行動

住宅を供給する家主は，住宅を貸した場合の利益と空き家のままにしておく場合の利益を比較して所有する住宅を貸し出すかどうかを選択する．その住宅貸し出し確率は，以下の式で与えられる：

$$p_d = \frac{\exp[\eta\pi_{d1}]}{\exp[\eta\pi_{d0}] + \exp[\eta\pi_{d1}]} \quad \forall d \tag{28}$$

$$\pi_{d0} \equiv -c_{d0}, \quad \pi_{d1} \equiv \beta\rho_d - c_{d1} \tag{29}$$

ここで,

π_{d0} : 空き家にする場合の利益,

π_{d1} : 貸し出す場合の利益,

c_{d0} : 空き家にする場合の維持費用(外生変数),

c_{d1} : 貸し出す場合の維持費用(外生変数),

β : 家主の, 地代の限界収益率パラメータ,

η : 選択の分散パラメータ

である. 従って, 居住地 d に存在する総住宅数 (外生変数) を D_d とすれば, d における住宅貸し出し数は

$$y_d = D_d \cdot p_d \quad \forall d \tag{30}$$

により与えられる.

c)交通ネットワーク (交通供給条件)

交通ネットワークは第2節の設定と全く同じであり, 式(5)~(7)が成立している.

d)住宅需要と住宅供給の一致条件

簡単のため, 各家計の勤務者(通勤者)は1人であると仮定すれば, 居住地 d での住宅需要はそこからの(通勤) 発生交通量に等しくなる. よって, 住宅需要と住宅供給の一致条件は以下のように表される:

$$\sum_d q_{od} = y_d \quad \forall d \tag{31}$$

以上の a)~d)の条件が満たされた状態を, Nested LOGIT 型の住居立地・交通確率均衡(NL-LTE: Nested Logit based Location-Transportation Equilibrium)モデルと呼ぶ.

3.2 等価な最適化問題とモデルの特性解析

3.2.1 等価最適化問題

非線形連立方程式(1)~(7)および(27)~(31)として定式化された立地・交通統合均衡モデルは, 以下の数理計画問題[NL-LTE-Path]と等価である.

$$\min. Z_3 \equiv \left\{ZU(\mathbf{x},\mathbf{q}) - ZH_f(\mathbf{f},\mathbf{q}) - ZH_q(\mathbf{q})\right\}/\alpha$$

$$+\left\{ZC(\mathbf{y}) - ZH_y(\mathbf{y})\right\}/\beta \tag{32}$$

subject to (5), (9), (10), (11), (31).

ここで

$$ZU(\mathbf{x},\mathbf{q}) \equiv \sum_{ij}\int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega)d\omega - \sum_{od} q_{od}\overline{U}_{od} \tag{33}$$

$$ZC(\mathbf{y}) \equiv \sum_d (c_{d1} - c_{d0})y_d \tag{34}$$

$$ZH_y(\mathbf{y}) \equiv -\frac{1}{\eta}\sum_d \left\{y_d \ln y_d + (D_d - y_d)\ln(D_d - y_d)\right\} \tag{35}$$

3.2.2 解の一意性と等価性

(1)[NL-LTE-Path]の解の一意性

問題[NL-LTE-Path]の目的関数の, $\mathbf{f}$ に関する項および $\mathbf{q}$ に関する項は, 係数 $1/\alpha$ が乗じてある以外は[NL-TNE-Path]の目的関数とほぼ同じである. 従って, [NL-LTE-Path]の目的関数は$(\mathbf{f},\mathbf{q})$に関して狭義凸関数であることが直ちにいえる. また, $\mathbf{y}$ に関しても, $ZC(\mathbf{y})$は線形関数であり, $ZH_y(\mathbf{y})$は狭義凸関数である. よって, 目的関数は$(\mathbf{f},\mathbf{q},\mathbf{y})$に関して狭義凸関数である. さらに, 制約条件は非負条件と線形等式であるため, $(\mathbf{f},\mathbf{q},\mathbf{y})$の許容領域は閉凸集合である. 従って, [NL-LTE-Path]は狭義凸計画問題であり, $(\mathbf{f},\mathbf{q},\mathbf{y})$に対して大域的に唯一の解を持つ.

(2)[NL-LTE-Path]と NL-LTE モデルの等価性

[NL-TNE-Path]の場合と同様に, この問題の最適性の必要十分条件が NL-LTE モデルの定式化となることを確認する.

この問題は凸計画問題であるから, 以下のような Kuhn-Tucker 条件が, 最適性の必要十分条件となる.

$$f_r^{od}\frac{\partial L}{\partial f_r^{od}} = 0 \text{ and } \frac{\partial L}{\partial f_r^{od}} \geq 0 \quad \forall r, od \tag{36}$$

$$q_{od}\frac{\partial L}{\partial q_{od}} = 0 \text{ and } \frac{\partial L}{\partial q_{od}} \geq 0 \quad \forall od \tag{37}$$

$$y_d\frac{\partial L}{\partial y_d} = 0 \text{ and } \frac{\partial L}{\partial y_d} \geq 0 \quad \forall d \tag{38}$$

$$y_d \geq 0 \quad \forall d \tag{39}$$

and (11), (16).

ここで, L は, 以下のように定義される Lagrangian である.

$$L(\mathbf{f},\mathbf{q},\mathbf{y},\mathbf{S}^*,\mu^*,\rho^*) \equiv Z_3 + \sum_{od} S_{od}^*\left\{q_{od} - \sum_r f_r^{od}\right\}$$

$$+\sum_o \mu_o^*\left\{O_o - \sum_d q_{od}\right\} + \sum_d \rho_d^*\left\{y_d - \sum_o q_{od}\right\} \tag{40}$$

$\mathbf{f}$ については第2節での議論と全く同じであるため省略する. $q_{od} > 0\ \forall od$, $y_d > 0\ \forall d$ とすると, Lagrange 乗数$\mathbf{S}^*, \mu^*$ は最適条件式よりそれぞれ

$$S_{od}^* = \frac{1}{\theta}\left\{-\ln\sum_r \exp\left[-\theta C_r^{od}\right] + \ln q_{od} + 1\right\} \tag{41}$$

$$\mu_o^* = \frac{1}{\zeta}\left\{-\ln\sum_d \exp\left[\zeta(\rho_d^* - S_{od})\right] + \ln O_o + 1\right\} \tag{42}$$

と表わされ, OD交通量 $\mathbf{q}$ および住居貸出しパターン

y は，次のようなロジット・モデル型の式で与えられる．

$$q_{od} = O_o \frac{\exp\left[\zeta\left(V_{od} - S_{od}\right)\right]}{\sum_d \exp\left[\zeta\left(V_{od} - S_{od}\right)\right]} \quad \forall d \tag{44}$$

$$y_d = D_d \frac{\exp\left[\eta \pi_{d1}\right]}{\exp\left[\eta \pi_{d0}\right] + \exp\left[\eta \pi_{d1}\right]} \quad \forall d \tag{45}$$

これらはNL-LTEモデルの定義式と全く同一である．以上より，[NL-LTE-Path]の最適解は，NL-LTEモデルと等価であることが示された．

3.2.3 等価最適化問題のリンク変数による表現

[NL-LTE-Path]についても，第2節での議論と同様にして経路変数をリンク変数に分解した最適化問題を考えることができる．すなわち，[NL-LTE-Path]は，起点別リンク交通量$\{x_{ij}^o\}$で表現された以下の問題[NL-LTE-Arc]と等価である：

$$\min. Z_4 \equiv \left\{ZU(\mathbf{x},\mathbf{q}) - ZH_x(\mathbf{x}) - ZH_q(\mathbf{q})\right\}/\alpha + \left\{ZC(\mathbf{y}) - ZH_y(\mathbf{y})\right\}/\beta \tag{46}$$

subject to (9), (21), (22), (23), (31)

この問題の一意性および NL-TNE モデルとの等価性の確認は，省略する．

3.2.4 双対問題

問題[NL-LTE]は，flow 変数$(\mathbf{x},\mathbf{f},\mathbf{q},\mathbf{y})$のみを未知変数としており，均衡地代等の price 変数は明示的に現れない．[NL-LTE]の最適化条件から明らかなように，それらは制約条件の Lagrange 乗数となっている．従って，price 変数（リンクコスト $\mathbf{t}$ および地代ρ）を直接的に求めたい場合には，以下の双対問題[NL-LTE-Dual]を考えればよい：

$$\min. Z_5 \equiv \left\{ZT(\mathbf{t}) + ZO(\mathbf{t},\rho)\right\}/\alpha + ZD(\rho)/\beta \tag{47}$$

where

$$ZT(\mathbf{t}) \equiv \sum_{ij} \int_{t_{ij}(0)}^{t_{ij}} t_{ij}^{-1}(\nu)d\nu \tag{48}$$

$$ZO(\mathbf{t},\rho) \equiv \sum_o O_o S_o^{(C)}(\mathbf{t},\rho) \tag{49}$$

$$ZD(\rho) \equiv \sum_d D_d S_d^{(H)}(\rho) \tag{50}$$

$$S_{od}(\mathbf{t}) \equiv -\frac{1}{\theta}\ln\sum_r \exp\left[-\theta C_r^{od}(\mathbf{t})\right] \tag{51}$$

$$S_o^{(C)}(\mathbf{t},\rho) \equiv \frac{1}{\zeta}\ln\sum_d \exp\left[\zeta\left\{V_{od}(\rho_d) - S_{od}(\mathbf{t})\right\}\right] \tag{52}$$

$$S_d^{(H)}(\rho_d) \equiv \frac{1}{\eta}\ln\sum_{m=0}^{1} \exp\left[\eta \pi_{dm}(\rho_d)\right], \tag{53}$$

$t_{ij}^{-1}(\cdot)$ ：リンクコスト関数の逆関数．

3.3 モデルの解法

3.3.1 部分線形化アルゴリズムによる解法

[NL-LTE-Arc]も，第2節の場合と同様，部分線形化アルゴリズムで効率的に解くことができる．この場合の，元の問題の未知変数 $\mathbf{X}$ および補助問題の未知変数 $\mathbf{X}^{sub}$ は，　$\mathbf{X}=(\mathbf{x},\mathbf{q},\mathbf{y})$, $\mathbf{X}^{sub}=(\mathbf{x}^{sub},\mathbf{q}^{sub},\mathbf{y}^{sub})$であり，$n$ 回目の繰り返しにおける部分線形化問題は，リンクコスト関数を $\mathbf{t}^n \equiv \mathbf{t}(\mathbf{x}^n)$ におきかえた形式の問題：

$$\min. Z_4^{sub} \equiv \left\{\mathbf{t}^n \cdot \mathbf{x}^{sub} - ZH_x(\mathbf{x}^{sub}) - ZH_q(\mathbf{q}^{sub})\right\}/\alpha + \left\{ZC(\mathbf{y}^{sub}) - ZH_y(\mathbf{y}^{sub})\right\}/\beta \tag{54}$$

subject to (9), (21)～(23) and (31)

となる．しかし，この問題は制約条件が複雑なため，closed form では解くことができない．そこで，上の部分線形化問題の双対問題：

$$\min. Z_5^{sub} \equiv ZO(\mathbf{t}^n, \rho^{sub})/\alpha + ZD(\rho^{sub})/\beta \tag{55}$$

を解き，その解を用いて主問題の解を求める．具体的には，以下のような手順によってρ^{sub}と$(\mathbf{x}^{sub},\mathbf{q}^{sub})$を求めることができる．

1) リンクコストパターン $\mathbf{t}^n$ に対する期待最小費用 $\mathbf{S}(\mathbf{C}(\mathbf{t}^n))$を計算．
2) 部分線形化問題の双対問題(55)を Newton 法で解き，地代ベクトルρ^{sub}を求める．
3) 2)で得られたρ^{sub}を用いて，補助住居貸出し数 $\mathbf{y}^{sub}$ を式(27)-(30)により計算．
4) 1)で求めておいた$\mathbf{S}(\mathbf{C}(\mathbf{t}^n))$および 2)で得られた$\rho^{sub}$を式(2),(3)に代入して，補助ＯＤ交通量 $\mathbf{q}^{sub}$ を計算．
5) リンクコストパターン$\mathbf{t}^n$および 4)で得られた補助ＯＤ交通量 $\mathbf{q}^{sub}$ を用いて LOGIT 型確率的配分を行い，その結果を補助リンク交通量 $\mathbf{X}^{sub}$ とする．

手順 1)の期待最小費用 $S_{od}(\mathbf{t}^n)$ の計算は 2.3.2 で述べた方法で効率的に行える．2)では，$S_{od}(\mathbf{t}^n)$ の計算をあ

らかじめ行っているので目的関数値の計算も容易である．したがって，問題(55)は特に困難な点のない単純な制約条件なし最適化問題となるため，準ニュートン法などの手法により容易に解を求めることができる．また，手順 3), 4), 5)での計算結果は，必ず許容解となっている．なぜなら，式(9),(21)〜(23)は，選択確率式から明らかに満たされ，また，手順 2)の双対問題で得られる最適地代ρ は，需給均衡式(31)を必ず満たすからである．

3.3.2 ネットワーク変換による解法

3.3.1 では，問題[NL-LTE]を部分線形化アルゴリズムによって解く手法を説明した．ここでは，別のアプローチとして，ネットワーク変換を行うことによって第２節の問題と同様の手順で解く手法を示す．

まず，[NL-LTE]の目的関数中の住宅供給者の選択行動に関する項$ZC(\mathbf{y})-ZH_y(\mathbf{y})$に注目しよう．これは，供給住宅 y_d に関する住宅供給関数の逆関数を積分したものとして表すことができる．すなわち，目的関数式(32)は，

$$\min.Z_6 \equiv \left\{ZU(\mathbf{x},\mathbf{q})-ZH_x(\mathbf{x})-ZH_q(\mathbf{q})\right\}/\alpha - \frac{1}{\beta}\sum_d \int_0^{y_d} Y_d^{-1}(\omega)d\omega \tag{56}$$

where

$$Y_d^{-1}(y_d) \equiv -\frac{1}{\eta}\ln\left\{\frac{y_d}{D_d-y_d}\right\}-(c_{d1}+c_{d0}) \tag{57}$$

となる．さらに，

$$w(y_d) \equiv Y_d^{-1}(D_d-y_d) \tag{58}$$

と定義すれば，住宅供給者の選択行動に関する項は，単調増加な(仮想的) “リンクコスト関数” の積分項とみなすことができる．

従って，式(58)のような “リンクコスト関数” をもつリンクが各居住地毎にあると考えれば，供給住宅数 y_{d1} は “リンク交通量” として扱うことができる．つまり，元のネットワークの各終点 d に対応したダミー・ノード d'および式(58)のリンクコスト関数 $\mathbf{w}(\mathbf{y})$を持つダミー・リンク $d\rightarrow d'$を付加した図２のような変換ネットワークを考えると，NL-LTE モデルは，NL-TNE モデルと同様の，発生交通量制約付きの変動需要型均衡モデルに変換することができる．変動需要型モデルに変換した後は，第２節のアルゴリズムなどを用いて解くことができる．

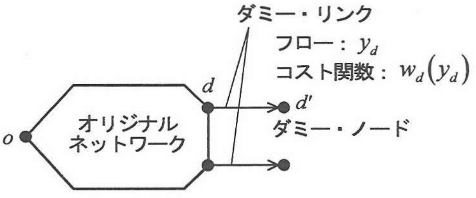

図２ 変動需要型モデルへの NL-TNE の変換

4. 数値実験

3.3 で示した，アルゴリズムの効率性を確認するために，実際規模のネットワークで数値実験を行った．

4.1 実験条件

実験ネットワークには，[13]に示されている Sioux Fall City 道路網(24nodes, 76links)を用いた．また，リンクコスト関数およびそのパラメータは，[13]に示されているもの(BPR 関数)と全く同じである．すべてのノードは起点かつ終点であるとし，発生交通量 O_o には[13]の計算例で使われているＯＤ交通量を起点毎に合計した値を，居住地 d の総住宅数 D_dには[13]中のＯＤ交通量を終点毎に合計した値を 1.2 倍した数値を使用した．各種パラメータ値については，系統的に変化させ収束までの反復回数を計測した．

収束判定には，リンク交通量／ＯＤ交通量／住居貸し出し数の，各繰り返し毎の “最大変化率” ：

$$\max_{ij}\left\{\frac{\left|x_{ij}^{(n)}-x_{ij}^{(n-1)}\right|}{x_{ij}^{(n-1)}}\right\},\ \max_{od}\left\{\frac{\left|q_{od}^{(n)}-q_{od}^{(n-1)}\right|}{q_{od}^{(n-1)}}\right\},\ \max_{d}\left\{\frac{\left|y_{d}^{(n)}-y_{d}^{(n-1)}\right|}{y_{d}^{(n-1)}}\right\}$$

を用い，これらが所与の収束判定定数より小さくなった場合に反復を終了するものとした．

4.2 実験結果

図４〜図７は，θ=100 (1/hr.), ζ=5 (1/hr.), α=1, β=1, η=1 とした場合の，アルゴリズムの収束状況を示したものである．

まず，図４は，目的関数の減少の様子を表している．目的関数値は反復ごとに減少し，15 回目からはほとんど変化していない．

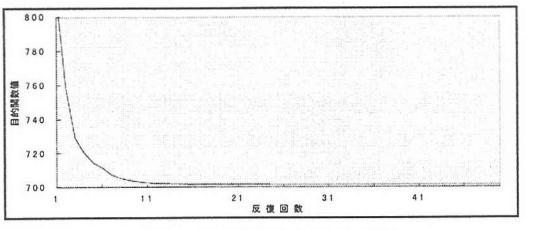

図４ 目的関数の収束状況

図 5～図 7 は，未知変数(y,q,x)の最大変化率の推移を示したものである．住居貸し出し数 **y** およびＯＤ交通量 **q** の最大変化率は十数回程度の反復で 1%未満になっている．リンク交通量 **x** については，約 20 回の反復で最大変化率が 5%未満となった．

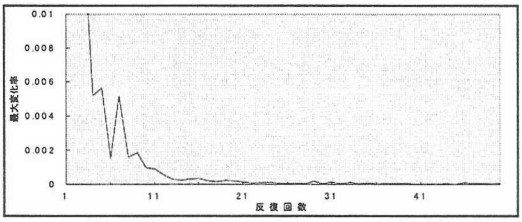

図５ 住居貸し出し数の最大変化率

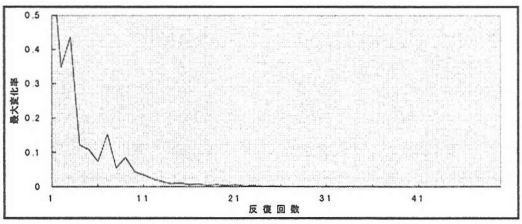

図６ ＯＤ交通量の最大変化率

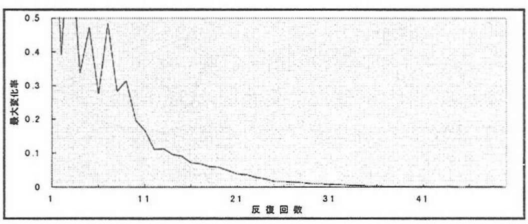

図７ リンク交通量の最大変化率

紙面の制約により詳細については述べられないが，他のパラメータ・パターンの場合についても同様の結果が得られた．このことから，このアルゴリズムは効率的に収束することがわかる．

5.まとめと今後の課題

本研究では，Nested LOGIT 型ランダム効用モデルに基づいた交通統合均衡モデルおよび交通・立地統合均衡モデルの厳密解法を示した．得られた結果をまとめると以下の通りである．

1) Nested LOGIT 型確率的交通ネットワーク均衡モデルに対して：
  - モデルの定式化と等価最適化問題の構築を行い，解の一意性と等価性を確認した．
  - 経路変数による等価最適化問題を，リンク変数による表現に置き換えることが可能であることを示した．
  - 厳密解への収束が保証された，大規模問題に適用可能なアルゴリズムを開発した．

2) 1)のモデルに住宅均衡モデルを加えた交通・立地の統合均衡モデルに対して：
  - モデルの定式化と等価最適化問題の構築を行い，解の一意性と等価性を確認した．
  - 厳密解への収束が保証された，大規模問題に適用可能なアルゴリズムを開発した．

参考文献

[1] 赤松隆・松本嘉司, “需要変動を考慮した交通ネットワーク確率的利用者均衡モデルとその解法”, 土木学会論文集Ⅳ-10, pp.109-118, 1989.

[2] 赤松隆, *確率的均衡アプローチによる交通ネットワーク統合モデル*, 東京大学博士論文, 1990.

[3] T.Akamatsu, “Cyclic Flows, Markov Process and Transportation Stochastic Assignment”, to appear in *Transportation Research Part B*, 1996.

[4] T.Akamatsu, “Decomposition of Path Choice Entropy in General Transport Networks”, to appear in *Transportation Science*, 1996.

[5] 赤松隆・牧野幸雄, “経路を限定しない確率的均衡配分”, 土木計画学・講演集 18(2), pp.712-720, 1995.

[6] A.Anas, “The Combined Equilibrium of Travel Network and Residential Location Markets”, *Regional Science and Urban Economics* 15, pp.1-21, 1985.

[7] M.Los and S.Nguyen, “Solution Algorithms for a Combined Residential Location and Transportation Model”, *Environment and Planning* A15, pp.515-524, 1983.

[8] 宮城俊彦・加藤晃, “ランダム効用理論を基礎とした交通統合モデル”, 土木計画学研究・論文集, No.1, pp.99-106, 1985.

[9] T.Miyagi, “A Combined Residential-Location and Transportation Network Equilibrium Model”, *Proc. of the 5th WCTR*, pp.123-137, 1989.

[10] M.Patricksson, “Partial Linearization Methods in Nonlinear Programming”, *Journal of Optimization Theory and Applications* 78, pp.227-246, 1993.

[11] W.B.Powell and Y.Sheffi, “The Convergence of Equilibrium Algorithms with Predetermined Step Sizes”, *Transportation Science* 16, pp.45-55, 1982.

[12] A.G.Willson et al., *Optimization in Location and Transport Analysis*, John-Willey & Sons, 1981.

[13] L.J.LeBranc et al., “An efficient approach to solving the road network equilibrium traffic assignment problem”, *Transportation Research* 9, pp.309-318, 1975.

Nested LOGIT 型交通・住居立地統合均衡モデルとその効率的解法

赤松 隆・半田正樹

本研究の目的は，Nested LOGIT 型の交通ネットワーク均衡モデルおよび交通・住居立地統合均衡モデルの解法を示すことである．まず，Nested LOGIT 型確率的交通均衡モデルに対し，等価最適化問題の構築とモデルの基本特性の解析を行い，大規模ネットワークに適用可能なアルゴリズムを開発した．次に，このモデルを拡張して得られる交通・住居立地統合均衡モデルが考察される．具体的には，モデルの flow 変数と price 変数の両面に対応した 2種類の等価な最適化問題が示され，効率的なアルゴリズムが提案される．最後に，実際規模のネットワークに対して数値実験を行い，アルゴリズムの効率性を確認した．

Efficient Algorithms for Solving Nested LOGIT type Combined Residential-Location and Transportation Network Equilibrium Models

by Takashi AKAMATSU and Masaki HANDA

The purpose of this study is to present some efficient algorithms for solving the nested LOGIT type combined residential-location and transportation network equilibrium model. Preliminary to the analyses of the combined location and transportation model, we first formulate the nested LOGIT type transportation network equilibrium problem as a mathematical programming. The uniqueness and equivalence of the solution are proved and an efficient algorithm that can be applied to large scale networks is presented. Then, the model above is extended to the combined residential-location and transportation equilibrium model. Based on the equivalent mathematical programming formulation of the model, we develop some efficient algorithms that are proved to converge to the equilibrium solution. Finally, the efficiency of the proposed algorithms is examined by numerical experiments.