【土木計画学研究・論文集 No.11 1993年12月】

ラグランジュ緩和法を用いた容量制約のないネットワーク計画問題の解法*

A Solution Method for a Uncapacitated Network Design Problem Using a Lagrangean Relaxation Method

片山 直登** 岩田実*** 柳下和夫**** 三原一郎† 今澤明男‡

by Naoto KATAYAMA, Minoru IWATA, Kazuo YANAGISHITA, Ichiro MIHARA, Akio IMAZAWA

Given a uncapacitated network , a uncapacitated network design problem consists in selecting a subset of links that minimizes the sum of total flow costs and total link design costs. We propose a lower bound algorithm using a Lagrangean relaxation method and approximate algorithms using information of Lagrangean relaxation problems. The effectiveness of our algorithms is demonstrated in computational test problems with up to 65 nodes, 2080 links and 4160 OD pairs.

1. はじめに

ネットワーク計画問題は，交通ネットワーク計画や輸送・配送計画などに現れる基本的な問題の一つである．ネットワーク計画問題は，ネットワークが与えられたときに，OD(Origin-Destination)ペア間の走行費用とネットワークを構築する費用のトレードオフを考慮して，ネットワークの形態を決定する問題である．容量制約がないモデルは，リンクの容量と混雑による遅れ費用を考慮しない基本的なモデルであるが，基本的なモデルであるにもかかわらず，この問題はJohnsonら[1]によってNP完全(Nondeterministic Polynomial Complete)であることが示されている．

走行費用とネットワークの構築(リンク設置)費用の総和を最小にする容量制約のないネットワーク計画問題に対して，Magnantiら[2]は強いベンダーズカットを提案し，ベンダーズの分解原理を用いて30ノード，設置可能なリンク数90リンクまでの問題を解いている．また，Balakrishnanら[3]は，双対上昇法を用いて，35ノード,設置可能なリンク数595リンク，1190ODペアまでの問題に対して，誤差0～3％の上界値（近似解）と下界値を示している．

一方，予算制約をもつネットワーク計画問題は，Hoang[4]，Boyceら[5]，Dinnoe and Florian [6]，Gallo[7]，森津[8]，Ahuja and Murty[9]などによって研究がなされている．Galloは下界平面と呼ばれる切除平面を提案し，29ノード，54リンクまでの問題について，Hoangの下界値と比較している．Ahuja and Murtyは下界平面を提案し，50ノード，100リンクまでの問題について，HoangおよびGalloの下界値と比較している．また，近

*キーワード：交通網計画，ネットワーク交通流

**正会員 工修 金沢工業大学講師 経営工学科
(〒921 石川県石川郡野々市町扇ヶ丘7番地1)
***金沢工業大学大学院 学生 経営工学科
****金沢工業大学教授 経営工学科
†工修 金沢工業大学助教授 経営工学科
‡工修 金沢工業大学講師 経営工学科

似解法としては，Dinnoe and Florian の解法[6]や森津の簡易解法[8]がある．また，従来の研究をまとめたものに Magnanti and Wong [10]の研究がある．

ラグランジュ緩和法は，巡回セールスマン問題や施設配置問題などの多くのNP完全である組合せ問題に適用され成果を挙げている手法である[11][12][13]．

数理計画問題の一部の制約を緩和した問題を緩和問題とよぶ．最小化問題の場合，緩和問題の最適目的関数値は，元の問題の下界値となる[14]．良い下界値，すなわち最適目的関数値に近い下界値を求めることによって，厳密解を求めるための分枝限定法では分枝回数を少なくすることができ，また釘付けテストにより問題の規模を縮小できる．大規模な問題で，最適解を求めることできない場合には，近似解を求めることになる．しかし，近似解だけでは，この近似解を評価することがむずかしい．そこで，良い下界値が求められていれば，下界値と近似解の目的関数値である上界値との差で，最適解に対する近似解の誤差の上限を保証することができる．

本研究では，走行費用とリンク設置費用の総和を最小にする容量制約のないネットワーク計画問題に対して，起点を同じにするODペア集合と連結ネットワーク制約をもつ新しい定式化を示し，この定式化された問題に対してフロー保存制約をラグランジュ緩和した緩和問題の3つの新しい定式化を示す．そして，最小木問題の解法と劣勾配法を用いたラグランジュ緩和問題の解法を提案し，この解法によって緩和問題の最適解と元の問題の下界値を容易に求めることができることを示す．さらに，緩和問題の解とラグランジュ乗数の情報を利用した4つの近似解法を提案する．また，提案した解法を用いて，従来行われていなかった規模の65ノード，設置可能なリンク数2080リンク，4160ODペアまでの問題についての数値実験を行う．

2. ネットワーク計画問題の定式化

本章では，容量制約のないネットワーク計画問題の定式化を示す．

ノード集合N，無向であるリンクの集合$L(\subseteq N\times N)$から構成されたネットワーク$G(N,L)$が与えられているものとする．ODペアの集合を$M(\subseteq N\times N)$とする．各ODペアのODフロー量を1単位とし，ODペア(r,s)の1単位のフローがリンク(i,j)上を通るときの走行費用をc_{ij}^{rs}とする．ODフロー量が1単位であるという前提は，一般的ではない．しかし，容量制約のないモデルでは，ODペア(r,s)のODフロー量がq^{rs}，走行費用が$c_{ij}'^{rs}$である場合，ODフロー量を1，走行費用を$c_{ij}^{rs}=c_{ij}'^{rs}\cdot q^{rs}$とスケーリングすることによって，ODフロー量を1に基準化することができるので，一般性は失われない．

リンクを設置するときにかかる費用をa_{ij}とする．リンク(i,j)を設置するか否かを表わす0–1変数をx_{ij}とし，このベクトルを$\boldsymbol{x}$とする．ODペア(r,s)のODフローがリンク(i,j)上を通るか否かを表わす変数をy_{ij}^{rs}とし，このベクトルを$\boldsymbol{y}$とする．ODペア(r,s)に対して，$s\neq t$であるODペア(r,t)の集合をM_r^sとする．

このとき，容量制約のないネットワーク計画問題は，問題ND_1として定式化することができる[3][10]．

問題ND_1:

$$min \sum_{(i,j)\in L}\left\{\sum_{(r,s)\in M}(c_{ij}^{rs}\cdot y_{ij}^{rs}+c_{ji}^{rs}\cdot y_{ji}^{rs})+a_{ij}\cdot x_{ij}\right\} \tag{1}$$

$s.t.$

$$\sum_{j\in N}y_{jn}^{rs}-\sum_{i\in N}y_{ni}^{rs}=\begin{cases}-1 & n=r\\ 1 & n=s\\ 0 & \text{その他,}\end{cases}\quad (r,s)\in M, n\in N \tag{2}$$

$$y_{ij}^{rs}+y_{ji}^{rt}\le x_{ij},\quad (r,t)\in M_r^s,(r,s)\in M,(i,j)\in L \tag{3}$$

$$x_{ij}\in\{0,1\},\quad (i,j)\in L \tag{4}$$

$$y_{ij}^{rs}\in\{0,1\}\ ,\ y_{ji}^{rs}\in\{0,1\},\quad (r,s)\in M,(i,j)\in L \tag{5}$$

(1)式は，走行費用とリンク設置費用の総和の最小化を表わす目的関数である．(2)式は最短路問題や最大流問題にも現れるフロー保存式であり，ノードnに流入するODペア(r,s)のフローと流出するフローの関係を表わしている．(3)式は，ノードi,j間にリンク(i,j)が設置されたときに限り，ODフローがリンクを通ることができ，しかも起点が同じであるODフローがリンク上で逆流しないことを表わしている．これは，容量制約のないモデルの最適解で成立する条件である．(4), (5)式はx_{ij}, y_{ij}^{rs}が0–1変数であることを表わしている．y_{ij}^{rs}は一般に連続量であるが，容量制約のないモデルでは，0–1変数として扱うことができる．

ノードrを起点とするODペアの集合をM_rとする．

ODペア集合Mは，M_rに分割できる．さらに，すべてのノードがリンクによって連結しているという連結ネットワークの制約を追加した問題を考え，この問題をND_2とする．

問題ND_2:

$$min \sum_{(i,j)\in L}\left\{\sum_{r\in N}\sum_{(r,s)\in M_r}(c_{ij}^{rs}\cdot y_{ij}^{rs}+c_{ji}^{rs}\cdot y_{ji}^{rs})+a_{ij}\cdot x_{ij}\right\} \quad (6)$$

s.t.

$$\sum_{j\in N} y_{jn}^{rs}-\sum_{i\in N} y_{ni}^{rs}=\begin{cases}-1 & n=r \quad (r,s)\in M_r,\\ 1 & n=s \quad r\in N, n\in N\\ 0 & その他,\end{cases} \quad (7)$$

$$y_{ij}^{rs}+y_{ji}^{rt}\le x_{ij},\ (r,t)\in M_r^s,(r,s)\in M_r,r\in N,(i,j)\in L \quad (8)$$

$$\text{連結ネットワーク} \quad (9)$$

$$x_{ij}\in\{0,1\},\quad (i,j)\in L \quad (10)$$

$$y_{ij}^{rs}\in\{0,1\}\ ,\ y_{ji}^{rs}\in\{0,1\},\ (r,s)\in M_r,r\in N,(i,j)\in L \quad (11)$$

(9)式の連結ネットワークという制約は，冗長な制約であるが，ラグランジュ緩和を行なったときに有効な制約となる．以後，この問題ND_2を対象とし，検討を行う．

3. ラグランジュ緩和問題

本章では，ラグランジュ緩和問題を示し，この問題がyを含まない問題に変形できることを示す．

(1) ラグランジュ緩和問題の定式化

問題ND_2を直接解くのは困難であるため，ラグランジュ乗数$v_n^{rs}((r,s)\in M,n\in N)$を用いて，フロー保存式である(7)式をラグランジュ緩和[14]した問題を考える．ここで，v_n^{rs}の要素からなるベクトルをvとする．適当なラグランジュ乗数ベクトルvが与えられたときに，ラグランジュ緩和問題$L_1(v)$は以下のように表すことができる．

問題$L_1(v)$:

$$min \sum_{(i,j)\in L}\left\{\sum_{r\in N}\sum_{(r,s)\in M_r}(\bar{c}_{ij}^{rs}\cdot y_{ij}^{rs}+\bar{c}_{ji}^{rs}\cdot y_{ji}^{rs})+a_{ij}\cdot x_{ij}\right\} + \sum_{(r,s)\in M}\{v_s^{rs}-v_r^{rs}\} \quad (12)$$

s.t.

$$y_{ij}^{rs}+y_{ji}^{rt}\le x_{ij},\ (r,t)\in M_r^s,(r,s)\in M_r,r\in N,(i,j)\in L \quad (13)$$

$$\text{連結ネットワーク} \quad (14)$$

$$x_{ij}\in\{0,1\},\quad (i,j)\in L \quad (15)$$

$$y_{ij}^{rs}\in\{0,1\}\ ,\ y_{ji}^{rs}\in\{0,1\},\ (r,s)\in M_r,n\in N,(i,j)\in L \quad (16)$$

ただし，

$$\bar{c}_{ij}^{rs}=c_{ij}^{rs}-v_j^{rs}+v_i^{rs},\quad \bar{c}_{ji}^{rs}=c_{ji}^{rs}-v_i^{rs}+v_j^{rs} \quad (17)$$

とする．

ラグランジュ緩和問題の目的関数は(12)式であるが，vに関する第2項はvが与えられたときに定数項となる．このため，以後，この定数項は除いて考えることにする．

(2) ラグランジュ緩和問題の変形

問題$L_1(v)$がyを含まない問題に変形できることを示す．

ここで，xに関する上位問題((18)~(20)式)とyに関する下位問題((21)~(23)式)の2つ問題からなる問題$L_2(v)$を考える．

問題$L_2(v)$:

$$min \sum_{(i,j)\in L}\{\Phi_{ij}(y_{ij},y_{ji},x_{ij})+a_{ij}\cdot x_{ij}\} \quad (18)$$

s.t.

$$\text{連結ネットワーク} \quad (19)$$

$$x_{ij}\in\{0,1\},\quad (i,j)\in L \quad (20)$$

ただし，

$$\Phi_{ij}(y_{ij},y_{ji},x_{ij})=min\sum_{r\in N}\sum_{(r,s)\in M_r}(\bar{c}_{ij}^{rs}\cdot y_{ij}^{rs}+\bar{c}_{ji}^{rs}\cdot y_{ji}^{rs}) \quad (21)$$

s.t.

$$y_{ij}^{rs}+y_{ji}^{rt}\le x_{ij},\quad (r,t)\in M_r^s,(r,s)\in M_r,r\in N \quad (22)$$

$$y_{ij}^{rs}\in\{0,1\}\ ,\ y_{ji}^{rs}\in\{0,1\},\quad (r,s)\in M_r,r\in N \quad (23)$$

とし，y_{ij}^{rs}およびy_{ji}^{rs}の要素からなるベクトルそれぞれy_{ij}，y_{ji}とする．

問題$L_1(v)$において，(14)，(15)式(または(19)，(20)式)を満足するxの集合をXとする．問題$L_1(v)$において，任意の$x\in X$に対して(13)，(16)式を満足するyは必ず存在するので，Xが問題$L_1(v)$のxの実行可能解集合となる．また，(19)，(20)式を満足しているので，Xが問題$L_2(v)$のxの実行可能解集合である．

また，任意の$x\in X$が与えられた場合，yに関して問題$L_1(v)$と$L_2(v)$は同じ問題となる．(21)式を(18)式に

代入すると，問題 $L_1(\boldsymbol{v})$ と $L_2(\boldsymbol{v})$ の目的関数が(定数項を除いた場合に)一致する．したがって，最適目的関数値も一致する．以上のことから，実行可能解集合と実行可能解に対応する最適目的関数値が一致するので，問題 $L_1(\boldsymbol{v})$ と問題 $L_2(\boldsymbol{v})$ は等価な問題となる．

問題 $L_2(\boldsymbol{v})$ において，上位問題の任意の実行可能解 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$が与えられたとき，$\boldsymbol{y}$に関する下位問題において最適な$\Phi_{ij}$を求めることができれば，問題 $L_2(\boldsymbol{v})$ は$\boldsymbol{X}$の中で，$\sum_{(i,j)\in L}\{\Phi_{ij} + a_{ij}\cdot x_{ij}\}$ を最小にする$\boldsymbol{x}$を求める問題と考えることができる．

(21)~(23) 式からなる問題は，ノードrごとに独立した次の問題に分割できる．

$$\Phi_{ij}^r = min \sum_{(r,s)\in M_r} (\bar{c}_{ij}^{rs}\cdot y_{ij}^{rs} + \bar{c}_{ji}^{rs}\cdot y_{ji}^{rs}) \tag{24}$$

$s.t.$

$$y_{ij}^{rs} + y_{ji}^{rt} \le x_{ij}, \quad (r,t)\in M_r^s, (r,s)\in M_r \tag{25}$$

$$y_{ij}^{rs} \in \{0,1\}\ ,\ y_{ji}^{rs} \in \{0,1\},\ (r,s)\in M_r \tag{26}$$

x_{ij}は0または1であるので，まず $x_{ij}=1$ である場合を考えると，(25) 式は，

$$y_{ij}^{rs} + y_{ji}^{rt} \le 1, \quad (r,t)\in M_r^s, (r,s)\in M_r \tag{27}$$

となり，$i \to j$向きのフローと $j \to i$ 向きのフローが同時には存在しない，すなわち $j \to i$ 向きのフローが存在しないか，$i \to j$向きのフローが存在しないかを表わしている．

$j \to i$ 向きのフローが存在しない場合には，すべての (r,t) について，$y_{ji}^{rt}=0$ である．このとき，$\bar{c}_{ij}^{rs} \ge 0$ である場合には $y_{ij}^{rs}=0$ が，$\bar{c}_{ji}^{rs}<0$ である場合には $y_{ij}^{rs}=1$ が最適となる．したがって，$\Phi_{ij}^r = \sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}_{ij}^{rs})$ となる．同様に，$i \to j$向きのフローが存在しない場合には，$\Phi_{ij}^r = \sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}_{ji}^{rs})$ となる．結局，$x_{ij}=1$ である場合には，これらの2つの値の最小値が最適であるので，

$$\Phi_{ij}^r = \min\left\{\sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}_{ij}^{rs}), \sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}_{ji}^{rs})\right\}$$

が得られる．

一方，$x_{ij}=0$ の場合には，明らかに $y_{ij}^{rs}=y_{ji}^{rt}=0$ が最適となり，$\Phi_{ij}^r=0$ となる．

以上のことから，

$$\Phi_{ij}(y_{ij},y_{ji},x_{ij}) = \sum_{r\in N}\left[\min\left\{\sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}_{ij}^{rs}), \sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}_{ji}^{rs})\right\}\right]\cdot x_{ij} \tag{28}$$

となることが分かる．

任意の$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$について，(28) 式が成り立つので，(28) 式を (18) 式に代入すると，次の問題 $L_3(\boldsymbol{v})$ が得られる．

問題 $L_3(\boldsymbol{v})$：

$$min \sum_{(i,j)\in L}\{\bar{e}_{ij}+a_{ij}\}\cdot x_{ij} \tag{29}$$

$s.t.$

連結ネットワーク (30)

$$x_{ij}\in\{0,1\}, \quad (i,j)\in L \tag{31}$$

ただし，

$$\bar{e}_{ij} = \sum_{r\in N}\min\left\{\sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}_{ij}^{rs}), \sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}_{ji}^{rs})\right\} \tag{32}$$

とする．

以上のことから，問題 $L_2(\boldsymbol{v})$ が$\boldsymbol{y}$を含まない問題 $L_3(\boldsymbol{v})$ に変形できることが示された．また，問題 $L_1(\boldsymbol{v})$ と問題 $L_2(\boldsymbol{v})$ が等価な問題であるので，問題 $L_1(\boldsymbol{v})$ が$\boldsymbol{y}$を含まない問題 $L_3(\boldsymbol{v})$ に変形できることになる．

4. ラグランジュ緩和問題の解法

(1) 問題 L_3の解法

リンク費用を $\bar{e}_{ij}+a_{ij}$としたとき，問題 $L_3(\boldsymbol{v})$ は，連結ネットワークで，最小費用のリンクを選択する問題である．一般に，このような問題は，最小木問題として知られている[15]．問題 $L_3(\boldsymbol{v})$ と最小木問題の異なる点は，リンク費用 $\bar{e}_{ij}+a_{ij}$が非負とは限らない点である．問題 $L_3(\boldsymbol{v})$ は，最小木問題の解法を用いて，次の手順で解くことができる．

・問題 $L_3(\boldsymbol{v})$ の解法

[1] すべてのリンク (i,j) に関して，$x_{ij}=0$ とする．

[2] リンク費用を $\bar{e}_{ij}+a_{ij}$として，最小木問題を解く．最小木を構成するリンク (i,j) に関して，$x_{ij}=1$ とする．

[3] 最小木を構成していないリンクで，$\bar{e}_{ij}+a_{ij}\le 0$ であるリンク (i,j) に関して，$x_{ij}=1$ とする．

この手順に従って，問題 $L_3(\boldsymbol{v})$ を容易に解くことができる．また，問題 $L_3(v)$ と問題 $L_1(\boldsymbol{v})$ の $\boldsymbol{x}$ の最適解は一致するので，同時に問題 $L_1(\boldsymbol{v})$ の $\boldsymbol{x}$ の最適解を求めることができる．

次に，問題 $L_1(\boldsymbol{v})$ の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ が求められたときに，問題 $L_1(v)$ の最適解 $\boldsymbol{y}^*$ を求めることを考える．$x^*_{ij}=0$ である場合は，(13)式より $y^{*rs}_{ij}=0$ である．次に，$x^*_{ij}=1$ である場合を考える．Φ^r_{ij} の場合と同様に，

$\sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}^{rs}_{ji})<\sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}^{rs}_{ij})$

であれば，$i\rightarrow j$ 向きのフローが存在しないので，$y^{*rs}_{ij}=0$ となる．$x^*_{ij}=1$ で，

$\sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}^{rs}_{ij})\leq\sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}^{rs}_{ji})$

かつ $\bar{c}^{rs}_{ij}\geq 0$ の場合にも，$y^{*rs}_{ij}=0$ となる．

$\sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}^{rs}_{ij})\leq\sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}^{rs}_{ji})$

かつ $\bar{c}^{rs}_{ij}<0$ の場合にのみ，$y^{*rs}_{ij}=1$ となる．また，y^{*rs}_{ji} の場合も同様である．したがって，問題 $L_1(\boldsymbol{v})$ の最適解 $\boldsymbol{y}^*$ は以下のようになる．

$$y^{*rs}_{ij}=\begin{cases}1 & x^*_{ij}=1,\ \bar{c}^{rs}_{ij}<0\ \ and \\ & \sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}^{rs}_{ij})\leq\sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}^{rs}_{ji}) \\ 0 & \text{その他}\end{cases}\tag{33}$$

$$y^{*rs}_{ji}=\begin{cases}1 & x^*_{ij}=1,\ \bar{c}^{rs}_{ji}<0\ \ and \\ & \sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}^{rs}_{ij})>\sum_{(r,s)\in M_r}\min(0,\bar{c}^{rs}_{ji}) \\ 0 & \text{その他}\end{cases}\tag{34}$$

以上のことから，適当な $\boldsymbol{v}$ が与えられたときに，問題 $L_3(\boldsymbol{v})$ を解くことによって，$L_1(\boldsymbol{v})$ の最適目的関数値および最適解 $\boldsymbol{x}^*$ を求めことができ，さらに簡単な比較計算をすることによって最適解 $\boldsymbol{y}^*$ を求めることができることになる．また，$L_1(\boldsymbol{v})$ の最適目的関数値は問題 ND_2 の下界値であるので，問題 ND_2 の下界値を求めることができることが示された．

(2) ラグランジュ乗数の設定法

ラグランジュ緩和問題の最適目的関数値が元の問題の良い下界値となるためには，ラグランジュ乗数 $\boldsymbol{v}$ の設定が重要である．ラグランジュ乗数 $\boldsymbol{v}$ の適切な値を設定する方法として，劣勾配法[16)]が知られている．そこで，本研究では劣勾配法を用いてラグランジュ乗数を更新する．

まず，ラグランジュ乗数 $\boldsymbol{v}$ の初期値を決める必要がある．そこで，ODペア (r,s) に関して，すべての x_{ij} を1とし，リンクの長さを c^{rs}_{ij} としたネットワークを考える．このとき，このネットワーク上で起点 r からすべてのノード n までの最短距離を求め，この値をラグランジュ乗数 v^{rs}_n の初期値とする．

次に，(33)，(34)式を用いて $L_1(\boldsymbol{v})$ の最適解 $\boldsymbol{y}^*$ が求められたとき，劣勾配 $\boldsymbol{w}$ を

$$w^{rs}_n=d^{rs}_n-(\sum_{j\in N}y^{*rs}_{jn}-\sum_{i\in N}y^{*rs}_{ni}),\quad (r,s)\in M,n\in N\tag{35}$$

と定義する．現在の $L_1(\boldsymbol{v})$ の目的関数値を改善する可能性のある次のラグランジュ乗数として，

$$v^{rs}_n:=v^{rs}_n+\theta\cdot w^{rs}_n,\quad (r,s)\in M,n\in N\tag{36}$$

を採用する．ただし，θ はステップサイズであり，

$$\theta=\frac{\rho(\text{上界値}-\text{下界値})}{\sum_{(r,s)\in M}\sum_{n\in N}(w^{rs}_n)^2}\tag{37}$$

である．ここで，ρ は (0,2) のパラメータである．また，k 回目の繰り返しにおける θ を θ^k とするとき，$\lim_{k\rightarrow\infty}\theta^k\rightarrow 0$ かつ $\sum^{\infty}_{k=1}\theta^k\rightarrow\infty$ であれば，v^{rs}_n はラグランジュ緩和問題の最適値に収束することが知られている[16)]．

5. 近似解法と全体の解法の流れ

(1) 近似解法

前節で示したように劣勾配法を用いてラグランジュ乗数を更新し，下界値を求める操作を繰り返す場合には，繰り返しのたびに新たなラグランジュ緩和問題が得られる．そこで，この緩和問題の情報を利用した近似解法を示す．

問題 ND_2 の近似解を $\hat{x}$ とする．$\hat{x}$ が問題 ND_2 の実行可能解であるためには，$\hat{x}_{ij}=1$ であるリンクによって構成されるネットワークが連結ネットワークであれば良い．このときの目的関数値すなわち上界値は，ODペア間の最短経路問題を解き，ODペア間の走行費用とリンク設置費用の総和を計算することによって求めることができる．

問題の規模が大きくなるにつれ，リンク数も膨大な数になる．問題 $L_3(v)$ において，$\bar{e}_{ij}+a_{ij}$ はフロー費用を考慮したリンク費用と見ることができる．最小木問題の解法からも分かるように，$\bar{e}_{ij}+a_{ij}$ が小さい方が，問題 $L_3(\boldsymbol{v})$ の最適解に含まれる可能性が高くなり，問題 ND_2 の最適解に含まれる可能性も高くなると考えられる．このため，$\bar{e}_{ij}+a_{ij}$ の大きさによって，近似解法で考慮するリンク数を制限することにする．以上の点を考慮した4つの近似解法を示す．

近似解法1：緩和解を用いた解法

問題 $L_3(v)$ の最適解を $\hat{x}$ とする．$\hat{x}_{ij}=1$ であるリン

クによって構成されるネットワークは明らかに連結ネットワークであるので，近似解となる．

近似解法 2：限定した forward 法

近似解法1で得られたネットワークを初期ネットワークとする．ネットワークに含まれているリンクの中で，$\bar{e}_{ij}+a_{ij}$の最大値をfとする．$\bar{e}_{ij}+a_{ij} \leq \alpha \cdot f$でかつネットワークに含まれていないリンクに対して，$\bar{e}_{ij}+a_{ij}$の小さいリンクから順に，次の操作を行う．このリンクをネットワークに加えたときの問題ND_2の目的関数値を求め，目的関数値が減少するならば，このリンクをネットワークに加える．

最終的に得られた解を近似解とする．

近似解法 3：限定した backward 法

$\bar{e}_{ij}+a_{ij} \leq \beta \cdot f$であるリンクから構成されるネットワークを初期ネットワークとする．ネットワークに含まれているリンクに対して，$\bar{e}_{ij}+a_{ij}$の大きなリンクから順に，次の操作を行う．このリンクをネットワークから取り除いたときの問題ND_2の目的関数値を求め，目的関数値が減少するならばこのリンクをネットワークから取り除く．

最終的に得られた解を近似解とする．

近似解法 4：限定した 1 最適化法

近似解法 1～3 で得られた中で最も良い解を初期ネットワークとする．$\bar{e}_{ij}+a_{ij} \leq \gamma \cdot f$でかつネットワークに含まれていないリンクと，ネットワークに含まれているリンクに対して，次の操作を行う．ネットワークに含まれていないリンクをネットワークに加え，含まれているリンクを取り除いた場合の目的関数値を求める．目的関数値が減少するならば，ネットワークに含まれていないリンクをネットワークに加え，含まれているリンクを取り除く．

最終的に得られた解を近似解とする．

以上の近似解法を組み合せて，近似解を求めることにする．ただし，α，β，γを正の定数とする．

(2) 全体の解法の流れ

次に，下界値および近似解と上界値を求めるための解法の全体的な流れを示す．

[1] すべての設置可能なリンクからなるネットワーク上で，各ODの起点・終点間の最短路問題を解き，ラグランジュ乗数の初期値を求める．$UB=\infty$，$LB=0$とする．

[2] 最小木問題を解き，$L_1(v)$の最適目的関数値と最適解を求める．$L_1(v)$の最適目的関数値$>LB$であれば，$LB=L_1(v)$の最適目的関数値 とする．

[3] 近似解法によって近似解を求め，ND_2の上界値を求める．ND_2の上界値$<UB$であれば，$UB=ND_2$の上界値とする．

[4] 劣勾配法によって，ラグランジュ乗数を更新する．

[5] 収束判定基準を満足していなければ，[2]へ．そうでなければ，LBを最終的な下界値，UBを最終的な上界値，上界値の解を近似解とし，終了．

この解法の流れにしたがって，ステップ[2]から[5]を繰り返すことによって，良い下界値と上界値および近似解が求められることになる．

6. 数値例

本研究で提案したラグランジュ緩和法を用いた解法の有効性を示すために，IBM-PC互換(i486,33MHz)コンピュータ上のFORTRANコンパイラーを用いて，ノード数5～65，設置可能なリンク数10～2080，ODペア数20～4160の規模の問題について，数値実験を行った．なお，同一規模の問題について各10問ずつ，下界値と上界値を求めた．

100×100の2次元ユークリッド平面上に，ランダムにノードを発生させ，すべてのODペア(i,j)間に各1単位のODフロー量が発生するものとし，すべてのノード間にリンクを設置可能とした．また，ノードi，j間の平面上の距離をc_{ij}^{rs}とし，a_{ij}をc_{ij}^{rs}の10倍とした．

数値実験に使用したネットワークの規模を表-1に示す．ここで，リンク数はx_{ij}の数，フロー変数はy_{ij}^{rs}の数に対応している．

収束判定基準は，(1)誤差0.5％以下，(2)繰り返し回数200回以上かつ誤差1.0％以下，(3)繰り返し回数300回，のどれか1つを満足した場合とした．ここで，誤差$=\frac{上界値-下界値}{下界値}\times 100$である．また，繰り返し回数300回でほぼ$\rho=0.1$となるように，$\rho$の初期値を1，繰り返し回数20回ごとに0.85倍した．

近似解法1を各繰り返しごとに行った．また，近似解法1で得られた上界値が，繰り返し中の近似解法1

表-1　ネットワーク規模

ノード数	リンク数	OD数	フロー変数
5	10	20	200
15	105	210	22050
25	300	600	180000
35	595	1190	708050
45	990	1980	1960200
55	1485	2970	4410450
65	2080	4160	8652800

表-2　解法の誤差と計算時間の比較

ノード数	誤差 (%)	計算時間 (h:m:s)	繰り返し回数
5	0.00	0:00:01	20
15	0.62	0:00:22	167
25	0.87	0:07:07	257
35	0.97	0:31:06	266
45	1.36	1:27:28	300
55	1.64	3:15:09	300
65	1.70	8:03:24	300

によって得られた上界値の最小値よりも小さい場合に，近似解法2, 3, 4を行った．ただし，ノード数45未満では40回ごと，それ以上では80回ごとに近似解法1の上界値の最小値を初期化した．また，$\alpha=\beta=\gamma=2$とした．

数値計算の結果を表-2に示す．誤差，計算時間および繰り返し回数は，10問の平均値である．表-2に示すように，提案した解法によって，65ノード，設置可能なリンク数2080リンク，4160ODまでの規模のネットワークにおいて，平均誤差0~1.7％以内の下界値と上界値・近似解を求めることができた．また，ノード数が70，リンク数が2500を越えると計算時間の面で問題があり，今後の課題であると考えられる．

7. むすび

本研究では，走行費用とリンク設置費用の総和を最小にする容量制約のないネットワークデザイン問題について，以下のことを示した

フロー保存式をラグランジュ緩和した問題がフロー変数を含まない最小木問題に相当する問題となることを示した．次に，劣勾配法によってラグランジュ乗数を設定し，ラグランジュ緩和問題を解き，下界値を求める下界値の解法を示した．また，緩和問題の情報を利用した近似解法を示した．最後に，従来扱われていない65ノード，設置可能なリンク数2080リンク，4160ODまでの規模のネットワークに対して数値実験を行い，提案した下界値の解法および近似解法の有効性を示した．

参考文献

1) Johnson,D.S. *et al.* : The Complexity of the Network Design Problem, Networks, Vol.8, pp.279–285, 1978.

2) Magnanti,T.L. *et al.* : Tailoring Benders Decomposition for Network Design, Math. Prog. Study, Vol.26, No.1, pp112-154, 1986.

3) Balakrishnan,A. *et al.* : A Dual–Ascent Procedure for Large–Scale Uncapacitated Network Design, Oper. Res., Vol.37, pp.716–740, 1989.

4) Hoang, H.H. : A Computational Approach to the Selection of an Optimal Network, Manage. Sci., Vol.19, pp.488–498, 1973.

5) Boyce, D.E. *et al.* : Optimal Network Problem : Branch–and–Bound Algorithm, Environ. Plan., Vol.5, pp.519–533, 1973.

6) Dionne, R. and Florian, M. : Exact and Approximate Algorithms for Optimal Network Design, Networks, Vol.9, pp.37–59, 1979.

7) Gallo, G. : Lower Planes for the Network Design Problem, Networks, Vol.13, pp.411–425, 1983.

8) 森津秀夫：最適交通網構成手法に関する基礎的研究，神戸大学，1984.

9) Ahuja R.K. and Murty V.S. : New Lower Planes for the Network Design Problem, Networks, Vol.17, pp.113–127, 1987.

10) Magnanti, T.L. and Wong, R.T. : Network Design and Transportation Planning : Models and Algorithms, Transp. Sci., Vol.18, pp.1–55, 1984.

11) Geoffrion, A.M. and McBride, R. : Lagrangean Relaxation Applied to Capacitated Facility Location Problems, AIIE Trans., Vol.10, pp.40–47, 1978.

12) Balas, E. and Christofides, N. : A Restricted Lagrangean Approach to the Traveling Salesman Problem, Math. Prog., Vol.21, pp.19–46, 1981.

13) Ross, G.T. and Soland, R.M. : A Branch and Bound Algorithm for the Generalized Assignment Problem, Math. Prog., Vol.8, pp.91–103, 1975.

14) 今野浩，鈴木久敏：整数計画法と組合せ最適化, 日科技連, 1982.

15) 伊理正夫，古林隆：ネットワーク理論, 日科技連, 1976.

16) Fisher, M.L. : The Lagrangean Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems, Manage. Sci., Vol.27, pp.1–18, 1981.