【土木計画学研究・論文集 No.10 1992年11月】

渇水に対する信頼性制約を考慮した貯水池操作ルールの設計・評価方法に関する考察*

Drought Duration and Frequency Constrained Model for Reservoir Operation Optimization *

多々納裕一**

By Hirokazu TATANO**

This paper provides an optimization model to design the reservoir operation rules which can minimize the expected welfare loss per period. Our model can fall into that category of the so-called chance-constrained model, whereby two different types of chances, i.e., 'expected drought duration' and 'drought frequencies', are explicitly taken into account by defining two types of state variables, which designates the maximum available amounts of water for release and specify the occurence of drought. Our model can be formulated in the form of a stochastic linear programming model. An practical approximation method is presented to purify the mixed strategies for reservoir operation.

1. はじめに

ライフスタイルの変化や技術革新の進展にともなって、我々の日常生活は安定的かつ豊富な水量を確保できることを前提として営まれるようになってきた。このような状況を背景として、渇水に対してより信頼性の高い水供給体制の確立が求められるようになってきた。渇水に対する信頼性は、渇水の「生起頻度」、「継続期間」、「規模」によって規定される。従って、貯水池整備を行う際には、これらの信頼性評価指標を総合的に考慮することが必要である。

本研究では、渇水の「頻度」、「継続期間」、「規模」といった多元的な渇水に対する信頼性評価指標を総合的に考慮した貯水池操作ルール設計・評価の方法を提示することを目的とする。そこで、まず、貯水池操作ルール設計問題を渇水の「生起頻度」、「期待継続期間」を制約として有する「期待損失」最小化問題として捉え、本問題を確率 LP モデル (Stocastic Linear Programming Model) として定式化する。さらに、モデル分析を行い、本モデルの特性に関して考察する。

2. 既往の研究のレビューと本研究の特色

Moran [1] の貯水地の統計理論 ('Stochastic Reservoir Theory') に関する先駆的な研究以来、Lloyd [2], Prabhu [3] 等によって大きな発展がもたらされた。これらの研究では特定の貯水池操作を想定しているが、これらの研究によって、渇水に対する貯水池の信頼性を解析するための数学的基礎が与えられた。Hashimoto ら [4] は、水資源システムの信頼性評価指標として、'reliability'(信頼度), 'resiliency'(回復度), 'vulnerability'(深刻度) を提示し、これらを用いて渇

*キーワーズ： 計画モデル、貯水池操作、渇水継続期間、渇水生起頻度、確率 LP

**正員、鳥取大学助手、工学部社会開発システム工学科
(鳥取市湖山町南 4-110)

水に対する水資源システムの信頼性を解析することを提唱した。この研究を契機として、渇水の「頻度」、「継続期間」及び「規模」といった側面から、水資源システムの総合的な信頼性評価に関する研究が進んだ[5]。しかしながら、これらの研究では、水利用システムの信頼性評価がその主要な関心であり、これらの成果を貯水池操作ルールの設計に反映する方法に関しては十分な検討が行われていない。

一方、Little の研究[6]以来、貯水池操作ルールの設計モデルに関する研究が盛んに行われてきている[7][8]。このような研究の過程で、「生起確率」等の制約を考慮した Chance-Constrained Model が開発された[9)−12)]。Chance-Constrained Model の開発は、「生起確率」の制約の下で渇水の期待損失を最小にするような操作ルールを求めることを可能とした。しかし、渇水の「生起頻度」や「期待継続期間」については依然未考慮のままであった[7]。通常、状態変数（ベクトル）は当該期の貯水量（及び流入量）で定義される。このような状態変数の定義に従う限り、渇水の「生起頻度」や「期待継続期間」は複数期の状態変数を基に定義せざるを得ない。このため、これら研究では渇水の「生起頻度」や「期待継続期間」を制約条件として明示的に取り扱うことは、本質的に不可能であった。

多々納ら[13]は、まず、状態ベクトルを当該期の放流可能量と当該期までの渇水の継続期間を用いて定義した。次に、各期の損失関数を当該期の放流量と当該期までの渇水の継続期間の関数（拡張型損失関数）として表わし、確率 D.P. により最適操作ルールを求める方法を提案した。従って、この研究では、渇水の継続期間を目的関数に反映するというアプローチを用いており、渇水の生起頻度や期待継続期間を制約条件として考慮しているわけではない。さらに、拡張型損失関数の期待値が、その特殊形として渇水の「生起頻度」、「期待継続期間」及び「期待損失」を表現することを示している。この性質に着目すれば、単一期の状態ベクトルをもとに拡張型損失関数の期待値としてこれらの信頼性評価指標が算定されることがわかる。ただ、この場合には、状態ベクトルを当該期までの渇水の継続期間と当該期の放流可能量との組として定義するため、状態の数が大きくなりやすいという数値計算上の問題点がある。

そこで、本研究では、まず、当該期までの渇水の継続期間を状態ベクトルの定義に用いるかわりに、当該期までが渇水であったか否かを表すダミー変数（渇水モード変数）を用いることとし、この渇水モード変数と放流可能量とによって状態ベクトルを定義する。次いで、渇水の「生起頻度」及び「期待継続期間」等の信頼性評価指標が、このようにして定義された単一期の状態ベクトルをもとに算定し得ることを示す。さらに、信頼性制約を有する貯水池操作ルール設計問題は、確率 LP モデルとして定式化できることを示す。

このような信頼性制約を有する確率 LP モデルの解は、後述するように一般には混合戦略型の操作ルールとなる。通常の操作ルール（純粋戦略型）は、状態ベクトルの実現値に対して確定的な放流量を対応づける関数であるが、混合戦略型操作ルールでは、状態ベクトルの実現値に対する放流量の選択確率が与えられる。操作ルールは貯水池整備後に制度として利用される。このため、状態ベクトルの実現値に対して放流量を確率的に対応づける混合戦略型操作ルールを用いることには現実的には問題がある。本研究では、確率 LP モデルの解として求まった最適な混合戦略型操作ルールをもとに、最適な純粋戦略型操作ルールの近似解を求める方法に関しても言及する。

3. 問題の明確化

以下では、評価指標やモデルの定式化に際して必要な概念や記号を整理しておく。

(1) 前提条件の整理

本研究では、単一の評価地点を有する単一貯水池の操作ルール設計問題を取り扱う。貯水池は貯水容量 v を有し、下流の評価地点での必要流量は D であると仮定する。第 n 期における貯水池への流入量は I_n、第 n 期期首の貯水量は S_n、第 n 期における貯水池からの放流量は R_n で与えられ、いずれも離散幅 Δ の離散値をとるものとする。すなわち、

$$I_n = 0, \Delta, 2\Delta, \cdots, \bar{I} \tag{1}$$

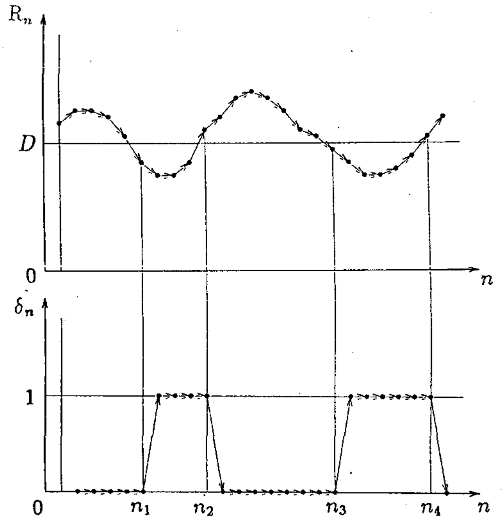
$$S_n = 0, \Delta, 2\Delta, \cdots, v \tag{2}$$

$$R_n = 0, \Delta, 2\Delta, \cdots, v + \bar{I} \tag{3}$$

このとき、これらの諸変数の間には次式の貯水池における連続条件が成り立つ。

$$S_{n+1} = S_n + I_n - R_n \tag{4}$$

ここで、貯水池への流入量 I_n は、時間的に独立かつ同一な確率分布 $\theta(\cdot)$ に従うものとする。さらに、貯水



図－1　貯水池からの放流 R_n と渇水モード変数 δ_n の関係

池から評価地点までの区間での残流域からの流出はないものと仮定する。

(2) 状態ベクトルの定義

時点 n における状態ベクトルを (X_n, δ_n) で定義する。X_n は第 n 期における放流可能量であり、次式で定義される。

$$X_n = I_n + S_n \tag{5}$$

すなわち、放流可能量 X_n は第 n 期において貯水池から放流可能な最大の水量を与えている。

また、δ_n は渇水モード変数であり、次式で定義される。

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad R_{n-1} < D \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6}$$

すなわち、図－1に示すように、渇水モード変数 δ_n は、当該期が渇水発生前 $(\delta_n = 0)$ であるか、渇水発生後 $(\delta_n = 1)$ であるかを示すダミー変数である。

(3) 貯水池操作ルールの定義

貯水池の操作 $r(x, l)$ は、状態変数ベクトル (X_n, δ_n) の実現値 (x, l) に対して、放流量 R_n を対応づける関数である。

$$R_n = r(x, l) \tag{7}$$

貯水池の操作ルール $\mathbf{r}$ を $\mathbf{r} = \{r(x, l) | x = 0, \cdots, v + \bar{I},\ l = 0, 1\}$ として定義する。

貯水池操作 $r(x, l)$ は貯水容量 v によって拘束される。すなわち、式 (4) 及び (5) から、貯水池からの放流量 r_n は放流可能量 X_n の実現値 x に対応して、$\Omega(x; v)$ 上で定義される。

$$\Omega(x; v) = \{R_n | \max(0, x - v) \leq R_n \leq x\} \tag{8}$$

従って、貯水池操作 $r(x, l)$ は、$\Omega(x; v)$ を値域とする関数となる。

(4) 混合戦略型操作ルールの導入

貯水池操作 $r(x, l)$ は、状態ベクトルの実現値に対して放流量を確定的に対応させる関数であり、純粋な戦術を与えると考えることができる。従って、操作ルール r は純粋戦略型の操作ルールであるとみなすことができる。今、操作ルールとして混合戦略型操作ルール Ψ を導入しよう。混合戦略型操作 $\psi^r_{(x,l)}$ は状態ベクトルの実現値 (x, l) に対する放流量 r の選択確率であり、混合戦略型操作ルール Ψ は $\Psi = \{\psi^r_{(x,l)} | x = 0, \cdots, v + \bar{I},\ l = 0, 1,\ r \in \Omega(x; v)\}$ として定義される。このとき、$\psi^r_{(x,l)}$ は以下の関係を満たす。

$$\sum_{r \in \Omega(x;v)} \psi^r_{(x,l)} = 1, \quad \psi^r_{(x,l)} \geq 0 \tag{9}$$

(5) 状態ベクトルの推移確率の導出

流入量が時間的に独立かつ同一の確率分布に従う離散確率変数であると仮定すると、状態変数ベクトル (X_n, δ_n) はマルコフ連鎖をなす。状態ベクトルの1ステップ推移確率 $P_{(x,l)}{}^r{}_{(y,k)}$ を次式のように定義しよう。

$$\begin{aligned} &P_{(x,l)}{}^r{}_{(y,k)} \\ &= \Pr\{X_{n+1} = y, \delta_{n+1} = k | X_n = x, \delta_n = l, r_n = r\} \end{aligned} \tag{10}$$

すなわち、状態ベクトルの1ステップ推移確率 $P_{(x,l)}{}^r{}_{(y,k)}$ は、当該期に状態ベクトル (X_n, δ_n) の実現値が (x, l) であり、放流量が r であるという条件のもとで、次期の状態ベクトルの実現値が (y, k) となる確率である。このとき、流入量の確率分布は $\theta(\cdot)$ で与えられるから、$P_{(x,l)}{}^r{}_{(y,k)}$ は次式のように特定化することができる。

$$\begin{aligned} P_{(x,l)}{}^r{}_{(y,k)} &= \theta(y - x + r) \cdot \\ &\{\chi(k = 0)\chi(r \geq D) + \chi(k = 1)\chi(r < D)\} \end{aligned} \tag{11}$$

ここで、$\chi(\cdot)$ は、$(\cdot)$ が真の時 1 、偽の時 0 をとる関数である。

(6) 状態ベクトルの定常生起確率の導出

いま、$\pi(x, l|\Psi)$ を混合戦略 Ψ を用いた場合の状態 (x, l) の定常生起確率と定義する。

$$\pi(x, l|\Psi) = \lim_{n \to \infty} \Pr\{X_n = x, \delta_n = l\} \tag{12}$$

このとき、混合戦略型操作ルール Ψ を所与すると、$\pi(x, l|\Psi)$ は以下の関係を満たす。

$$\pi(y,k|\Psi)=\sum_{(x,l)}\sum_{r\in\Omega(x;v)}\pi(x,l|\Psi)P_{(x,l)}{}^{r}{}_{(y,k)}\psi^{r}_{(x,l)} \quad (13)$$

$$\sum_{(y,k)}\pi(y,k|\Psi)=1,\quad \pi(y,k|\Psi)\geq 0 \quad (14)$$

(7) 問題の設定

本研究では、上述のような条件のもとで、評価地点における渇水の「生起頻度」$FR(\Psi)$ 及び「期待継続期間」$ED(\Psi)$ を制約条件として、渇水による期待損失 $EL(\Psi)$ を最小化するような設計評価するという問題を想定する。

$$\min_{\Psi}\ EL(\Psi)$$

subject to

$$FR(\Psi)\leq\overline{FR}$$
$$ED(\Psi)\leq\overline{ED} \quad (15)$$

ここで、$\overline{FR}$は渇水の生起頻度に関する計画基準であり、$\overline{ED}$は渇水の期待継続期間の現況値である。すなわち、まず、渇水の生起頻度に関してはその上限が計画基準（たとえば、10 年に 1 度程度）として定まっているものとする。さらに、期待渇水継続期間に関しては、操作ルール改善後の値が現況値を上回らないように制約を設けるものとする。なお、現況においては貯水池は後述するような線形貯水池操作ルール $\mathbf{r}_0$に従って運用されているものとし、現況値$\overline{ED}$を算定するものとする。

従って、問題 (15) の解は、少なくとも渇水の生起頻度が計画基準$\overline{FR}$を満たし、期待継続期間を現況値以上に増加させないという要請を満たした上で、渇水による期待損失を最小化するような混合戦略型操作ルールを与える。

4. 評価指標の定式化

(1) 状態の分類

正常状態S及び渇水状態Fを定義しておく。正常状態とは、評価地点での流量r_nが必要流量Dを上回り、渇水が生起していない状態であり、渇水状態とは評価地点での流量 r_nが必要流量 d を下回り、渇水が生起している状態を示す。当該期の状態変数ベクトルの実現値を (x,l) とすると、正常状態S及び渇水状態Fは以下のように定義される。

$$\begin{aligned} S &= \{(x,l)\mid r(x,l)\geq D\} \\ F &= \{(x,l)\mid r(x,l)< D\} \end{aligned} \quad (16)$$

以下では、渇水に対する水利用システムの信頼性評価指標を定義する。

(2) 渇水の「頻度」を表す指標

a) 渇水生起確率 PF

定常状態で水利用システムが渇水状態 Fにある確率であり、次式で定義される。

$$\begin{aligned} PF(\Psi) &= \lim_{n\to\infty}\Pr\{(X_n,\delta_n)\in F\} \\ &= \sum_{(x,l)\in F}\pi(x,l|\Psi) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、以下のように $L_{PF}(\cdot)$ を定義しよう。

$$L_{PF}(r,l)=\begin{cases}1 & \text{if}\ \ r<D\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \quad (18)$$

このとき、式 (17) は $L_{PF}(\cdot)$ を用いて次式のように変形できる。

$$PF(\Psi)=\sum_{(x,l)}\sum_{r\in\Omega(x;v)}L_{PF}(r,l)\pi(x,l|\Psi)\psi^{r}_{(x,l)} \quad (19)$$

これは、渇水の生起確率 $PF(\Psi)$ が関数 $L_{PF}(r,l)$ の期待値として算定されることを意味している。

b) 渇水の生起頻度 FR

渇水状態が生じてから、次に正常状態に戻るまでの期間をひと続きの「渇水」とみれば、渇水の生起頻度はこのひと続きの渇水が生起する確率である。したがって、渇水の生起頻度は正常状態から渇水状態へと状態が推移するような連続する 2 つの状態の同時生起確率として、次式のように定義される。

$$\begin{aligned} FR(\Psi) &= \lim_{n\to\infty}\Pr\{(X_n,\delta_n)\in S,(X_{n-1},\delta_{n-1})\in F\} \\ &= \sum_{(y,0)\in F}\pi(y,0|\Psi) \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 $L_{FR}(\cdot)$ を次のように定義する。

$$L_{FR}(r,l)=\begin{cases}1 & \text{if}\ \ r<D\ \ \text{and}\ \ l=0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \quad (21)$$

このとき、式 (20) は $L_{FR}(\cdot)$ を用いて次式のように変形できる。

$$FR(\Psi)=\sum_{(x,l)}\sum_{r\in\Omega(x;v)}L_{FR}(r,l)\pi(x,l|\Psi)\psi^{r}_{(x,l)} \quad (22)$$

このことは、渇水生起頻度 $FR(\Psi)$ も、渇水生起確率 PFと同様に、関数 $L_{FR}(r,l)$ の期待値として算定されることを意味している。

c) 渇水の再現期間 RP

渇水が生起してから、次の渇水が生起するまでの期間数の期待値を表す。渇水の生起頻度 $FR(\Psi)$ の逆数として求まる。

$$RP(\Psi)=1/FP(\Psi) \quad (23)$$

(3) 渇水の「継続期間」を表す指標

a) 期待渇水継続期間 ED

渇水の期待継続期間 EDは、システムの状態が正常状態からはじめて渇水状態推移してから、正常状態へ戻るまでにかかる期間の期待値である。渇水の継続期

間の期待値 $ED(\Psi)$ を、状態ベクトル (X_n, δ_n) が有限マルコフ連鎖をなすことを利用して定式化しよう。

まず、第 n 期において状態が $(X_n, \delta_n) = (x, l)$ である場合に、t 期後に始めて正常状態になる確率を $f(t|x, l)$ と定義しよう。$f(t|x, l)$ は次式で与えられる。

$$f(0|x, l) = \chi((x, l) \in S) \tag{24}$$

$$f(t+1|x, l) = \chi((x, l) \in F) \sum_{(y,k)} \sum_{r \in \Omega(x;v)} f(t|y, k) P_{(x,l)}{}^{r}{}_{(y,k)} \psi^{r}_{(x,l)} \tag{25}$$

ここで、(X_n, δ_n) は有限マルコフ連鎖をなすから、$f(t|x, l)$ は時点 n に依存しない。

従って、渇水の期待継続期間 $ED(\Psi)$ は $f(t|x, l)$ を用いて、次式のように定義される。

$$ED(\Psi) = \frac{\sum_{(x,l)\in S} \sum_{(y,k)\in F} \sum_{r \in \Omega(x;v)} \sum_{t=0}^{\infty} t f(t|y, k) P_{(x,l)}{}^{r}{}_{(y,k)} \pi(x, l|\Psi) \psi^{r}_{(x,l)}}{\sum_{(x,l)\in S} \sum_{(y,k)\in F} \sum_{r \in \Omega(x;v)} P_{(x,l)}{}^{r}{}_{(y,k)} \pi(x, l|\Psi) \psi^{r}_{(x,l)}} \tag{26}$$

状態変数ベクトル (X_n, δ_n) は時間的に同一の分布に従う1次のマルコフ連鎖をなす。このとき、次の関係が成り立つ。

$$ED(\Psi) = PF(\Psi)/FR(\Psi) \tag{27}$$

従って、操作ルール $r(x, l)$ を所与とすると式 (19) 及び式 (22) より、式 (27) は次式のように書き直される。

$$ED(\Psi) = \frac{\sum_{(x,l)} \sum_{r \in \Omega(x;v)} L_{PF}(r, l) \pi(x, l|\Psi) \psi^{r}_{(x,l)}}{\sum_{(x,l)} \sum_{r \in \Omega(x;v)} L_{FR}(r, l) \pi(x, l|\Psi) \psi^{r}_{(x,l)}} \tag{28}$$

(4) 渇水の「規模」を表す指標

a) 渇水による期待損失 EL

渇水による期待損失は、渇水発生にともなう社会的厚生の減少分の期待値である。本研究では、損失関数を放流量 r の関数 $L(r)$ として以下のように想定する。

$$L(r) = \begin{cases} g(r) & \text{if } r < D \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{29}$$

ここで、$g(r)$ は、放流量 r に関して非増加凸関数であると仮定する。

このとき、渇水による期待損失 $EL(\Psi)$ は、次式のように定義される。

$$EL(\Psi) = \sum_{(x,l)} \sum_{r \in \Omega(x;v)} L(r) \pi(x, l|\Psi) \psi^{r}_{(x,l)} \tag{30}$$

5. 計画モデルの定式化

(1) 確率 LP モデルの定式化

さて、以上の議論をもとに問題 (15) の貯水池操作ルールの設計問題を、混合戦略型ルール Ψ を用いて、確率 LP モデルとして定式化しよう。

いま、$\pi(x, l; \Psi) \psi^{r}_{(x,l)} = H^{r}_{(x,l)}$ とおくと次式を得る。

$$\sum_{r} H^{r}_{(x,l)} = \pi(x, l; \Psi) \tag{31}$$

したがって、問題 (15) は、次の線形計画問題に帰着される。

$$\max \sum_{(x,l)} \sum_{r} L(r) H^{r}_{(x,l)}$$

subject to

$$\begin{aligned}
&\sum_{(x,l)} \sum_{r} L_{FR}(r, l) H^{r}_{(x,l)} \le \overline{FR} \\
&\sum_{(x,l)} \sum_{r} \{L_{PF}(r, l) - \overline{ED} L_{FR}(r, l)\} H^{r}_{(x,l)} \le 0 \\
&\sum_{r} H^{r}_{(y,k)} = \sum_{(x,l)} \sum_{r} P_{(x,l)}{}^{r}{}_{(y,k)} H^{r}_{(x,l)} \\
&\sum_{r} \sum_{(x,l)} H^{r}_{(x,l)} = 1 \\
&\sum_{r} H^{r}_{(x,l)} \ge 0
\end{aligned} \tag{32}$$

ここで、最適な混合戦略型操作ルールを $\Psi^* = \{\psi^{*r}_{(x,l)}\}$ と定義すると、$\psi^{*r}_{(x,l)}$ は上記の問題の解 $H^{*r}_{(x,l)}$ を用いて以下のように算定される。

$$\psi^{*r}_{(x,l)} = \frac{H^{*r}_{(x,l)}}{\pi(x, l|\Psi)} = \frac{H^{*r}_{(x,l)}}{\sum_{r} H^{*r}_{(x,l)}} \tag{33}$$

(2) 操作ルールの設計方法

以下では、最適な混合戦略型操作ルール Ψ^* をもとに、最適な純粋戦略型操作ルールの近似解として操作ルール代替案 $\hat{r}$ を設計する手順を示す。

step (1) 問題 (32) を解き、式 (33) を用いて最適な混合戦略型操作ルール Ψ^* を求める。

step (2) 最適な混合戦略型操作ルールを構成する（純粋戦略型）操作ルール $(\mathbf{r}^a, \mathbf{r}^b, \cdots)$ を求め、それぞれの操作ルールに対応する信頼性評価指標値及び経済的評価指標値を算定する。

step (3) 最適な混合戦略型操作ルールを構成する（純粋戦略型）操作ルールの内、実行可能領域に属するルールがあれば **step (4)** に進む。実行可能領域に属すルールがなければ、渇水生起頻度に関する制約をより厳しく $(\overline{FR} \rightarrow \overline{FR} - \Delta\overline{FR})$ して、**step (1)** へ戻る。

step (4) 実行可能領域に属す（純粋戦略型）操作ルールのうち、最も目的関数値（期待効用、あるい

は等価的option price）の高いルールを最適な純粋戦略型操作ルールの近似解$\hat{\mathbf{r}}$として採用する。

以上のようにして、操作ルール$\hat{\mathbf{r}}$を見いだすことができる。さらに、本研究では以下のように近似の精度の評価を行う。近似に伴う誤差$\hat{s}$は、最適な純粋戦略型操作ルールに対応する目的関数の値と操作ルール代替案$\hat{\mathbf{r}}$に対応する目的関数の値の差として定義できる。ここで、最適な純粋戦略型操作ルールに対応する目的関数の値は、常に最適な混合戦略型操作ルールに対応する目的関数の値$EL(\Psi^*)$よりも小さいから、近似に伴う誤差$\hat{s}$は$\Delta_{\Psi^*,\hat{\mathbf{r}}}EL(=EL(\Psi^*)-EL(\hat{\mathbf{r}}))$を越えることはない。そこで、本研究では$\Delta_{\Psi,\hat{\mathbf{r}}}EL$をもって、近似誤差の最大値を評価することとする。

6. モデル分析

(1) 分析ケースの設定

a) 信頼性制約の設定

ここでは、現況において、貯水容量$v=40m^3/s$を持つ貯水池が線形操作ルール$\mathbf{r_0}$に基づいて運用されているという条件下で、貯水池操作ルールの改善を行う場合を想定する。

線形操作ルール$\mathbf{r_0}=\{r_0(x,l)\}$は次式で表される操作ルールで、現行の利水計画上想定されている操作ルールである。

$$r_0(x,l)=\begin{cases} x & \text{if } x<D \\ D & \text{if } D\leq x\leq v+D \\ x-v & \text{otherwise}\end{cases} \tag{34}$$

ここで、貯水池への流入量の生起確率が、半旬平均$10.16m^3$、標準偏差$14.75m^3$の対数生起分布に従う場合を想定する。このとき、現況における渇水の生起頻度は$FR_0=5.54\times10^{-4}$(再現期間$RP=24.7$年相当)、期待渇水継続期間は$ED_0=9.680$日となる。

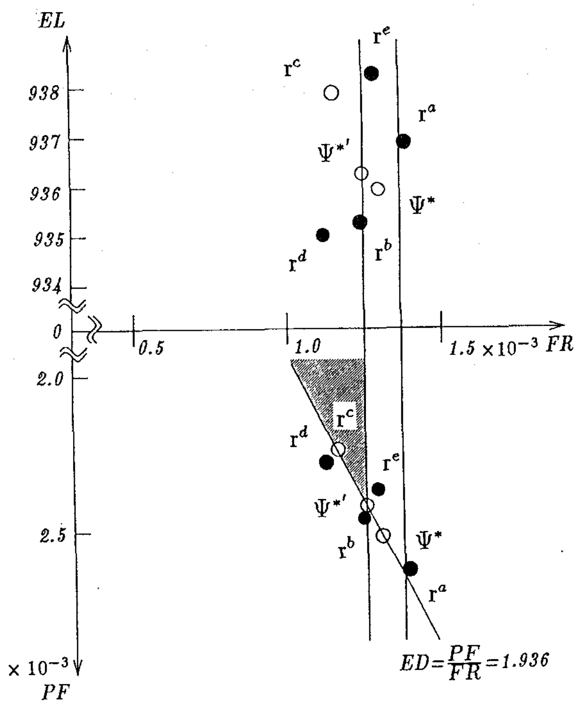
さらに、渇水の生起頻度制約のパラメータ$\overline{FR}$を$\overline{FR}=1.370\times10^{-3}$に、期待渇水継続期間制約のパラメータ$\overline{ED}$を現況値、$\overline{ED}=9.680$日に設定する。なお、$\overline{FR}=1.370\times10^{-3}$は10年1度程度の渇水生起頻度（再現期間10年相当）に対応する。

b) 損失関数の特定化

損失関数$L(r)$は次式のように特定化した。

$$L(r)=\begin{cases} ae^{b(D-r)} & \text{if } r<D \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{35}$$

ただし、a,bは損失関数のパラメータであり、$a=0.1158$、$b=0.3225$である。



図－2　操作ルール代替案$\hat{\mathbf{r}}$の設計
－操作ルールと信頼性制約の関係－

(2) 操作ルール代替案の設計

図－2は各操作ルールに対応する評価指標値を$EL-FR$平面及び$FR-PF$平面に示している。$FR-PF$平面における直線は、渇水頻度制約並びに期待渇水継続期間制約を示しており、実行可能領域を斜線で示している。また、本図中、実行可能領域に属す操作ルールは∘印で、非実行可能領域に属す操作ルールは•印で表示している。

まず、問題(32)を解いて、最適な混合戦略型操作ルールΨ^*を求めた。ここで取り上げた分析ケースにおいては、渇水の生起頻度の制約は活性化せず、期待渇水継続期間のみが活性化している。この場合、最適な混合戦略型操作ルールΨは2つの純粋戦略型操作ルール（$\mathbf{r}^a$及び$\mathbf{r}^b$）によって構成される。しかしながら、操作ルール$\mathbf{r}^a$は渇水の生起頻度の制約を満たすが、期待渇水継続期間の制約を満足していない。一方、操作ルール$\mathbf{r}^b$は期待渇水継続期間の制約を満たすが、渇水の生起頻度の制約を満足していない。このように、最適な混合戦略型操作ルールを構成する2つの純粋戦略のいずれもが制約を満足しない。そこで、渇水生起

頻度の制約を$\overline{FR}=1.370\times10^{-3}$(再現期間$RP$、10年相当)から$1.250\times10^{-3}$(再現期間、10.96年相当)に厳しくし、再度、混合戦略型操作ルールΨ'を求めた。この場合には、渇水の生起頻度及び期待渇水継続期間の制約のいずれもが活性化した。このため、混合戦略型操作ルールΨ'を構成する純粋戦略型操作ルールとして、$\mathbf{r}^b$～$\mathbf{r}^e$の4つの操作ルールが求まった。これらの操作ルールを図5－4に示す。このうち、実行可能領域($FR\le 1.370\times10^{-3}$, $ED\le 9.680$)に属す操作ルールは$\mathbf{r}^c$及び$\mathbf{r}^e$であるが、それぞれの操作ルールに対応する目的関数値（等価的option price OP_e）は、$\mathbf{r}^c$の方が高い。そこで、最適な純粋戦略型操作ルールの近似解$\hat{\mathbf{r}}$として操作ルール$\mathbf{r}^c$を採用することとする。

(3) 近似精度の評価

このようにして求めた、操作ルール$\hat{\mathbf{r}}$は最適な純粋戦略型操作ルールの近似解である。先述したように$\Delta_{\Psi^*,\hat{\mathbf{r}}}EL$は近似誤差の最大値を与える。この場合、$\Delta_{\Psi^*,\hat{\mathbf{r}}}EL$と最適な混合戦略型操作ルール$\Psi^*$に対応する期待損失との比は0.2%程度であり、極めて軽微な誤差しか生じていないことがわかる。そこで、$\hat{\mathbf{r}}$は良好な近似であると判断し、操作ルール代替案として採用することとした。

(4) 操作ルール代替案の評価

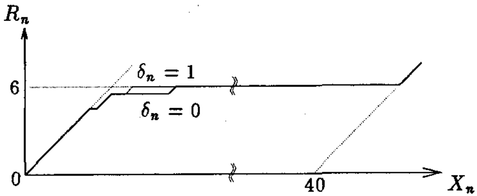
ここでは、設計された操作ルール代替案$\hat{\mathbf{r}}$を、信頼性制約を考慮しない場合の最適操作ルール$\mathbf{r}^*$(問題(32)から、信頼性制約を除いた問題の解として与えられる。)や、線形操作ルール$\mathbf{r}_0$との比較を行う。このような比較を通じて、本研究で提案した計画モデルの特質に関して考察を加える。図－3～図－5に、これらの操作ルールを図示し、表－1にこれらの操作ルールに対応する信頼性評価指標を示す。

表－1の結果から、操作ルール代替案$\hat{\mathbf{r}}$は、信頼性制約を満たす操作ルールであることが確認できる。また、同様に線形操作ルール$\mathbf{r}_0$は実行可能量域に属すが、信頼性制約を考慮しない場合の操作ルール$\mathbf{r}^*$は期待渇水継続期間の制約を満たさず実行可能領域に属さないことがわかる。

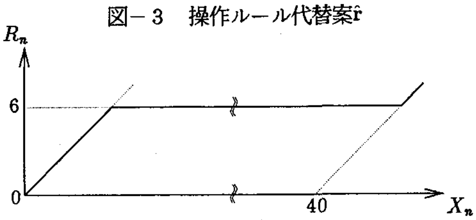
図－3から、操作ルール代替案$\hat{\mathbf{r}}$は、渇水発生前のモード($\delta_n=0$)における操作が渇水発生後のモード$\delta_n=1$における操作よりもより節水型の操作となるような操作ルールとなっていることが読み取れる。このような操作ルールは操作モードを持たない操作ルールに比べて、渇水状態から正常状態への回復を促進し、渇水の期待継続期間を減少させる。このため、操作ルール代替案$\hat{\mathbf{r}}$に対応する期待渇水継続期間EDは制約を満たし、他の操作ルール($\mathbf{r}_0$、$\mathbf{r}^*$)に比べてその値は小さくなる。

表－1　各操作ルールに対応する信頼性評価指標値

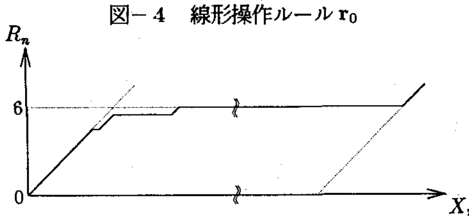
	EL	FR	RP(年)	ED(日)
$\mathbf{r}^*$	9.302×10^{-4}	1.064×10^{-3}	12.86	12.83
Ψ^*	9.359×10^{-4}	1.297×10^{-3}	10.56	9.680
$\hat{\mathbf{r}}$	9.378×10^{-4}	1.155×10^{-3}	11.86	9.609
$\mathbf{r}_0$	9.895×10^{-4}	5.542×10^{-4}	24.71	9.680



図－3　操作ルール代替案$\hat{\mathbf{r}}$



図－4　線形操作ルール$\mathbf{r}_0$



図－5　信頼性制約を考慮しない場合の最適操作ルール$\mathbf{r}^*$

また、操作ルール代替案$\hat{\mathbf{r}}$に対応する期待損失ELは、操作ルール$\mathbf{r}_0$と操作ルール$\mathbf{r}^*$の中間的な値をとっている。さらに、渇水の生起頻度に関しては、操作ルール代替案$\hat{\mathbf{r}}$の値は他の操作ルールに比べて高いが、その値は制約を満たしている。操作ルール$\mathbf{r}^*$と操作ルール代替案$\hat{\mathbf{r}}$に対応する期待損失や渇水の生起頻度の差は、期待渇水継続期間の制約を満足するために費やされたものであると解釈することができる。このように操作ルール代替案$\hat{\mathbf{r}}$は、制約を満たす範囲内で期待損失や渇水の生起頻度を増加させる代わりに、期待渇水継続期間の制約を満たすように設計されている

ことがわかる。

7. おわりに

本研究では、従来制約として考慮され得なかった渇水の「生起頻度」、「期待継続期間」を制約として明示的に考慮した貯水池操作ルール設計モデルを開発した。さらに、渇水の「頻度」、「継続期間」、「規模」といった多元的な渇水に対する信頼性評価指標を総合的に考慮した貯水池操作ルール設計・評価の方法を提示した。Yeh [7] も述べているように、渇水の継続期間を考慮し得ないという意味で現在まで開発されてきた Chance-Constrained Model は真の意味で信頼性制約（Chance-Constraints）を取り扱えていない。この意味で、本研究は Chance-Constrained Model に関する研究に関して新たな展開を与える研究となったと考える。さらに、本研究では、流入量が独立かつ同一な確率分布に従う場合に関してモデルの定式化を行ったが、定式化にあたって重要な点は状態ベクトルがマルコフ連鎖をなす点にある。従って、状態ベクトルを流入量と貯水量及び渇水モード変数の組として定義すれば、流入量がマルコフ連鎖をなす場合にも適用可能である。

本研究で提案したモデルでは、信頼性制約を有する操作ルール設計問題の厳密解は必ずしも導出されないが、簡便に近似解を求めることが出来る。モデル分析の結果、本研究で取り上げた分析ケースではその近似精度は十分に高く、実用的な近似解を与え得ることがわかった。ただし、このような良好な近似が常に得られるとは限らない。十分な近似精度の得られない場合には、本研究で提案したモデルの解を初期点として、ニューラルネットワークモデル等により近似解の改良を行うことが有効であろう。

本研究を行うにあたって、鳥取大学工学部　小林潔司教授、同　河合一教授、京都大学防災研究所　岡田憲夫教授との議論から多くの貴重な知見を得た。ここに記し、感謝の意を表する。

参考文献

1) Moran, P. A. P.: A Probability Theory of Dams and Storage System, Aust. Jour. Applied Science, Vol. 5, pp.116-124, 1954.

2) Lloyd, E. H. : Reservoirs with Serially Correlated Inflows, Technometrics, Vol. 5, No. 1, pp.85-93, 1963.

3) Prabhu, N. U. : Time-dependent Results in Storage Theory, Jour. Applied Probability, Vol. 1, pp.1-46, 1964.

4) Hashimoto T., Stedinger, J. R. and Loucks D. P. : Reliability, Resiliency, Vulnerability Criteria for Water Resource Systems Performance Evaluation, Water Resour. Res., Vol. 18, No. 1, pp.14-20, 1982.

5) 小尻利治・池淵周一・飯島健：安全度評価をベースにした最適な水利用システムの構成、第 29 回水理講演会論文集、pp.323-328 、1985.

6) Little, J. D. C.: The Use of Storage Water in a Hydroelectric System, Oper. Res., 3, 1955.

7) Yeh, W., W-G : Reservoir Management and Operations Models : A State-of-the-Art Review, Water Resour. Res., Vol.21, No.12, pp.1797-1818, 1985.

8) Yakowitz, S. : Dynamic Programming Applications in Water Resources, Water Resour. Res., Vol.18, No.4, pp.673-696, 1982.

9) Askew,A.J. : Optimum Reservoir Operating Policies and the Imposition of a Reliability Constraint, Water Resour. Res., Vol.10, No.1, pp. 51-56, 1974.

10) Askew,A.J. : Chance-Constrained Dynamic Programing and the Optimization of Water Resources System, Water Resour.Res., Vol.10, No.6, 1099-1106, 1974.

11) Rossman,L. : Reliability-Constrained Dynamic Programming and Randomized Release Rules in Reservoir Management, Water Resour. Res., Vol.13, No.2, pp. 247-255, 1977.

12) Sniedovich,M. : Reliability-Constrained Reservoir Control Problems, 1, Methodological issues, Water Resour. Res., Vol.15, No.6, pp. 1574-1582, 1979.

13) 多々納裕一・岡田憲夫・河合一：渇水の継続期間を明示的に組み込んだ貯水池運用計画モデル, 土木計画学研究・論文集, No.9, pp. 173-180 , 1991.