

都市機能の多様性を考慮した 都市人口分布の不均衡動学モデル

A Dynamic Disequilibrium Urban Population Model
with Reference to the Variety of Urban Functions

宮田 譲*

By Yuzuru MIYATA

This article attempts to extend the urban evolutionary model originally developed by Allen and Sangrier, introducing the variety of urban functions and the choice probability of logit type for the location of consumption. Then the conditions of existence and globally asymptotical stability for the equilibrium points are explored, and a comparative static analysis on changes in the number of urban functions is made. These theoretic approaches are the first attempts among other previous studies related to Allen's achievements. Finally some numerical simulations are done for a quantitative clarification of our theoretic approach.

1. はじめに

我が国では東京圏への一極集中など、都市間あるいは地域間の人口集積の違いが大きな問題となっている。都市の人口集積は主として社会移動により、年々変化しており、従ってその分析は動学的なフレームワークの中で捉えるのが自然であろう。しかし、複数の都市からなるシステムを、その空間的相互作用を考慮しつつ、動学的にモデル化した研究は驚くほど少ないのが現状である。この方向での研究としては、WhiteおよびAllen-Sangrierによるものが、数少ない例外として知られている^{1), 2)}。Whiteの研究は n 個の中心地について、それぞれの中心機能の収入

と費用を定式化し、利益が大きくなる中心地により多くの機能が集積するというメカニズムを採用したものである。またAllenらの研究は複数の都市からなるシステムにおいて、各都市間の空間的相互作用を明示したモデルを提示し、人口集積から見た中心地形成を数値シミュレーションしたものである。彼らのモデルの基本構造は、都市における財需要とそれを生産するための雇用部門を定式化し、雇用可能量と居住人口との乖離をロジスティック型微分方程式により調整しながら、各都市の人口変動を導くものとなっている。また各都市間の相互作用としてはハフモデルの考え方をを用いている。さらに都市人口がある閾値を越えた場合には、新たな種類の財が供給されるように定式化され、発展する都市と衰退する都市との定性的違いについても表現できるように工夫されている。彼らの研究が注目されている理由としては、Whiteの研究と並び、初めて中心地形成に関する動学的考察を行ったことにあり、また都市の人

キーワード：都市人口、不均衡動学、都市の多様性
*正会員 学博 北海道大学助手 大学院環境科学研究科地域計画学講座(〒060 札幌市北区北10条西5丁目)

口吸引力として都市で供給される財・サービスの多様性を考慮している点にある。都市への人口集中は今に始まったことではないが、近年では所得格差による要因から、都市が供給する多様な財・サービスの豊富さが重要な意味を持つようになってきている³⁾。彼らの研究に触発されて、多都市システムに関する動学的アプローチがいくつか発表されてきているが、対象とするモデルにおける財需要関数や魅力度の設定などにややアドホックな点が散見され、またシミュレーション結果がモデルの条件設定に極めてセンシティブであるという欠点が指摘される。さらにモデルが非線型となるために、均衡解の存在や、安定性などの理論的考察は著しく立ち後れているため、実証的应用についてはパラメータ設定などに多くの試行錯誤を必要とする状況にある。

このような観点から本研究では、Allen-Sangrierのモデルに立脚しつつも、都市機能の多様性の効用を明示化し、効用最大化から都市機能に対する需要、消費地選択確率を導出するように拡張した。そして既存研究では全く行われていなかった解析的分析に重点を置き、均衡都市人口の分布や安定性を検討することによりモデルの挙動を明らかにし、さらに数値シミュレーションにより理論的結果を補完することを目的としている。

2. 本研究のモデル

本研究については以下の前提条件を設定する。

①対象とする都市の数は2とし、その周辺には対象都市の経済活動に影響を与えない背後圏があるものとする。都市人口の変化はこの背後圏からの社会移動によるものとする。

②各都市では n 種類、 m 種類の都市機能があり、それぞれの財・サービスを供給する。

③都市機能が提供する財は両都市から消費可能であり、各財の価格は外生的に与えられているものとする。また他都市の機能を消費するためには、一定の交通費用を必要とする。

④各都市の家計は財消費に関してランダム効用関数を持ち、所得は全ての家計に等しく与えられるものとする。また各都市には労働に従事しないある一定の家計が存在するものとする。

これらの仮定のもとで、以下の主体行動を設定する。

(1) 主体行動

家計は与えられた所得、財価格のもとで効用を最大化するものとする。

$$\max u(c_{ij}^1, \dots, c_{ij}^n) + \varepsilon \quad (1)$$

$$\text{subject to } \sum_{k=1}^n p_k c_{ij}^k = y \quad (2)$$

ここで、 $u(c_{ij}^1, \dots, c_{ij}^n) = (\sum_{k=1}^n (c_{ij}^k)^{\rho})^{1/\rho}$ ($0 < \rho < 1$)

ε : ガンベル分布する確率項、 c_{ij}^r : i 都市から j 都市への都市機能 r 消費量、 p_i : 財価格($p_1 = 1 < \dots < p_n < \dots$ と仮定する)、 y : 所得

この最適化問題を解くと、自都市 i での都市機能 r に対する需要関数を得る。

$$c_{ii}^r = p_r^{1/(\rho-1)} y / \sum_{k=1}^n p_k^{\rho/(\rho-1)} \quad (3)$$

また他都市の機能を消費するとき、その交通費用を一定の τ とすれば、都市 i から都市 j への需要関数は

$$c_{ij}^r = (p_r + \tau)^{1/(\rho-1)} y / \sum_{k=1}^n (p_k + \tau)^{\rho/(\rho-1)} \quad (4)$$

となる。また都市1、2での機能種類を n 、 m とすれば、それぞれの間接効用値の確定項は、

$$v(n) \equiv v(p_1, \dots, p_n, y) = (\sum_{k=1}^n p_k^{1/(\rho-1)})^{(1-\rho)/\rho} y \quad (5)$$

$$v(m, \tau) \equiv (\sum_{k=1}^m (p_k + \tau)^{1/(\rho-1)})^{(1-\rho)/\rho} y \quad (6)$$

従って、都市1、都市2の家計が自都市で消費する確率を $r_1(n, m)$ 、 $r_2(n, m)$ とすると、

$$r_1(n, m) = \frac{\exp(v(n))}{\exp(v(n)) + \exp(v(m, \tau))} \quad (7)$$

$$r_2(n, m) = \frac{\exp(v(m))}{\exp(v(n, \tau)) + \exp(v(m))} \quad (8)$$

また労働1単位当りの都市機能 r の供給量を δ_r 、都市人口を x_1 、 x_2 とすれば、各都市での都市機能 r に対する需要に見合う労働需要は、

$$LD_{1r} = r_1 c_{11}^r x_1 / \delta_r + (1 - r_2) c_{21}^r x_2 / \delta_r \quad (9)$$

$$LD_{2r} = (1 - r_1) c_{12}^r x_1 / \delta_r + r_2 c_{22}^r x_2 / \delta_r \quad (10)$$

となる。

(2) 調整過程

本研究では財需要や労働需要の変化が、瞬時には実現せず、時間をかけて需給調整がなされるという不均衡過程を取り入れることとするが、ここではAllenらの考え方にに基づき、以下のプロセスを仮定する。

$$\dot{x}_1 = x_1 (N + \sum_{r=1}^n E_{1r} - x_1) \quad (11)$$

$$\dot{x}_2 = x_2 (N + \sum_{r=1}^n E_{2r} - x_2) \quad (12)$$

$$\dot{E}_{1r} = E_{1r} (LD_{1r} - E_{1r}) \quad (r=1, \dots, n) \quad (13)$$

$$\dot{E}_{2r} = E_{2r} (LD_{2r} - E_{2r}) \quad (r=1, \dots, m) \quad (14)$$

ここで、ドットは時間微分を表し、N:労働に従事しない一定人口、 E_{ir} :都市iの都市機能rでの雇用可能量を表す。(13)、(14)は LD_{ir} の労働需要があるとき、その労働需要を満たす雇用可能量を都市機能供給セクターが供給するプロセスを表している。即ち財需要が急激に変化することに対応する必要労働量は瞬時には確保されずに、(13)、(14)に従い調整されることを示す。次に(11)、(12)は新たに形成された総雇用可能量 $\sum E_{ir}$ の変化に従い、各都市人口が変化することを示している。

3. 均衡解の存在

ここでは(11)~(14)で表される人口変化について、その定常均衡解を求めることとする。定常均衡解を求める意義は、十分に時間が経過したときに都市人口がどの様になるのかを見るためのものであり、モデルの挙動を知る上で重要な役割を果たすものである。定常状態においては $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{E}_{1r} = \dot{E}_{2r} = 0$ が成立することから、 $x_1 \cdot x_2 \cdot E_{1r} \cdot E_{2r} \neq 0$ とすれば、ゼロでない定常均衡解は以下の連立方程式の解として与えられる。

$$N + \sum_{r=1}^n E_{1r} - x_1 = 0 \quad (15)$$

$$N + \sum_{r=1}^n E_{2r} - x_2 = 0 \quad (16)$$

$$LD_{1r} - E_{1r} = 0 \quad (r=1, \dots, n) \quad (17)$$

$$LD_{2r} - E_{2r} = 0 \quad (r=1, \dots, m) \quad (18)$$

(9)、(10)、(17)、(18)を(15)、(16)に代入すれば、以下ようになる。

$$x_1 - \sum_{r=1}^n \{r_1 c_{11}^r x_1 / \delta_r + (1-r_2) c_{21}^r x_2 / \delta_r\} = N \quad (19)$$

$$x_2 - \sum_{r=1}^n \{(1-r_1) c_{12}^r x_1 / \delta_r + r_2 c_{22}^r x_2 / \delta_r\} = N \quad (20)$$

ここで、 $A_{ij}^n \equiv \sum_{r=1}^n c_{ij}^r / \delta_r$ と置けば、(19)、(20)は以下ようになる。

$$(1-r_1 A_{11}^n) x_1 - (1-r_2) A_{21}^n x_2 = N \quad (21)$$

$$-(1-r_1) A_{12}^n x_1 + (1-r_2 A_{22}^n) x_2 = N \quad (22)$$

これより(21)、(22)が正値解を持つための十分条件として、Solowの列和条件が挙げられる。

$$0 < r_1 A_{11}^n + (1-r_1) A_{12}^n < 1 \quad (23)$$

$$0 < (1-r_2) A_{21}^n + r_2 A_{22}^n < 1 \quad (24)$$

これより正値解の十分条件として以下が挙げられる。

$$0 < A_{ij}^n < 1 \quad i, j=1, 2, \forall n \quad (25)$$

この条件は人口1人当りの都市機能需要量に見合う労働需要が1より小さいことを意味しており、それ故不労人口Nを都市が抱える事ができるわけである。不労人口がゼロの時には(21)、(22)より、解は唯一には決まらず、従って仮定④が必要となる。さて(25)を具体的に書けば、

$$A_{ij}^n = \frac{(\sum_{r=1}^n p_r^{1/(\rho-1)} / \delta_r) y}{\sum_{r=1}^n p_r^{\rho/(\rho-1)}} < 1 \quad (\text{if } i=j) \quad (26)$$

$$A_{ij}^n = \frac{(\sum_{r=1}^n (p_r + \tau)^{1/(\rho-1)} / \delta_r) y}{\sum_{r=1}^n (p_r + \tau)^{\rho/(\rho-1)}} < 1 \quad (\text{if } i \neq j) \quad (27)$$

ここで、 $y < p_r \delta_r$ とすれば、

$$\left(\sum_{r=1}^n p_r^{1/(\rho-1)} / \delta_r \right) y < \sum_{r=1}^n p_r^{1/(\rho-1)} p_r = \sum_{r=1}^n p_r^{\rho/(\rho-1)} \quad (28)$$

となり、(26)が成立する。またこの条件のもとで(27)も成立することから、 $y < p_r \delta_r$ は(23)、(24)に対する十分条件となる。このとき(21)、(22)は唯一の正値解を持つ。 $p_r \delta_r$ は長期均衡状態における賃金率を表しており、この条件は賃金率の方が与えられた所得よりも大きいことを示している。その差額が不労人口に分配された場合には、定常状態において都市全体で生産所得=分配所得が成立することになる。さて、正値解の具体的形は(21)、(22)を直接に解くことにより、

$$x_1 = \frac{\{1 + A_{21}^n - r_2 (A_{21}^n + A_{22}^n)\} N}{(1-r_1 A_{11}^n)(1-r_2 A_{22}^n) - (1-r_1)(1-r_2) A_{21}^n A_{12}^n} \quad (29)$$

$$x_2 = \frac{\{1 + A_{12}^n - r_1 (A_{11}^n + A_{12}^n)\} N}{(1-r_1 A_{11}^n)(1-r_2 A_{22}^n) - (1-r_1)(1-r_2) A_{21}^n A_{12}^n} \quad (30)$$

として得られる。また E_{1r} 、 E_{2r} の均衡解については(9)、(10)、(17)、(18)より以下のように求まる。

$$\dot{E}_{1r} = r_1 c_{11}^1 \dot{x}_1 / \delta_r + (1-r_2) c_{21}^1 \dot{x}_2 / \delta_r \quad (31)$$

$$\dot{E}_{2r} = (1-r_1) c_{12}^1 \dot{x}_1 / \delta_r + r_2 c_{22}^1 \dot{x}_2 / \delta_r \quad (32)$$

なお x_1, E_{1r} の何れかがゼロとなる均衡解も存在するが、何れも不安定な均衡解となるため、本研究では考慮しないこととする。

4. 均衡解の安定性

ここでは(29)～(32)で表される均衡解の安定性について調べることにする。均衡解の安定性は、都市人口が十分時間が経過した後定常均衡解へ近づくのかどうかを保証するものである。均衡解の安定性も、モデルの挙動を調べる上で重要な役割を果たす。記号の煩雑性を避けるために、まず $n=m=1$ の場合を取り扱おう。この場合の均衡解を $x_1^*, x_2^*, E_{11}^*, E_{21}^*$ と置き、Lyapunov関数の候補を $L(x_1, x_2, E_{11}, E_{21})$ と置くと、解軌道上での L の変化は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} = & \frac{\partial L}{\partial x_1} x_1 (N+E_{11}-x_1) + \frac{\partial L}{\partial x_2} x_2 (N+E_{21}-x_2) \\ & + \frac{\partial L}{\partial E_{11}} E_{11} (r_1 c_{11}^1 x_1 / \delta_1 + (1-r_2) c_{21}^1 x_2 / \delta_1 - E_{11}) \\ & + \frac{\partial L}{\partial E_{21}} E_{21} ((1-r_1) c_{12}^1 x_1 / \delta_1 + r_2 c_{22}^1 x_2 / \delta_1 - E_{21}) \end{aligned} \quad (33)$$

ここで、 dL/dt が均衡点の周りでLyapunov方程式を満たすとすれば、

$$\frac{dL}{dt} = X^T (A^T Q + Q A) X \quad (34)$$

が成立しなければならない。ここで、

$$\begin{aligned} X \equiv & (x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*, E_{11} - E_{11}^*, E_{21} - E_{21}^*) \\ A \equiv & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ r_1 a_{11}^1 & (1-r_2) a_{21}^1 & -1 & 0 \\ (1-r_1) a_{12}^1 & r_2 a_{22}^1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$Q: 4 \times 4$ 正定値行列

さらに(33)は、行列 A を用いて以下のように書くこともできる。

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1} x_1, \frac{\partial L}{\partial x_2} x_2, \frac{\partial L}{\partial E_{11}} E_{11}, \frac{\partial L}{\partial E_{21}} E_{21} \right) A X$$

従って(34)を満たすためには、 $X^T (A^T Q + Q A) X = 2X^T Q A X$ に注意すれば、以下の式が成立しなければならない。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial L}{\partial x_1} x_1, \frac{\partial L}{\partial x_2} x_2, \frac{\partial L}{\partial E_{11}} E_{11}, \frac{\partial L}{\partial E_{21}} E_{21} \right) &= 2X^T Q \\ &= 2 \left(\sum_{j=1}^4 x_j q_{1j} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{2}{x_j} \sum_{i=1}^4 x_i q_{ij} \quad (j=1, 2) \quad (36)$$

$$\frac{\partial L}{\partial E_{j1}} = \frac{2}{E_{j1}} \sum_{i=1}^4 x_i q_{i,j+2} \quad (j=1, 2) \quad (37)$$

ところで L を改めて $L(z_1, z_2, z_3, z_4)$ と書けば、2回微分に関する以下の式が成立しなければならない。

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial z_j \partial z_i} \quad (38)$$

ここで例えば(36)について2回微分を計算すれば、

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{2q_{21}}{x_1}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{2q_{12}}{x_2} \quad (39)$$

これらは一般に等しくないで、(38)が成立するためには $q_{1j} = q_{ji} = 0$ でなくてはならない。これより Q は正の対角要素を持つ対角行列であることが必要となる。この時、(36)、(37)は以下ようになる。

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{2}{x_1} q_{11} x_1, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{2}{x_2} q_{22} x_2 \quad (40)$$

$$\frac{\partial L}{\partial E_{11}} = \frac{2}{E_{11}} q_{33} x_3, \quad \frac{\partial L}{\partial E_{21}} = \frac{2}{E_{21}} q_{44} x_4 \quad (41)$$

ところで A については、 $-A$ に関して対角要素が正、非対角要素が非正の行列であり、さらに若干の計算により $-AX > 0$ を満たす正値ベクトル X が存在することが確認される。これより $-A$ は M 行列となり、 $A^T Q + Q A$ が負定値となる正対角行列 Q が存在することが分かる⁴⁾。これより L がLyapunov関数となるためには、以下の偏微分方程式を満たす必要がある。

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{2}{x_i} q_{ii} (x_i - x_i^*) \quad (i=1, 2) \quad (42)$$

$$\frac{\partial L}{\partial E_{ji}} = \frac{2}{E_{ji}} q_{i+2, i+2} (E_{ji} - E_{ji}^*) \quad (i=1, 2) \quad (43)$$

これらの偏微分方程式を解くことにより、 L は以下のようになる。

$$\begin{aligned} L = & q_{11} (x_1 - x_1^* \ln x_1) + q_{22} (x_2 - x_2^* \ln x_2) \\ & + q_{33} (E_{11} - E_{11}^* \ln E_{11}) + q_{44} (E_{21} - E_{21}^* \ln E_{21}) + C \end{aligned} \quad (44)$$

ここで、 C :積分定数

ところで $x_1 - x_1^* \ln x_1$ などは一般には正値でないで、以下のような変形を行う。

$$x_1 - \dot{x}_1 \ln x_1 = \dot{x}_1 \left(\frac{x_1}{\dot{x}_1} - 1 - \ln \frac{x_1}{\dot{x}_1} \right) + x_1 - \dot{x}_1 \ln \dot{x}_1$$

この右辺の第一項目は正定値となるので、Lを

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, E_{11}, E_{21}) = & q_{11} \dot{x}_1 \left(\frac{x_1}{\dot{x}_1} - 1 - \ln \frac{x_1}{\dot{x}_1} \right) \\ & + q_{22} \dot{x}_2 \left(\frac{x_2}{\dot{x}_2} - 1 - \ln \frac{x_2}{\dot{x}_2} \right) \\ & + q_{33} \dot{E}_{11} \left(\frac{E_{11}}{\dot{E}_{11}} - 1 - \ln \frac{E_{11}}{\dot{E}_{11}} \right) \\ & + q_{44} \dot{E}_{21} \left(\frac{E_{21}}{\dot{E}_{21}} - 1 - \ln \frac{E_{21}}{\dot{E}_{21}} \right) \end{aligned} \quad (45)$$

と置けば、 $x_1, E_{11} > 0$, $x_1 \neq \dot{x}_1$, $E_{11} \neq \dot{E}_{11}$ ($i=1, 2$) に対して、 $L > 0$ であり、 $L(x_1, x_2, E_{11}, E_{21}) = 0$ 、また解軌道に沿って $dL/dt < 0$ であることから、LはLyapunov関数となることが分かる。従って $x_1, E_{11} > 0$ の領域において、 $(x_1, x_2, E_{11}, E_{21})$ は大域的漸近安定であることが分かる。

全く同様の議論により都市機能が n, m 種類の場合にも均衡解 $(x_1, x_2, E_{11}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{2m})$ は正領域で大域的漸近安定な均衡解である事が証明される。

なお x_i, E_{ir} のうち、何れかがゼロである均衡解については、均衡解を中心として(11)~(14)の右辺をTaylor展開し、その固有値を調べることににより、実部が正となる固有値が少なくとも1つ存在することが確認でき、これらの均衡解は全て不安定であることが分かる。

5. 都市機能の多様性と都市人口分布

ここでは都市機能の多様性と均衡人口との関係について述べる。都市機能数が多くなれば、その都市の魅力度(間接効用値)は増加することから、その都市の人口吸引力は強まることとなる。しかしながら本研究で対象としているような多都市システムでは、一つの都市の状態のみでは都市人口は決まらず、全都市の状態を考慮する必要がある。そのためには、都市機能種類をパラメータとする定常均衡解の比較静学分析が必要となる。ところで(29)~(32)で表される均衡解の都市機能種類の違いによる変化を厳密に計算することは極めて困難である。そこで以下では計算の簡単化を図るために、 r_i, A_{ij} の変化について以下の仮定を設ける。

$$(\text{仮定}) \lim_{n \rightarrow \infty} A_{ij} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} r_i(n, m) = r_i^*(m),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_2(n, m) = r_2^*(m), 0 < r_1^*(m) \leq 1, 0 \leq r_2^*(m) < 1.$$

また A_{ij}^n は計算の便宜上 $1/n$ のオーダーで1に収束するものと仮定するが、この条件は容易に一般化できる。

$$\text{i.e. } A_{11}^n \sim 1 - f_{11}(n), \lim_{n \rightarrow \infty} n f_{11}(n) = w_{11},$$

$$A_{21}^n \sim 1 - f_{21}(n), \lim_{n \rightarrow \infty} n f_{21}(n) = w_{21}, 0 < w_{21} \leq w_{11} \leq \infty$$

これらの仮定は都市機能種類が増加するときの均衡人口の変化を確定させるものであり、 A_{ij}^n の変化速度については、消費地選択確率の変化速度との相対関係を確定させるためのものである。この仮定のもとで、均衡人口の変化は以下のように分類される。

(1) $n=m$ の場合

(31)、(32)において、 $n=m$ とすれば、

$$x_1 = x_2 = \frac{1 + A_{21}^n - r(A_{21}^n + A_{11}^n)}{(1 - r A_{11}^n)^2 - (1 - r)^2 A_{21}^n} N \quad (46)$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1, x_2 = \infty$ となる。

(2) $m < n$ の場合

以下では $m < n$ とし、 m を固定し、 n が変化した場合の均衡解の変化を調べる。この場合都市機能種類の増加に対応した、消費者の都市選択確率の変化の違いにより、以下の4通りに分類される。

① $0 < r_2^*(m) < r_1^*(m) < 1$ の場合

(31)、(32)において $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1 = \frac{2 - r_2^*(1 + A_{22}^m)}{(1 - r_1^*)(1 - r_2^* A_{22}^m) - (1 - r_2^*) A_{12}^m} N \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_2 &= \frac{1 + A_{12}^m - r_1^*(1 + A_{12}^m)}{(1 - r_1^*)(1 - r_2^* A_{22}^m) - (1 - r_1^*)(1 - r_2^*) A_{12}^m} N \\ &= \frac{1 + A_{12}^m}{1 - A_{12}^m + r_2^*(A_{12}^m - A_{22}^m)} N \end{aligned} \quad (48)$$

② $r_1^*(m) = 1, r_2^*(m) = 0, r_1(n, m) \sim 1 - g_1(n),$

$r_2(n, m) \sim g_2(n), 0 < g_1(n) < 1/n$ の場合

まず x_1 については、(31)において $r_1^*(m) \rightarrow 1, r_2^*(m) \rightarrow 0$ とすれば、 $x_1 \rightarrow \infty$ となる事は容易に確かめられる。次に x_2 について、その漸近挙動は以下のようになる。

$$x_2 \sim \frac{\{1 + A_{12}^m - (1 - g_1)(1 - f_{11} + A_{12}^m)\} N}{(1 - (1 - g_1)(1 - f_{11}))(1 - g_2 A_{12}^m) - g_1(1 - g_2)(1 - f_{11}) A_{12}^m}$$

$$= \frac{\{f_{11}+g_1-f_{11}g_1+g_1\bar{A}_{12}^m\}N}{(f_{11}+g_1-f_{11}g_1)(1-g_2\bar{A}_{12}^m)-g_1(1-g_2)(1-f_{11})\bar{A}_{12}^m}$$

$$= \frac{\{f_{11}/g_1+1-f_{11}+\bar{A}_{12}^m\}N}{(f_{11}/g_1+1-f_{11})(1-g_2\bar{A}_{12}^m)-(1-g_2)(1-f_{11})\bar{A}_{12}^m}$$

$$\rightarrow \frac{1+\bar{A}_{12}^m}{1-\bar{A}_{12}^m} N \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (49)$$

③ $\dot{r}_1(m)=1, \dot{r}_2(m)=0, r_1(n,m) \sim 1-g_1(n),$
 $r_2(n,m) \sim g_2(n), 0(g_1(n))=1/n$ の場合

まず x_1 については、②の場合と同様に $x_1 \rightarrow \infty$ となる事が分かる。 x_2 についての漸近挙動は以下のようになる。

$$x_2 \sim \frac{\{f_{11}/g_1+1-f_{11}+\bar{A}_{12}^m\}N}{(f_{11}/g_1+1-f_{11})(1-g_2\bar{A}_{12}^m)-(1-g_2)(1-f_{11})\bar{A}_{12}^m}$$

$$\rightarrow \frac{\eta+1+\bar{A}_{12}^m}{\eta+1-\bar{A}_{12}^m} N \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (50)$$

ただし $\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{11}(n)/g_1(n)$

④ $\dot{r}_1(m)=1, \dot{r}_2(m)=0, r_1(n,m) \sim 1-g_1(n),$

$r_2(n,m) \sim g_2(n), 0(g_1(n)) > 1/n$ の場合

この場合についても $x_1 \rightarrow \infty$ となる事が分かる。

x_2 についての漸近挙動は以下のようである。

$x_2 \sim$

$$\frac{\{1+g_1/f_{11}-g_1+g_1/f_{11}\bar{A}_{12}^m\}N}{(1+g_1/f_{11}-g_1)(1-g_2\bar{A}_{12}^m)-g_1/f_{11}(1-g_2)(1-f_{21})\bar{A}_{12}^m}$$

$$\rightarrow N \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (51)$$

以上の結果に加え、 $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ の状態が n, m の変動に対して対称的であることを考慮すれば、都市機能種

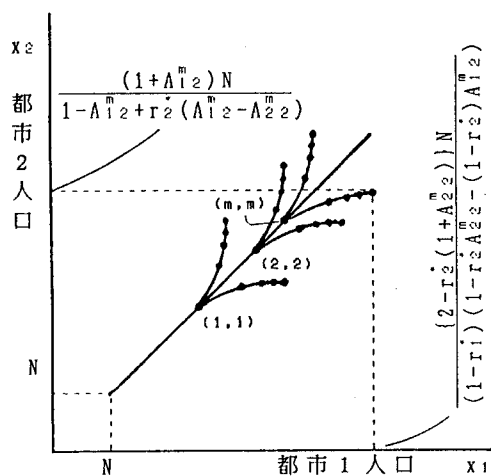


図1 均衡人口の分布 (①の場合)

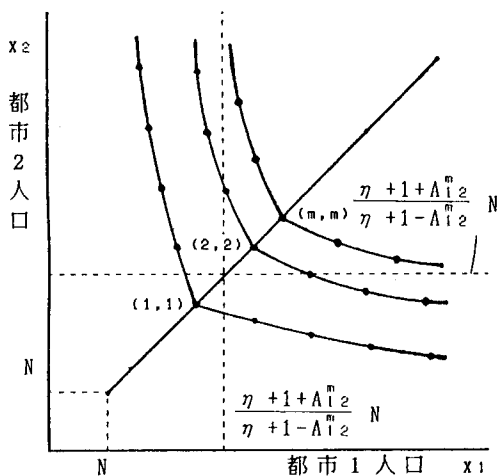


図3 均衡人口の分布 (③の場合)

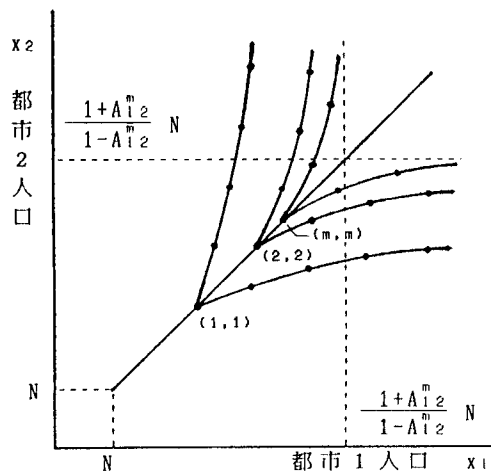


図2 均衡人口の分布 (②の場合)

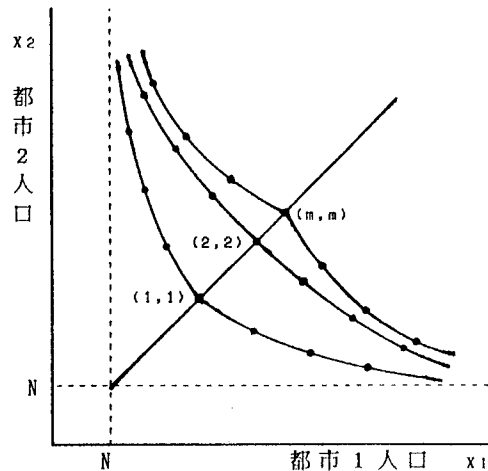


図4 均衡人口の分布 (④の場合)

類の違いによる均衡解の分布は、図1～4に示すようである。各図に示されている点は均衡人口を表し、曲線に沿って右側へシフトする点は、都市1での機能が1ずつ増加し、左側へシフトする点は都市2の機能が增加する場合を表している。また図中の(1,1)、(2,2)、(m,m)などの記号は都市1、2の都市機能数の組合せを表している。これらの均衡人口分布の違いは、消費地選択確率の変化速度の違い、即ち間接効用値の違いによるものである。間接効用値が都市機能の多様性に対し、有限、もしくは緩やかに変化する場合、多様性が少ない都市にも、空間的相互作用の結果、人口が増加する可能性があるものの、逆に間接効用値の変化が急激である場合には、多様性の高い都市に人口が吸収されてしまうことを示すものである。本研究ではCES効用関数を用いているため、間接効用値の変化は代替弾力性 $\sigma (=1/(1-\rho))$ に支配される。代替性が小さいほど間接効用値の変化は大きく、代替性が大きいほど変化は小さくなる。

6. 数値シミュレーション

ここでは以上の理論分析をより具体化するために、いくつかの静学及び動学数値シミュレーション結果を示すこととする。

(1) 静学シミュレーション

静学シミュレーションは(29)～(32)で示される均衡解について、都市機能種類をパラメータとして、均衡解の変化を見るものである。シミュレーションを行うに当たり、外生的に与えられるパラメータは次のようである。 $N=10$ 、 $y=10$ 、 $p_n=n$ 、 $\tau=1.5$ 、 $\rho=0.4$ 。また δ_r については正值解の十分条件である $y < p_r \cdot \delta_r$ が成立するように、 $\delta_r = (y+1/p_r^2)/p_r$ と設定して

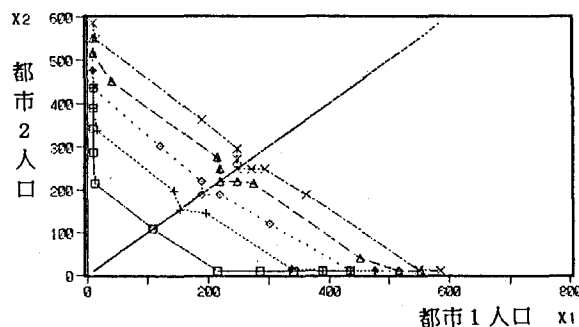


図5 比較静学シミュレーション結果

いる。均衡解の計算結果は図5に示すようであり、図4に該当していることが分かる。5.での理論分析が示すように、一つの都市だけの都市機能種類が多くなると、その都市人口が増加し、他の都市人口は基礎的人口水準10に漸近することが確認される。また2都市の都市機能種類種類が同時に大きくなる場合には、両都市の人口も同水準で大きくなることが示されている。

(2) 動学シミュレーション

ここでは x_i 、 E_{ir} に初期値を与えることにより、動学シミュレーションを行うこととする。また新たな都市機能の出現という質的变化による影響を動的に見るために、Allenらが行ったように、人口がある一定規模を越えた場合には、新たな都市機能が出現するものと仮定する。その閾値として、ここでは均衡人口の半分を越えた場合に新たな機能が出現するものとする。ここで都市間での新たな機能の出現に関する違いにより、以下の2ケースを設定した。

(1) ケース1

このケースでは新たな機能の出現は、1つの都市で現れれば、他方の都市でもほぼ同時に現れるものとしている。各変数の初期値については、 $x_1=50$ 、 $x_2=40$ 、 $E_{11}=40$ 、 $E_{21}=30$ 、 $E_{ir}=1 (i=1,2, r \geq 2)$ と設定している。シミュレーション結果は図6、7に示すようである。 $t=0$ からスタートし、 $t=t_1$ で都市1の人口が閾値を越えるため、新たな都市機能の活動が始まっている。このため第2機能の雇用可能量は均衡値である $E_{12}(2,2)$ に向かって成長して行くが、その一方で第1機能の雇用可能量は新たな均衡値 $E_{11}(2,2) (< E_{11}(1,1))$ に向かって減少して行く事が示されている。その結果、第2機能が出現した直後においては、総雇用可能量 $E_{11}+E_{12}$ は一時的に減少するため、都市1の人口も減少の傾向を示すが、その後増加に転じ、新たな均衡人口 $x_1(2,2)$ に向かうようになる。そして x_1 が次の閾値を越えた段階で新たな第3の機能の出現し、同様なパターンを繰り返すことが示されている。またこのケースでは都市2においても機能の出現が都市1とほぼ同時としているので、都市2の人口変化も都市1とほぼ同様のパターンを示している。ここでの人口変化は需要関数によるところが大きい。即ち本研究の需要関数は主体均衡から得られたものであり、都市機能の供給制約

を受けない需要関数である。従って新たな機能の出現直後では超過需要が生じ、既存機能では超過供給となる。その調整のためここでの人口変動が生じるが、現実的に人口変動をより単調なものとするためには、数量制約付き需要関数の導入が必要となり、この点については今後の課題としたい。

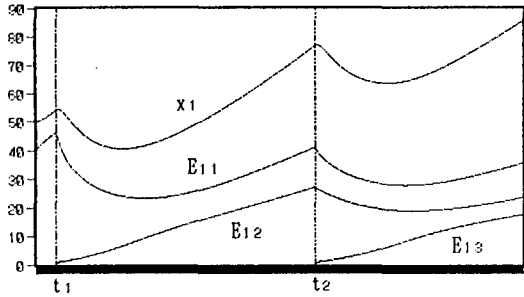


図6 都市1の人口及び都市機能（ケース1）

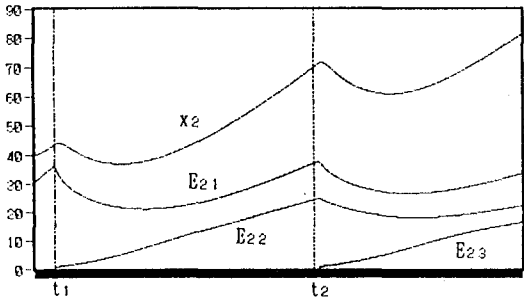


図7 都市2の人口及び都市機能（ケース1）

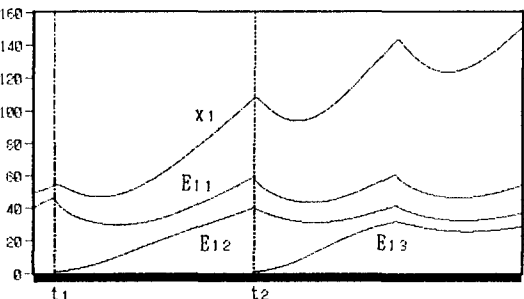


図8 都市1の人口及び都市機能（ケース2）

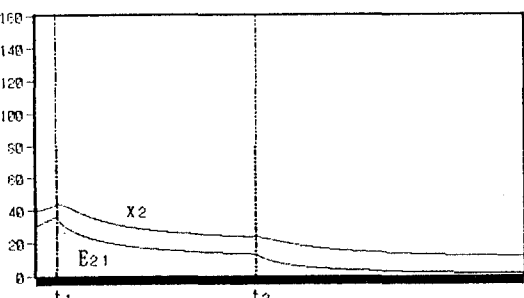


図9 都市2の人口及び都市機能（ケース2）

（2）ケース2

ここでは都市1、2の機能種類は人口閾値を越えた時のみに増加し、同時には機能種類変化が起らないものとする。初期値、閾値についてはケース1と同様とし、シミュレーション結果は図8、9に示すようである。初期人口について都市1の方が都市2よりも大きいため、都市1の方が早く閾値に達し、都市1で新たな機能の活動が始まっている。このため都市1での均衡人口はより大きくなるため、都市1の人口はより拡大し、その一方で都市2の人口はより減少する結果となっている。そのため都市2では新たな機能は出現せず、都市2の人口は基礎的人口に漸近する結果となっている。

これらの結果はAllenらの結果と定性的には類似しているが、本研究では理論的考察を踏まえることにより、数値シミュレーションの挙動に対しより深い洞察が可能となったことに意義があるものと言える。なお新たな都市機能の出現の違いにより、上記以外の様々な都市発展パターンが得られるのは言うまでもない。

7. おわりに

本研究は都市、あるいは中心地形成に関する代表的な動学モデルであるAllen-Sanglierの研究に立脚しつつ、効用最大化の観点からモデルを拡張し、従来全く検討されていなかった均衡解の存在、安定性、都市機能種類の違いによる均衡人口分布などを厳密に求め、モデルの特性を明らかにすることができた。また本研究では触れることができなかったが、本研究のモデルは都市人口のみに留まらず、商圈分析などにも適用が可能であり、土木計画への応用範囲は広いものと考えられる。今後、①都市数の一般化、②人口変化の社会増減、自然増減への分離、③価格や所得の内生化などの理論的分析を進展させつつ、実証的研究も進めて行く必要がある。

参考文献

1) White, R.W.: Dynamic Central Place Theory: Results of a Simulation Approach, Geographical Analysis Vol.9, pp.226~243, 1977
2) Allen, P.M. and Sanglier, M.: A Dynamic Model of Growth in a Central Place System, Geographical Analysis Vol.11, pp.256~272, 1979
3) Stahl, K.: A Note on the Microeconomics of Migration, Journal of Urban Economics Vol.14, pp.318~326, 1983
4) 児玉慎三、須田信英: システム制御のためのマトリクス理論、計測自動制御学会、1978