

切盛土量にあいまいさを含む土工計画への ファジィ理論の適用

APPLICATION OF FUZZY THEORY TO EARTHWORK
WITH UNCERTAINTY IN CUTTING VOLUME AND BANKING ONE

和田かおる* 山本幸司**

by Kaoru Wada, Koshi Yamamoto

In the past, the decision of earthwork planning has been systematized by application of classical transportation problem. In the practical earthwork, however, cutting volume, banking one and hauling distance cannot be often estimated as definite values in advance. Because this kind of problem cannot be formulated as classical transportation problem, earthwork planning with uncertainty is formulated by applying fuzzy theory to transportation problem in this paper. By introducing parametric programming technique to fuzzy transportation problem, it can be converted into parametric transportation problem with parameter in constraints on cutting volume and banking one. Finally, fuzzy transportation problem has been systematized for operating by micro-computer.

1. 序論

従来、土工計画の策定には古典的輸送問題を適用したシステムが開発されてきた。しかし運土計画を立てる際に、切土量、盛土量、輸送距離あるいは輸送単価すべてを確定量として把握できない場合には古典的輸送問題として定式化を行うことができない。そこで、いまこれらの値に関する不確定さをあいまい量として扱えば、輸送問題にファジィ理論を導入することで、切土量、盛土量、輸送距離あるいは輸送単価の持つあいまいさを評価対象の基準として考慮に入れることができる。

ファジィ理論の数値計画法への導入は1970年にR. E. BellmannとL. A. Zadehにより試みられた。すなわち

キーワード：ファジィ理論、輸送問題、パラメトリック計画法

*学生会員 名古屋工業大学大学院 社会開発工学科

**正会員 工博 名古屋工業大学 社会開発工学科

(〒466 名古屋市昭和区御器所町)

彼らは、意思決定者のファジィ目標とファジィ制約を統合した決定集合を定義することにより得られるファジィ環境下での意思決定の試みを行った。また、1976年にはH. J. Zimmermannによって、ファジィ目標とファジィ制約を持つ線形計画問題は、意思決定者が主観的に決定するメンバシップ関数が線形であるならば、一般の線形計画問題として解くことが可能であることが明らかにされた。

本研究では、Zimmermannによるファジィ線形計画法に対する解法を輸送問題に対して適用するものであり、第2章では参考文献(2)により提案されたファジィ輸送問題の考え方について説明し、第3章ではパソコン利用を前提としたコンピュータ処理の方法を提案する。さらに第4章においては適用事例および、参考文献(2)によるファジィ輸送問題の問題点とその対応について述べる。

2. ファジィ理論を適用した輸送問題の定式化^{1) 2)}

(1) ファジィ輸送問題の定式化

古典的輸送問題は次のように定式化される。

$$\text{目的関数: } c(\{x_{ij}\}) = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} \text{制約条件: } & \sum_j x_{ij} = a_i \\ & \sum_i x_{ij} = b_j \\ & \sum_i a_i = \sum_j b_j, \quad x_{ij} \geq 0 \\ & (i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n) \end{aligned} \quad (1)$$

ところが実際問題としては、切土量 a_i 、盛土量 b_j 、輸送単価 c_{ij} を量的に確定できない場合がある。そこでこれらの持つあいまいさに対して、ファジィ理論を導入し次のように定式化を行う。²⁾ただし、定式化する際、切土量 a_i 、盛土量 b_j が制約条件であるのに対し、輸送単価 c_{ij} は目的関数に含まれる係数であるため、両者はモデル化における性質が異なってくる。そこで、輸送単価 c_{ij} にあまいさを持つ場合については問題が複雑となり、現段階では解析が困難となることを考慮し、本稿では切土量 a_i 、盛土量 b_j のみにあいまいさを含む場合について検討を行う。

$$\text{目的関数: } c(\{x_{ij}\}) = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} \text{制約条件: } & \sum_j x_{ij} = \widetilde{a_i} \\ & \sum_i x_{ij} = \widetilde{b_j} \\ & x_{ij} \geq 0, \\ & (i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、制約条件式の中で $\widetilde{=}$ は左辺と右辺が大体等しいことを意味し、 $\widetilde{a_i}$ 、 $\widetilde{b_j}$ はそれぞれファジィ数である。図-1、2は切土量に関するメンバシップ

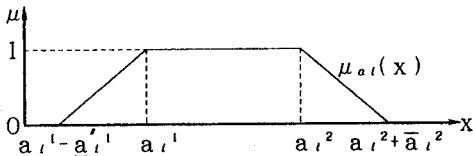


図-1 切土量のメンバシップ関数

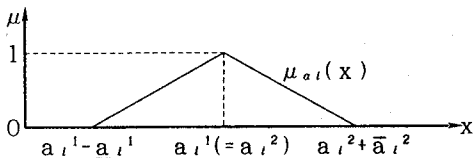


図-2 切土量のメンバシップ関数 ($a_i^1 = a_i^2$)

関数を例示したもので、図-1は台形型、図-2はその特殊な場合としての三角形型関数である。なお、ここでは切土量の場合を示したが、盛土量の場合も同様である。このとき、メンバシップ関数は次式(3)のように表現することができる。

$$\begin{aligned} \widetilde{a_i} &= [a_i^1, \underline{a_i^1}, a_i^2, \bar{a_i^2}] \\ \widetilde{b_j} &= [b_j^1, \underline{b_j^1}, b_j^2, \bar{b_j^2}] \end{aligned} \quad (3)$$

また、目的関数に対しては、総輸送費用を決定づける G というファジィ数を導入することとし、例えば、以下のように定義する。

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x < c_0 \\ f(x) & \text{for } x \geq c_0 \end{cases} \quad (4)$$

ここで $f(x)$ は連続かつ単調減少関数であり、図-3にそのメンバシップ関数を示す。

BellmanとZadehの最大化決定に従えば、この問題は制約条件と目的関数を同時にかつ最大限に満足する解を求める問題となる。つまり、

$$\mu_G(\{c(\{x_{ij}\})\}) \wedge \mu_C(\{x_{ij}\}) \rightarrow \min \quad (5)$$

ここで

$$\mu_C(\{x_{ij}\}) = \mu_{a_i}(\sum_j x_{ij}) \wedge \mu_{b_j}(\sum_i x_{ij}) \quad (6)$$

であり、 $\wedge$ は最小化演算子である。

式(5)に対する解は次のような問題を解くことにより得ることができる。

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow \max \\ \mu_G(c(\{x_{ij}\})) &\geq \lambda \\ \mu_{a_i}(\{x_{ij}\}) &\geq \lambda \\ \mu_{b_j}(\{x_{ij}\}) &\geq \lambda \\ \lambda &\geq 0, \quad x_{ij} \geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)はすなわち、ファジィ目標とファジィ制約に対する最低の満足度 λ の最大化を示している。

(2) ファジィ輸送問題へのパラメトリック計画法の導入

ここでは、前節で定式化されたファジィ輸送問題

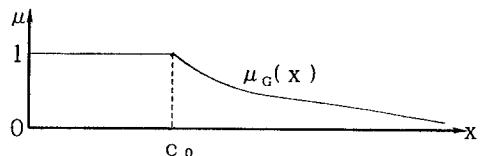


図-3 ファジィ目標 G のメンバシップ関数

を解くためにパラメトリック計画法の導入を行う。前節では、ファジィ目標とファジィ制約の満足度を表す変数として、パラメータ λ を導入した。このパラメータ λ の範囲は $[0, 1]$ であり、この範囲の λ すべてに対してそれぞれ一つの輸送問題が成立するため、その各々に対して最適解を求めなければならないことになる。そしてこれらの中から、ファジィ目標とファジィ制約を同時にかつ最大に満足するものを探索する必要がある。

このためには、まず制約条件に対する満足度を表すパラメータを用いてファジィ数 $\tilde{a}_i$ 、 $\tilde{b}_j$ を表す必要がある。これについては、 $\tilde{a}_i$ 、 $\tilde{b}_j$ に対して $(1-r)$ -cut($r \in [0, 1]$)を施せば、図-4および次式のように得ることができる。

$$\begin{aligned} a_i^{1-r} &= \{x \mid \mu_{a_i}(x) \geq 1-r\} = [a_i^1 - r\bar{a}_i^1, a_i^2 + r\bar{a}_i^2] \\ b_j^{1-r} &= \{x \mid \mu_{b_j}(x) \geq 1-r\} = [b_j^1 - r\bar{b}_j^1, b_j^2 + r\bar{b}_j^2] \end{aligned} \quad (8)$$

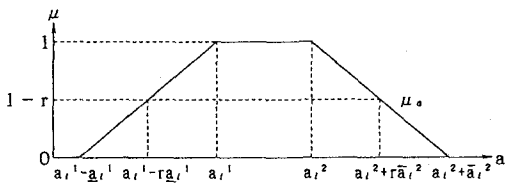


図-4 $(1-r)$ -cut の概念図

これを用いれば、式(2)のファジィ輸送問題は次のように変換できる。

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min \\ \sum_i x_{ij} &\in [a_i^1 - r\bar{a}_i^1, a_i^2 + r\bar{a}_i^2] \\ \sum_j x_{ij} &\in [b_j^1 - r\bar{b}_j^1, b_j^2 + r\bar{b}_j^2] \\ x_{ij} &\geq 0, r \in [1-\bar{r}, 1] \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \sup_x \mu_{a \cap b} \\ \bar{a} &= \sum_i \bar{a}_i \\ \bar{b} &= \sum_j \bar{b}_j \end{aligned} \quad (10)$$

であり、この r は制約条件の満足度の最大値を示すものである。

さて式(9)の解を得るためには、表-1に示された輸送問題を解けばよい。この表において最初の m 行は輸送されるべき最小量を意味しており、すなわちこれらの行における切土すべてが、残ることなく輸送されなければならないことを示している。したがって、これらの行に対しては架空の盛土場であるFB列のマスに輸送単価として M (無限大数)を入れることにより、輸送せずそのまま残しておくことを禁じている。これに対し、次の $1 \sim m$ 行は輸送可能な最大余剰量を示すが、これは必要不可欠な切土ではないため、FBへの輸送単価を0として、輸送される必要のない切土の発生を認めている。なお列に

表-1 パラメトリック輸送問題

盛土場 切土場	1	2	...	n	1*	2*	n*	FB	切土量	
1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}	M	$a_1^1 - r \underline{a}_1^1$
2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}	M	$a_2^1 - r \underline{a}_2^1$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mn}	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mn}	M	$a_m^1 - r \underline{a}_m^1$
* 1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}	0	$(a_1^2 - a_1^1)$ $+ (\bar{a}_1^2 + \underline{a}_1^1)r$
* 2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}	0	$(a_2^2 - a_2^1)$ $+ (\bar{a}_2^2 + \underline{a}_2^1)r$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
* m	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mn}	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mn}	0	$(a_m^2 - a_m^1)$ $+ (\bar{a}_m^2 + \underline{a}_m^1)r$
FC	M	M	...	M	0	0	...	0	0	$\sum_j (b_j^2 - b_j^1)$ $+ r \sum_j (\bar{b}_j^2 + \underline{b}_j^1)$
盛土量	$b_1^1 - r \underline{b}_1^1$	$b_2^1 - r \underline{b}_2^1$	...	$b_n^1 - r \underline{b}_n^1$	$(b_1^2 - b_1^1)$ $+ (\bar{b}_1^2 + \underline{b}_1^1)r$	$(b_2^2 - b_2^1)$ $+ (\bar{b}_2^2 + \underline{b}_2^1)r$	...	$(b_n^2 - b_n^1)$ $+ (\bar{b}_n^2 + \underline{b}_n^1)r$	$(\sum_i a_i^2 - \sum_j b_j^1)$ $+ (\sum_i \bar{a}_i^2 + \sum_j \underline{b}_j^1)r$	

対しても同様である。

表-1で表される輸送問題を解くことにより、パラメータ r を含む解 $\{x_{ij}(r)\}$ が得られ、これを式(4)に代入すればファジィ目標の満足度もまたパラメータ r で表すことができる。

最終的には、式(5)は以下のように表すことができ、ファジィ輸送問題はこのように r を求める問題に変換できることがわかる。

$$\mu_D(\{x_{ij}(r)\}) = \mu_G(\{x_{ij}(r)\}) \wedge (1-r) \rightarrow \max \quad (11)$$

(3) 解の整数化の検討

古典的輸送問題では、各切土量 a_i 、盛土量 b_j が本来整数値であれば、最適解も整数値として得ることができた。しかし、前項で述べた解法においては、解にパラメータ $r \in [0, 1]$ を含むため一般的に実数解となる。そのため以下に示す手順によって解の整数化を行う。

step 1: 前項で求めた解が整数ならばこの解が最適解となり、計算終了。そうでなければ $\lambda = \mu_D(\{x_{ij}\})$ としてstep 2へ進む。

step 2: 次の問題を解く。

$$\begin{aligned} \sum_j c_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min \\ \sum_j x_{ij} &\in [a_i^\lambda] \\ \sum_i x_{ij} &\in [b_j^\lambda] \\ x_{ij} &\geq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $[a_i^\lambda]$ はファジィ数 a_i を λ -cutすることにより得られる整数の集合である。 $[b_j^\lambda]$ についても同様である。

step 3: step 2で求めた解 $\{x_{ij}\}$ より式(11)から $\mu_D(\{x_{ij}\})$ を求め、さらに次式から λ を求める。

$$\bar{\lambda} = \max \{ \max_i \mu_{G_i}(x), \max_j \mu_{G_j}(x) \} \quad (13)$$

この $\bar{\lambda}$ はstep 2で行った λ -cutよりも一段下の制約条件に対する満足度を与えている。ゆえにここで、

$$\mu_D(\{x_{ij}\}) \geq \bar{\lambda} \quad (14)$$

ならばstep 2で求めた解を最適解とし、そうでなければ $\lambda = \bar{\lambda}$ として満足度を下げ、step 2へ戻り解の改善を繰り返す。

3. ファジィ輸送問題のコンピュータプログラム

ファジィ輸送問題は表-1からもわかるとおり、

$M \times N$ の問題がパラメトリック輸送問題への変換に伴い、 $(2M+1) \times (2N+1)$ という大きさのマトリックスを持つ非常に大きな問題となる。またパラメトリック輸送問題の解析においては、切土量、盛土量にパラメータ $r \in [1-\bar{r}, 1]$ を含むため、 r の値によって解が異なってくる。このため、 r の場合分けが n 通りあれば、 n 通りの問題を解く必要がでてくる。したがって、このような問題を手計算で解くことは不可能であると考え、ファジィ輸送問題の解析に関するコンピュータプログラムを作成する。

ファジィ輸送問題においても従来の輸送問題と同様のプログラムを用いるが、上述のように r のとりうる値に関する場合分けを行いながら初期基底解を決定する部分が問題となるため、本研究では次の方法で対処している。また図-5にはプログラムのフローチャートを示す。

① 必要が生じることにより r の場合分けを行う方法

初期解を北西隅ルールで求めるためには、計算の手続き上、ある輸送ルート (i, j) に対する切土量 A_i 、盛土量 B_j の大小関係がわかっていなければならない。³⁾しかし、パラメトリック輸送問題においては各切土量、盛土量にパラメータ r を含むため、 r の値により A_i 、 B_j の大小関係も変化する。したがって、 A_i 、 B_j の大小が $r \in [r_{min}, r_{max}]$ の範囲で変化するならば、次式を解く。

$$|A_i(r) - B_j(r)| = 0 \quad (15)$$

そして、その解を r' として新たに $[r_{min}, r']$ 、

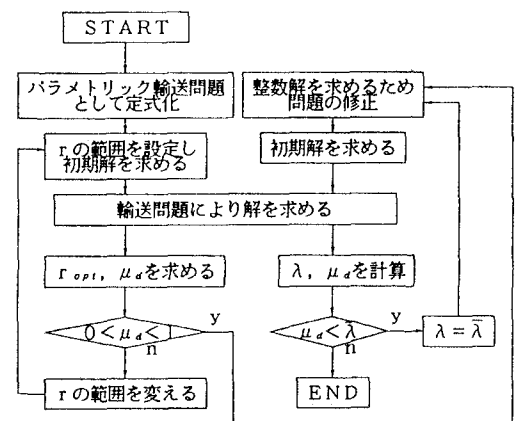


図-5 ファジィ輸送問題のフローチャート

$[r', r_{max}]$ のどちらかに r の範囲を設定し直し、この範囲で計算を進める。この操作を $[1 - \bar{r}, 1]$ の全範囲で行えば、図-6 に示すように解 $\{x_{ij}(r)\}$ に対する $\mu_G(r)$ を求めることができ、次式によって μ_D およびそのときの $r(r_{opt})$ が得られる。

$$\mu_D = \max \{ \mu_C(r) \cap \mu_G(r) \} \quad (16)$$

この方法によれば、理論的にも確実な結果を得ることができるが、問題規模が大きくなるにつれ計算時間も増加し、実用的に許容できるかどうかの問題となってくる。また最適解が得られるのは、 r がある特定の値になる場合であるのに対し、この方法では必要のない範囲までも場合分けを行うため、計算効率上の問題がある。

② r をあらかじめいくつかの区間に分ける方法

問題が大きき場合分け数が多い場合には、計算の無駄を省くため、あらかじめ r の範囲を一定の区間に区切り、それぞれの r に対して初期基底解を求め、これを各区間の代表値として採用するという方法である。この方法によれば計算効率は前述の方法よりも改善されると考えられる。しかし、この方法では近似的に r_{opt} を求めるため、精度的には前述の方法よりも劣るという問題がある。このことより、この方法では効率と精度のバランスを考慮しながら r の区間を設定していかなければならない。

4. 計算事例と解法上の問題点の検討

(1) 計算事例とその考察

ここでは、運土工事において、それぞれの切土量、盛土量が量的に不確定要素を含み、はっきりと定め

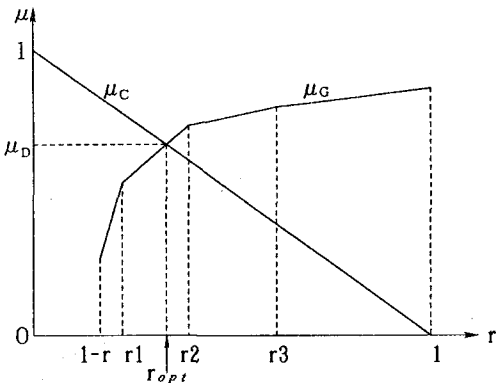


図-6 μ_C と μ_G による μ_D の決定

ることができないあいまいな量となる場合を想定し、その運土計画をファジィ輸送問題として定式化し、策定することを考える。

各切土、盛土量はあいまいな量であるから、それぞれにメンバーシップ関数を設定することでファジィ数で表し、これらをファジィ制約とする。また運搬にかかる総費用の目標値に対してもメンバーシップ関数を設定し、これをファジィ目標とする。このとき、ファジィ制約を満足しながらファジィ目標を最大限に達成するような輸送計画を求めればよい。

いま、一つの具体例として次のような簡単な問題を考える。すなわち3ヶ所の切土場A～C、2ヶ所の盛土場D、Eでの処理土量がそれぞれ以下のようなファジィ数で与えられていたとする。

(切土量)

$$\begin{aligned} A: \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10, 3, 10, 3 \\ 3, 1, 3, 1 \end{pmatrix} \\ C: \begin{pmatrix} \tilde{a}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4, 2, 4, 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(盛土量)

$$\begin{aligned} D: \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5, 3, 5, 3 \\ 10, 6, 10, 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

そして、各切土場～盛土場間の運土単価は確定値として次のように見積もられているものとする。

(運土単価)

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

また総輸送費用についても次に示すメンバーシップ関数が想定されているものとする。

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0 & x > 40 \\ 1 & x = 40 \\ \frac{40-x}{30} & 10 < x < 40 \end{cases} \quad (17)$$

このとき、2. (2) で示した考え方に基づいてこの問題をパラメトリック輸送問題として扱うと、表-2 が得られる。ここで、

$$\tilde{a} = a_1 + a_2 + a_3 = (17, 6) \quad (18)$$

$$\tilde{b} = b_1 + b_2 = (15, 9)$$

であるから、制約条件の最大満足度を得るときの μ は $13/15 (= r)$ となる。よって r のとる範囲は、 $2/15 < r < 1$ (19)

とすればよい。そこで表-2 の輸送問題を解くと、

表-3, 4のように、 r により場合分けされた解が求められる。またこのときの総費用 Z は次のように得られる。

$$Z = \begin{cases} 40-23r & \text{for } r \in [2/15, 2/3] \\ 36-17r & \text{for } r \in [2/3, 1] \end{cases} \quad (20)$$

そして $\mu_G(r)$ は、式(20)へ代入することにより以下のように得られる。

$$\mu_G(r) = \begin{cases} 0.767 & \text{for } r \in [2/15, 2/3] \\ 0.567r+0.133 & \text{for } r \in [2/3, 1] \end{cases} \quad (21)$$

これよりファジィ制約である μ_C とファジィ目標である μ_G を同時に、しかも最大に満足する解は式(11)より、 $r=0.566$ のときに得られることになり、そのときの満足度は $\mu_D=0.434$ となる。したがって $r=0.566$ を含む r の範囲で求められた解にこの値を代入すると、最適解を実数値として求めることができる。しかし、最適解を整数値として求める必要があるならば次のステップへ進み、解の改善を行うことになる。

本事例では上述の $\mu_D (= \lambda)$ を用いて、問題を次のように変換する。

$$\begin{aligned} [a_1^1] &= [9, 11] & [b_1^1] &= [4, 6] \\ [a_2^1] &= [3, 3] & [b_2^1] &= [7, 13] \\ [a_3^1] &= [3, 5] \end{aligned}$$

上の問題はパラメータを含まないため、表-5に示すように定式化され、最適解も整数値となることが

保証され、次のようになり、目的関数の値は33となる。

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

この結果、式(11)、(13)より $\mu_D=0.233$ 、 $\bar{\lambda}=0.333$ が得られる。しかしこの段階では $\mu_D < \bar{\lambda}$ となり、式(14)に示した最適性の条件を満たしていないため、まだ最適解には至っていない。そこで $\lambda = \bar{\lambda}$ とし、次のように問題を変換する。

$$\begin{aligned} [a_1^2] &= [8, 12] & [b_1^2] &= [3, 7] \\ [a_2^2] &= [3, 3] & [b_2^2] &= [6, 14] \\ [a_3^2] &= [3, 5] \end{aligned}$$

この問題を解くと、次の解が得られ、総輸送費用は28となる。

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

先程と同様にして、この解に対する μ_D 、 $\bar{\lambda}$ はそれぞれ0.400、0.167となる。そしてこの段階で $\mu_D \geq \bar{\lambda}$ を満たすため、この解が最適解となる。

次にこのようにして得られたファジィ輸送計画問題としての最適解と、古典的輸送問題として解いた場合の最適解とを比較してみる。同じ事例に対して切土、盛土量の数値としてクリスプな値を与えると、

表-2 パラメトリック輸送問題 (計算事例)

	D	E	D	E	FB	供給量
A	1	3	1	3	M	10-3r
B	2	5	2	5	M	3-r
C	3	2	3	2	M	4-2r
A*	1	3	1	3	0	6r
B*	2	5	2	5	0	2r
C*	3	2	3	2	0	4r
FC	M	M	0	0	0	18r
需要量	5-3r	10-6r	6r	12r	2+15r	

表-4 パラメトリック輸送問題の解

($r \in [2/3, 1]$)

	D	E	D*	E*	FB	供給量
A	5-3r	8-7r	-3+7r			10-3r
B			3-r			3-r
C		4-2r				4-2r
A*					6r	6r
B*					2r	2r
C*		-2+3r			2+r	4r
FC				12r	6r	18r
需要量	5-3r	10-6r	6r	12r	2+15r	

表-3 パラメトリック輸送問題の解

($r \in [2/15, 2/3]$)

	D	E	D*	E*	FB	供給量
A	5-3r	8-7r	-3+7r			10-3r
B			3-r			3-r
C		2+r		2-3r		4-2r
A*					6r	6r
B*					2r	2r
C*					4r	4r
FC				-2+15r	2+3r	18r
需要量	5-3r	10-6r	6r	12r	2+15r	

表-5 解の改善過程における定式化

	D	E	D*	E*	FB	供給量
A	1	3	1	3	M	9
B	2	5	2	5	M	3
C	3	2	3	2	M	3
A*	1	3	1	3	0	2
B*	2	5	2	5	0	0
C*	3	2	3	2	0	2
FC	M	M	0	0	0	8
需要量	4	7	2	6	8	

先ほどの問題は次のようになる。

(切土量)

$$\begin{aligned} A: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ B: \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ C: \begin{pmatrix} a_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(盛土量)

$$\begin{aligned} D: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \\ E: \begin{pmatrix} b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この問題を古典的輸送問題として解くと、

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

が得られ、総輸送費は32となる。これをファジィ輸送問題と比較すると、目的関数としての総輸送費用はやや高くなっている。しかしこの結果から短絡的にファジィ輸送問題の方が優れているとはいえない。なぜならばこの二つの問題の間には、切土量・盛土量の捉え方に本質的な違いがあるからである。古典的輸送問題に対してファジィ輸送問題では、メンバシップ関数を定めることにより、切土量・盛土量の上限値・下限値が決定されるが、その範囲での値に対しては自由度を持っており、これを束縛するものはファジィ目標とファジィ制約に対する満足度のみである。このため、ある満足度を得るためには、古典的輸送問題より得られた解と比較してコストが高くなる可能性も低くなる可能性も存在する。しかしファジィ輸送問題を適用することの利点は、単にコストの低減をはかることではなく、切土量・盛土量に関する量的な不確実性に対して柔軟な対応ができるということである。

(2)ファジィ輸送問題の入力データに関する制限に関する考察

ファジィ輸送問題を2.(2)で示したパラメトリック輸送問題に変換して解く場合、常に実行可能解が得られる保証はなく、実行可能となるには入力データについてある制限が必要となる。すなわち、パラメトリック輸送問題では、式(9)にも示されているように、 $r \in [1-\bar{r}, 1]$ という条件が存在した。したがって、もし $1-\bar{r} > 1$ 即ち $\bar{r} < 0$ となるデータが入力されたとすれば、 r の範囲を定義することができなくなり、実行可能解が存在しなくなる。ここで一般的に、

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \sum_i \tilde{a}_i = (a^1, \underline{a}^1, a^2, \bar{a}^2) \\ \tilde{b} &= \sum_j \tilde{b}_j = (b^1, \underline{b}^1, b^2, \bar{b}^2) \end{aligned} \quad (22)$$

と示すことにすれば、 $\bar{r} < 0$ となるための条件は、

$$\begin{aligned} a^1 - b^2 &> \underline{a}^1 + \bar{b}^2 \\ b^1 - a^2 &> \underline{b}^1 + \bar{a}^2 \end{aligned} \quad (23)$$

と示すことができる。この不等式は切土量、盛土量のメンバシップ関数 μ_A 、 μ_B の間に共通集合が存在しないことを示している。このような場合、切土側(盛土側)の最低処理土量が盛土側(切土側)の最大処理土量を上回るため、問題を解く段階で表-1において輸送単価を $M(\infty)$ とし、基底解が入ることを禁じたFB(FC)の位置に基底解が入ることになり、以後の計算が実行不可能となる。

そこで、ファジィ輸送問題では切土量と盛土量のメンバシップ関数の間に共通集合が存在するよう以下の条件を加えておく必要がある。

$$\begin{aligned} a^1 - b^2 &\leq \underline{a}^1 + \bar{b}^2 \\ b^1 - a^2 &\leq \underline{b}^1 + \bar{a}^2 \end{aligned} \quad (24)$$

次に、ファジィ輸送問題は古典的輸送問題の拡張であるという観点から、式(24)をもう一度見直すと、古典的輸送問題では総切土・盛土量に関して次の条件が与えられているのに対し、

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j \quad (25)$$

ファジィ輸送問題においては、総切土量と総盛土量に関する条件の直接的な記述はなく、代わりに r の範囲が制限され、それから式(24)が導かれた。これは μ_A と μ_B が共通集合を持つ条件であったが、別の表現をすれば、総切土量と総盛土量がある程度等しいこと、つまり、

$$\sum_i \tilde{a}_i = \sum_j \tilde{b}_j \quad (26)$$

を示しているといえる。これは古典的輸送問題の制約条件である式(25)に対応していると考えることができる。

ここでDuboisとPradeが提案したPossibilityの概念を用いて次の条件を仮定する。

$$\text{Pos}(a=b) = \sup \min(\mu_a(r), \mu_b(r)) \geq 0 \quad (27)$$

そして式(27)を書き直すと、

$$a^1 - r\underline{a}^1 \leq b^2 + r\bar{b}^2 \quad \text{かつ} \quad a^2 + r\bar{a}^2 \geq b^1 - r\underline{b}^1 \quad (28)$$

が得られる。これを r について解くと、

$$\begin{aligned} r &\geq (a^1 - b^2) / (\underline{a}^1 + \bar{b}^2) \\ r &\geq (b^1 - a^2) / (\underline{b}^1 + \bar{a}^2) \\ r &\leq 1 \end{aligned} \quad (29)$$

となり、これから、

$$\begin{aligned} 1 &\geq (a^1 - b^2) / (\underline{a}^1 + \overline{b}^2) \\ 1 &\geq (b^1 - a^2) / (\underline{b}^1 + \overline{a}^2) \end{aligned} \quad (30)$$

が得られる。さらにこれを書き直すと、最終的に次式が得られる。

$$\begin{aligned} a^1 - b^2 &\leq \underline{a}^1 + \overline{b}^2 \\ b^1 - a^2 &\leq \underline{b}^1 + \overline{a}^2 \end{aligned} \quad (31)$$

これは式(24)と完全に一致することがわかる。このことから、古典的輸送問題における式(25)の条件は、ファジィ輸送問題に拡張された場合に、DuboisとPradeが提案しているpossibilityの概念を当てはめることによって説明できたことになる。

次に、古典的輸送問題において式(25)が成立しない場合を考える。通常はこのままでは解くことができないため、式(25)が成り立つよう問題を作り変える必要があるが、その方法は事例により異なる。たとえば、各切土場・盛土場がそれぞれの切土・盛土量を必然的なものとし、ない事例では輸送単価が0である架空の切土場・盛土場を設けることにより式(25)を満足する問題に変換できる。一方、各切土場・盛土場がそれぞれの切土・盛土量を必然的なものとして決められている事例では、架空の切土場・盛土場を設けることは許されないため、式(25)を満足するよう新たに切土場・盛土場を見つけ出すか、あるいは切土量・盛土量の調整を計る以外に方法はない。

ところでファジィ輸送問題において式(24)を満たさない場合の補正方法は、古典的輸送問題における後者の場合に対応しているといえる。つまり切土量と盛土量のバランスをとるためには、既存の一部の切土(盛土)場の切土(盛土)量に関するメンバシップ関数の変更を行うか、あるいは新たに切土(盛土)場を見出す必要が生じる。

5. 結論

建設工事では都市土木で発生する残土輸送や、宅地造成、埋立工事などの運土工事のように、施工計画の立案に際して輸送問題を適用することができる事例が見られる。しかしながら、従来の古典的輸送問題では切土量、盛土量に不確定要素含む場合については対応することができなかった。

そこで本研究では切土量、盛土量に不確定要素が含まれている場合の土量配分計画立案に対して、輸

送量のあいまいさを意思決定の際に評価できるファジィ理論を適用した輸送問題を取り上げ、その解析法について考察を行った。その結果、Zimmermannが提案したファジィ制約とファジィ目標に対する満足度をパラメータとすることによってパラメトリック計画法として定式化が可能となった。

しかし、パラメトリック計画法においては、パラメータ r の取り扱いが重要となる。そこで本研究では実行可能解や最適解の探索を効率よく行うため、これらをコンピュータプログラムとして自動処理できるアルゴリズムを提案した。またファジィ輸送問題としての定式化において、実行可能性を保証するための制約条件としての切土量、盛土量の存在範囲が明らかになった。

しかし、実際には意思決定者の主観によって決められるメンバシップ関数が最適解に与える影響が大きいため、メンバシップ関数の決定方法や、得られた解の信頼度を検討する必要がある。さらには、目的関数の係数にあたる輸送単価に対しても、不確定要素の存在を考慮に入れたファジィ輸送問題の定式化や、土工規模の拡大に対応するため効率的な計算を行えるプログラムの再構築が必要である。

【参考文献】

- 1) 和田、山本：日程・作業空間上制約のある大規模土工計画のシステム化、土木学会第8回建設マネジメントに関する研究発表・討論会講演集、pp.205-210、1990
- 2) Stefan CHANAS, Waidemar KOLODZIEJCZYK, Anna MACHAJ : A FUZZY APPROACH TO THE TRANSPORTATION ALGORITHM, Fuzzy Sets and Systems 11, pp.211-221, 1984.
- 3) 吉川和広：最新土木計画学、森北出版、1985
- 4) D.Dubois, H.Prade : Ranking Fuzzy Numbers in Setting of Possibility Theory, Information Sciences, Vol.30, pp183-224, 1983
- 5) D.Dubois : Linear Programming with Fuzzy Data, in Analysis of Fuzzy Information, Vol.3, Bezdek, J.C(ed.), CRC Press, pp.241-263, 1987
- 6) 坂和正敏：ファジィ理論の基礎と応用、森北出版、1989