【土木計画学研究・論文集 No.9 1991年11月】

# 渇水の継続期間を明示的に組み込んだ貯水池運用計画モデル*

# Model for Designing the Optimal Reservoir Operation with Drought Duration Considered *

多々納裕一** 岡田 憲夫*** 河合 一****

By Hirokazu TATANO**, Norio OKADA*** and Hajime KAWAI****

This paper provides a new model for reservoir operation optimization which explicitly takes into account both the amount of the shortage of water and the drought duration. The model is formulated as a stochastic dynamic programming model which minimizes the expected loss per period. By use of this model, the optimal release rule is determined as a function of the maximum available amounts of water (i. e., water storage and inflow) and the drought duration. The expected loss is calculated based on the single stage loss function which is a function of both the reservoir release and the drought duration. It is shown that reliability performance indices, such as 'drought frequency' and 'expected drought duration', are estimated as the expected loss per period for a special case of this extended single stage loss function. The paper also proposes models for evaluating reliability performances based on the above operation design model.

## 1. はじめに

ダム貯水池による水資源開発に関する効果は、基本的には、貯水池規模や配置などによって定まる建設費用と建設によって生じる便益とから決定されるが、この両者の関係にはダム貯水池の操作が密接に関係している。例えば、貯水池群の配置・規模が与えられていても、貯水池操作の設定如何によっては、渇水により被る損失は自ら異なってくることは明らかである。このように貯水池操作ルールは貯水池の規模や配置と水資源開発による便益を関係づける役割を果たしている。したがって、計画段階から貯水池操作を適切に考慮しておくことは、水資源計画上重要である。

このような背景から、貯水池の最適操作問題に関して Stochastic Dynamic Programming(確率 DP) 等を適用した多くのモデルが提案されてきた [1) 2)] 。これらのモデルの多くは期待損失の最小化を目的として構成されている。このとき、DP を用いた定式化を行う際に各期の損失関数 ('single-stage loss function') を定義する必要がある。多くの場合、この損失関数は当該期の放流量のみの関数として定義されている。このため、渇水によって生じる当該期の被害はそれまでの渇水の継続期間に関係なく、当該期の放流量のみによって定まる。

ところが、現実には、渇水による被害は、当該期の不足水量 (需要量と供給量の差) と当該期までの渇水継続期間によって左右される。このような事情を背景として、渇水に対する水資源システムの信頼性を評価するための研究が行われてきた。Moran [3)] の貯水地の統計理論 ('Stochastic Reservoir Theory') に関する先駆的な研究以来、Lloyd [4)] , Prabufu [5)] 等によっ

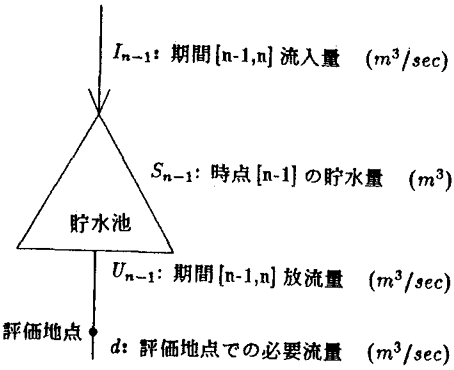
*キーワーズ : 計画モデル、貯水池操作、渇水継続期間、信頼性分析、確率 DP

**正員、鳥取大学助手、工学部社会開発システム工学科
(鳥取市湖山町南 4-110)
***正員、京都大学教授 防災研究所水資源研究センター
(宇治市五ヶ庄)
****正員、鳥取大学教授、工学部社会開発システム工学科

て大きな発展がもたらされた。これらの研究では特定の貯水池操作を想定しているが、これらの研究によって、渇水に対する貯水池の信頼性を解析するための数学的基礎が与えられた。Hashimoto ら[6] は、これらの研究の成果をふまえ、応用確率論の1分野として発展してきた信頼性解析の手法を適用して、水資源システムの信頼性解析を行った。Hashimoto らは、水資源システムの信頼性評価指標として、'reliability'(信頼度), 'resiliency'(回復度), 'vulnerability'(深刻度) を提示し、これらを用いて渇水に対する水資源システムの信頼性を解析することを提唱した。これらの一連の研究を通じて渇水の「頻度」、「継続期間」及び「規模」といった側面から、渇水に対する水資源システムの信頼性を総合的に評価することが可能となった[7)-9)]。しかしながら、これらの研究では、任意の貯水池操作に対してこれらの信頼性評価指標を算定することのできるモデルを提示してはいるが、貯水池操作の最適化は図られていない。

したがって、最適貯水池操作ルールを検討する際には、今のところやはり確率DPを用いることが最も有効であると考えられる。しかし、通常、確率 DP を用いて貯水池の最適操作を求めると、指標間のトレードオフの関係から、渇水による期待被害は減少するが、生起頻度や継続期間はむしろ増加するおそれがある。このような問題を解決するために Chance-Constrained Model 等が開発され(例えば、Askew[10), Siedovich[11)], Rossman[12)])、渇水の生起頻度（確率）の制約の下で渇水の期待被害を最小化するという試みがなされてきている。しかしながら、渇水の継続期間については依然未考慮のままである[1)]。これは確率 DP を用いるにあたって、各期の損失関数を当該期の放流量のみの関数として取り扱ってきたことによる。

本研究では、各期の損失関数を当該期の放流量とそれまでの渇水の継続期間の関数として表現し、このような損失関数をもとに算定される期待損失の最小化を図ることを試みる。このような改良を加えることによって、渇水の継続期間を明示的に考慮した期待損失の算定が可能となるとともに、渇水の「頻度」、「継続期間」及び「規模」といった水資源システムの信頼性評価指標とこのように改良を加えられた損失関数をもとに算定される1期あたりの期待損失との関係を明らかにする。すなわち、まず、上述したように拡張された損失関数（拡張型損失関数）を用いて、確率DPにより最適操作ルールを設計するための計画モデルを提示する。ついで、渇水の「頻度」、「継続期間」、「規模」といった各指標を定式化し、これらの指標が拡張型損失関数をもとに算定された1期当たりの期待損失の1特殊形として導出されることを示す。さらに、マルコフ決定過程（MDP）理論[13)]を用いて提示した計画モデルの解法[14)]を示すとともに、数値計算を行って、渇水の継続期間を考慮した損失関数を前提とした貯水池操作ルール並びに通常の損失関数を前提とした貯水池操作ルールを設計する。さらに設計された操作ルール毎に渇水の「頻度」、「継続期間」、「規模」を算定し、これらのルールのもたらす結果の類似点や相違点について考察を加えることとする。




図－ 1: 想定した流域モデル

## 2. モデルの定式化

### (1) 流域モデルの想定

本研究では、図－1に示すような単一の貯水池（貯水容量 $v$）と単一の評価地点（必要流量 $d$）からなる流域モデルを想定する。ここで、放流可能量 $X_n$ を $X_n \equiv I_n + S_n$ と定義しよう。放流可能量 $X_n$ は次期の期首（時点 n+1）に貯水池を空にするとしたときの今期（期間 [n-1,n]）に放流可能な最大の水量である。すなわち、放流量 $U_n$ は放流可能量 $X_n$ を下回る。また、貯水池の容量は $v$ であり、貯水池には容量 $v$ 以上の水量を貯留できないから、放流量 $U_n$ は $\max(0, X_n - v)$ 以上の値をとる。以上の条件から、放流量 $U_n$ は次の関係を満たす。

$$\max(0, X_n - v) \le U_n \le X_n \tag{1}$$

(2) 従来型の損失関数を用いた最適貯水池操作問題の定式化

本節では、放流量 $u$ のみを考慮して定式化された関数 $L(u)$ を前提にした場合の貯水池操作最適化問題を定式化する。

a) 有限期間問題

放流量 $U_n$ が当該期の放流可能量 $X_n$ の関数 $U_n = u(X_n)$ として与えられるとし、$X_n$ が離散値をとるとする。ここで、現在状態 $x$ にある時に今後 $t$ 期間の推移の結果期待される最小総期待損失を $V_t(x)$ とおく。すると、計画期末 $N$ までの総期待損失最小化問題は確率 DP により、次式のように定式化される。

$$V_t(x) = \min_{u_t(x)}[L(u) + \sum_y Q_x{}^{u_t}{}_y V_{t-1}(y)]$$
$$V_0(x) = 0 \tag{2}$$

ただし、

$t$: 計画期末 $N$ までの残り期間数 ($t = N - n$)

$x$: 時点 $t$ における放流可能量 ($X_{N-t} = x$)

$y$: 時点 $t-1$ における放流可能量 ($X_{N-t-1} = y$)

$u$: 時点 $t$ における放流量 ($U_N - t = u_t(x)$)

ここで、推移確率 $Q_x{}^u{}_y$ はある期において状態 $x$ にあるときに、政策 $u$ をとることによりその次期に状態 $y$ に推移する確率であり、次のように定義される。

$$Q_x{}^u{}_y \equiv \Pr\{X_t = y | X_{t-1} = x, U_{t-1}\} \tag{3}$$

図－1のように想定された流域モデルの場合、連続式として次式が成り立つ。

$$S_{t+1} = I_t + S_t - U_t \tag{4}$$

ここで、$X_t$ は $X_t \equiv I_t + S_t$ であるので、

$$I_{t+1} = X_{t+1} - X_t + U_t \tag{5}$$

が得られる。ここで、流入量 $I_t$ は離散値をとり、その生起確率が独立かつ同一の分布 $\theta(i)$ に従うと仮定すれば、$\Pr\{I_t = i\} = \theta(i)$ が成り立つ。したがって、推移確率 $Q_x{}^u{}_y$ は $\theta(i)$ を用いて以下のように算定される。

$$Q_x{}^u{}_y = \Pr\{I_t = y - x + u\}$$
$$= \theta(y - x + u) \tag{6}$$

式(2)で表される問題は、有限期間 $N$ 内の総期待損失を最小化するような最適放流政策 $\{\mathbf{u}_0, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ ($\mathbf{u}_t \equiv (u_t(0), \cdots, u_t(m))$, ただし、$m$ は状態 $x$ の上限値である。) を求める計画問題となっており、貯水池の供用期間が明確に定まっている場合には有効な手段である。しかしながら、最適放流政策を決定することとは、貯水池の供用期間終了時までの各期の貯水池の操作を決定することを意味する。貯水池の規模やその操作方式を決定するという計画の段階では、むしろ1期当たりの期待損失 (平均期待損失) を最小化するような定常的な操作を求めておくことが重要である。もちろん、多くの場合、このような最適操作 $u(x)$ は問題(2)の定常解として求まると考えられている。この考え方に従って、確率 DP を用いた大部分の研究でこの方法が用いられてきている。しかし、総期待損失は $t \to \infty$ のとき発散するから、この方法では1期当たりの期待損失自体を求めるためには、求まった操作に対応する定常生起確率を求め、1期当たりの損失の期待値をとる等の工夫が必要である。

b) 平均期待損失最小化問題

1期当たりの期待損失の最小化問題として貯水池操作の最適化問題を定式化しよう。マルコフ決定過程の理論によれば、定常政策の中に平均期待損失を最小化する政策が存在することがわかっている[14]。そこで、以下では解の探索範囲を定常政策に限って議論を進めることとする。

任意の定常政策に対して十分大きな $t$ が与えられると $V_t(x)$ は近似的に以下のように変形される[13]。

$$V_t(x) = t \cdot g + v(x) \tag{7}$$

$g$ は定常政策 $\{\mathbf{u}, \cdots, \mathbf{u}\}$ に対する平均期待損失であり、次式のように定義される。

$$g = \sum_x L(u(x))\pi(x) \tag{8}$$

ここで、$\pi(x)$ は極限状態確率と呼ばれ、次式のように定義され、式(10)及び(11)の性質を満たす。

$$\pi(x) = \lim_{n \to \infty} \Pr\{X_n = x\} \text{ for } U_n = u \tag{9}$$
$$\sum_x \pi(x) = 1 \tag{10}$$
$$\pi(x) = \sum_y Q_x{}^u{}_y \pi(y) \tag{11}$$

また、$v(x)$ は政策の相対値と呼ばれる量である。これは、極限 ($t \to \infty$) における総期待損失の相対的な差を求めるのに有効な量である。すなわち、現在、状態 $x$ にある場合と状態 $y$ にある場合の極限における損失の差は、$v(x) - v(y)$ により評価することができる。

平均期待損失最小化問題は次のように定義できる。

$$g^* = \min_{u(x)} \sum_x L(u(x))\pi(x) \tag{12}$$

上式の1期当たりの期待損失最小化問題はマルコフ決定過程を用いて以下のように変形される[14]。

$$v(x) + g = \min_{u(x)}[L(u) + \sum_y Q_x{}^u{}_y v(y)] \tag{13}$$

ここで、上式の解を $u^*(x)$ とすると、上式及び式(10)、式(11)より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\sum_x v(x)\pi(x)+g\\&=\sum_x L(u^*(x))\pi(x)+\sum_x\sum_y Q_x{}^{u^*(x)}{}_y v(y)\pi(x)\\&=\sum_x L(u^*(x))\pi(x)+\sum_y v(y)\pi(y)\end{aligned}\tag{14}$$

したがって、式(12)と式(13)が同値であることがわかる。

(3) 拡張型の損失関数を用いた貯水池最適操作問題の定式化

時点 $t(t=N-n)$ 期における状態を $(X_t, M_t)$ で定義する。ここで、$X_t$は放流可能量である。また、$M_t$は時点 $t$ までの渇水継続期間であり、次のように定義する。

$$M_t=\begin{cases}M_{t+1}+1 & U_{t+1}<d \text{ の時}\\ 0 & U_{t+1}\geq d \text{ の時}\end{cases}\tag{15}$$

ここで、拡張型損失関数を $L(u,m)$ と定義しよう。なお、$u$ は放流量、$m$ は渇水の継続期間 $M_t$の実現値を表している。この時、前節での議論と同様に平均期待損失最小化問題は以下のように定式化される。

$$\begin{aligned}&v(x,m)+g\\&=\min_{u(x,m)}\{L(u,m)+\sum_{(y,k)}P_{(x,m)}{}^{u(x,m)}{}_{(y,k)}v(y,k)\}\end{aligned}\tag{16}$$

ここで、$g$は平均期待損失であり、$v(x,m)$ は相対値である。また、$P_{(x,m)}{}^{u}{}_{(y,k)}$は状態 $(x,m)$ で政策 $u$ を用いた時に次期の状態が $(y,k)$ となる確率であり、以下のような関係を満たす。

$$\begin{aligned}&P_{(x,m)}{}^{u}{}_{(y,k)}\\&=\theta(y-x+u)\{\chi(k=0)\chi(u\geq d)\\&\qquad+\chi(k=m+1)\chi(u<d)\}\end{aligned}\tag{17}$$

なお、$\chi(\cdot)$ は以下のように定義される関数である。

$$\chi(\kappa)=\begin{cases}1 & \text{式}\kappa\text{が真の時}\\ 0 & \text{それ以外の時}\end{cases}\tag{18}$$

このように、渇水の継続期間を明示的に組み込んだ貯水池操作計画モデルが定式化された。

(4) 拡張型損失関数を用いた信頼性評価モデル

a) 信頼性評価指標の定義

ここでは、渇水に対する水利用システムの信頼性を評価するための指標をいくつか定義しておく。ここで、信頼性評価指標の定義に先立って、正常状態$S$及び渇水状態$F$を定義しておく。正常状態とは、評価地点での流量$u$が必要流量$d$を上回り、渇水が生起していない状態であり、渇水状態とは評価地点での流量$u$が必要流量$d$を下回り、渇水が生起している状態を示す。放流可能量を$x$、渇水継続期間を$m$とすると、正常状態$S$及び渇水状態$F$は以下のように定義される。

$$\begin{aligned}S&=\{(x,m)|u(x,m)\geq d\}\\F&=\{(x,m)|u(x,m)<d\}\end{aligned}\tag{19}$$

次に、$S(m)$ 及び $F(m)$ を以下のように定義しよう。

$$\begin{aligned}S(m)&=\{x|u(x,m)\geq d\}\\F(m)&=\{x|u(x,m)<d\}\end{aligned}\tag{20}$$

すなわち、$S(m)$ は当該時点までの渇水の継続期間が $m$ である時に放流量 $u(x,m)$ が必要流量 $d$ を上回る $x$ の集合を表し、$F(m)$ は放流量 $u(x,m)$ が必要流量 $d$ を下回る $x$ の集合を表している。

また、ここで操作$u(x,m)$のもとでの状態$(x,m)$の定常生起確率$\pi(x,m)$は次式のように定義される。

$$\pi(x,m)=\lim_{t\to\infty}\Pr\{(X_t,M_t)=(x,m)\}\quad \text{for } u(x,m)\tag{21}$$

$\pi(x,m)$ は定常生起確率であるから、状態の推移確率 $P_{(x,m)}{}^{u(x,m)}{}_{(y,k)}$との間に次の関係が成り立つ。

$$\pi(y,k)=\sum_{(x,m)}P_{(x,m)}{}^{u(x,m)}{}_{(y,k)}\pi(x,m)\tag{22}$$

渇水に対する水利用システムの信頼性を評価するためには、渇水の「頻度」、「期間」、「規模」といった項目からの多元的な評価を反映する必要がある。そこで、以下ではこれらの項目に対する指標を定義しておく。

i) 渇水生起確率　$PF$

定常状態で水利用システムが渇水状態 $F$にある確率であり、次式で定義される。

$$\begin{aligned}PF&=\lim_{t\to\infty}\Pr\{(X_t,M_t)\in F\}\\&=\sum_{(x,m)\in F}\pi(x,m)\end{aligned}\tag{23}$$

ii) 渇水の生起頻度　$FR$

渇水状態が生じてから、次に正常状態に戻るまでの期間をひと続きの「渇水」とみれば、渇水の生起頻度はこのひと続きの渇水が生起する確率として次式のように定義される。

$$\begin{aligned}FR&=\lim_{t\to\infty}\Pr\{(X_t,M_t)\in S,\ (X_{t-1},M_{t-1})\in F\}\\&=\sum_{(x,m)\in S}\sum_{(y,k)\in F}P_{(x,m)}{}^{u(x,m)}{}_{(y,k)}\pi(x,m)\\&=\sum_{y\in F(0)}\pi(y,0)\end{aligned}\tag{24}$$

iii) 渇水継続期間の期待値　$EM$

渇水状態が生起してから次に正常状態に戻るまでの期間数を渇水継続期間 $m$ とすれば、渇水継続期間

の期待値 $EM$ は次のように定義される。

$$EM = \lim_{t\to\infty} \sum_m m \Pr\{(X_t, m) \in S\}$$
$$= \sum_m \sum_{x\in S(m)} m\pi(x,m) \qquad (25)$$

iv) 条件付き期待渇水継続期間 $ED$

渇水状態が生起したという条件のもとで、次に正常状態に戻るまでの期間数の期待値であり、次式で定義される。

$$ED = \lim_{t\to\infty} \sum_m m \Pr\{(X_t, m) \in S| (X_{t+m-1}, M_{t+m-1}) \in F, (X_{t+m}, M_{t+m}) \in S\} \qquad (26)$$

ここで、継続期間 $M_t = m$ であり、$m > 0$ であるならば $(X_{t+m}, M_{t+m}) \in S$ かつ $(X_{t+m-1}, M_{t+m-1}) \in F$ であるから、

$$\Pr \ \{m > 0, (X_t, m) \in S, (X_{t+m}, M_{t+m}) \in F, (X_{t+m-1}, M_{t+m-1}) \in S\}$$
$$= \Pr\{(X_t, m) \in S, m > 0\} \qquad (27)$$

したがって、次の関係式が成り立つ。

$$ED = \frac{\sum_m \sum_{x\in S(m)} m\pi(x,m)}{\sum_{(x,m)\in S}\sum_{(y,k)\in F} {P_{(x,m)}}^{u(x,m)}{}_{(y,k)}\pi(x,m)} = EM/FR \qquad (28)$$

b) 渇水に対する信頼性評価指標と拡張型損失関数の関連性

ここでは前節で定義した渇水の生起確率 $(PF)$ 、頻度 $(FR)$ 、期待継続期間 $(EM)$ といった指標が、特定の拡張型損失関数 $L_i(u,m) \quad (i = 1,2,3,)$ に対応する平均期待損失として算定されることを証明する。

まず、以下のように拡張型損失関数 $L_i(u,m)\,(i = 1,2,3)$ を定義しよう。

$$L_1(u(x,m),m) = \begin{cases} 1 & u(x,m) < d \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \qquad (29)$$

$$L_2(u(x,m),m) = \begin{cases} 1 & u(x,m) < d, m = 0 \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \qquad (30)$$

$$L_3(u(x,m),m) = \begin{cases} m & u(x,m) \geq d, m > 0 \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \qquad (31)$$

ここで、これらの拡張型損失関数の期待値をとることによって、$L_i(u,m)$ に対応する平均期待損失 $g_i$ は以下のように求まる。

$$g_1 = E[L_1(u(x,m),m)] = \sum_{(x,m)} L_1(u(x,m),m)\pi(x,m) = \sum_{(x,m)\in F} \pi(x,m) = PF \qquad (32)$$

$$g_2 = E[L_2(u(x,m),m)] = \sum_{(x,m)} L_2(u(x,m),m)\pi(x,m) = \sum_{x\in F(0)} \pi(x,0) = FR \qquad (33)$$

$$g_3 = E[L_3(u(x,m),m)] = \sum_{(x,m)} L_3(u(x,m),m)\pi(x,m) = \sum_m \sum_{x\in S(m)} m\pi(x,m) = EM \qquad (34)$$

上述の結果から、拡張型損失関数を $L_i(u,m), i = 1,2,3$ のように特定化すると、信頼性評価指標 $(PF, FR, EM)$ はこれらの拡張型損失関数に対応する平均期待損失 $g_i = E[L_i(u(x,m),m)]\,(i = 1,2,3)$ として与えられることが示された。このことから、式(16)のように定式化された計画モデルの解 $u(x,m)$ を求めれば、次式(35)の解として求まった操作に対して、各々の信頼性評価指標の値を算定することができる。

$$v_i(x,m) + g_i = L_i(u(x,m),m) + \sum_{(y,k)} {P_{(x,k)}}^{u(x,m)}{}_{(y,k)} v_i(y,k) \quad (i = 1,2,3) \qquad (35)$$

## 3. モデル分析

### (1) 損失関数の特定化

本節では損失関数の特定化を行う。ここではまず関数の特定化に際して、拡張型損失関数に求められる要件を列挙し、その要件に添って損失関数の想定を行う。拡張型損失関数に求められる要件としては一般に以下のようなものが挙げられよう。

i) 継続期間が長いほど、不足水量 $(d-u)$ によって生じる被害は大きくなる。$(L(m+1,u) \geq L(m,u))$

ii) 限界的な渇水損失の増加量は、渇水継続期間に依存し、渇水継続期間が長いほど大きくなる。
$(\partial L(m+1,u)/\partial u \geq \partial L(m,u)/\partial u)$

iii) 渇水損失は放流量が減少するにつれ増加し、その変化率も増加する。
$(\partial L(m,u)/\partial u \leq 0,\ \partial^2 L(m,u)/\partial u^2 \geq 0)$

そこで、上記3条件を考慮して拡張型損失関数を次のように想定した。

$$L(m,u) = \begin{cases} am^\alpha(d-u)^\beta & u < d \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \qquad (36)$$

ここで、$a > 0, \alpha > 0, \beta > 1$ である。この時、条件

表－1　最適操作に対する信頼性評価指標の値

| Operation | $\alpha$ | $\beta$ | PF | FR | RP (YEAR) | EM (5DAYS) | EM (DAY) | ED (DAY) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) | 0.0 | 2.5 | $1.337\cdot10^{-2}$ | $8.502\cdot10^{-3}$ | 1.611 | $1.337\cdot10^{-2}$ | $6.668\cdot10^{-2}$ | 7.860 |
| (b) | 0.3 | 2.5 | $1.250\cdot10^{-2}$ | $8.888\cdot10^{-3}$ | 1.541 | $1.250\cdot10^{-2}$ | $6.248\cdot10^{-2}$ | 7.030 |
| (c) | 0.5 | 2.5 | $8.558\cdot10^{-3}$ | $5.821\cdot10^{-3}$ | 2.353 | $8.558\cdot10^{-3}$ | $4.279\cdot10^{-2}$ | 7.350 |
| (d) | 1.0 | 2.5 | $8.191\cdot10^{-3}$ | $5.831\cdot10^{-3}$ | 2.349 | $8.190\cdot10^{-3}$ | $4.095\cdot10^{-2}$ | 7.022 |
| (e) | 1.5 | 2.5 | $8.125\cdot10^{-3}$ | $5.833\cdot10^{-3}$ | 2.348 | $8.125\cdot10^{-3}$ | $4.063\cdot10^{-2}$ | 6.964 |
| (f) | 2.0 | 2.5 | $2.117\cdot10^{-2}$ | $2.047\cdot10^{-2}$ | $6.692\cdot10^{-1}$ | $2.177\cdot10^{-2}$ | $1.088\cdot10^{-1}$ | 5.316 |

i) ～ iii) は明らかに満たされている。従来型のモデルでは、損失関数は放流量 $u$ の関数 $l(u)$ である。ここで、$l(u) = a(d-u)^{\beta}$とおくと、

$$L(m,u) = (m+1)^{\alpha} l(u) \tag{37}$$

となる。したがって、拡張型損失関数は、渇水の継続期間に対応する割増率 $(m+1)^{\alpha}$ と従来型の損失関数 $l(u)$ の積で与えられることがわかる。

(2) 分析ケース

数値計算を行うに当たり、次のようにケースを想定した。すなわち、計算単位時間を5日とし、必要流量を $d = 5m^3/s$ 、貯水容量を $v = 10m^3/s$ とした。また、流入量の確率分布$\theta(i)$ は、平均$\mu = 12.5m^3/s$ 及び標準偏差$\sigma = 23.6m^3/s$ をもつ対数正規分布に従うとした。拡張型損失関数$L(m,u)$ のパラメータはそれぞれ$\alpha = 0, 0.3, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ 、$\beta = 2.5$, $a = 1$ のように設定した。ここで、$\alpha = 0$ とした場合には、拡張型損失関数は渇水継続期間 $m$ に関係なく放流量の関数として求められる。このため、$\alpha = 0$ の場合には、式 (16) の拡張型モデルは、式 (13) の従来型モデルと一致する。

計算の実施にあたっては以下の手順をとった。まず、式 (16) の計画モデルを逐次近似法[14]を用いて解き、最適放流操作 $u(x,m)$ を求める。次いで、式 (29) ～式 (31) のように拡張型損失関数を特定化し、それぞれの関数に対して式 (35) を解くことにより、渇水に対する信頼性評価指標の値を求めた。

(3) 分析の結果

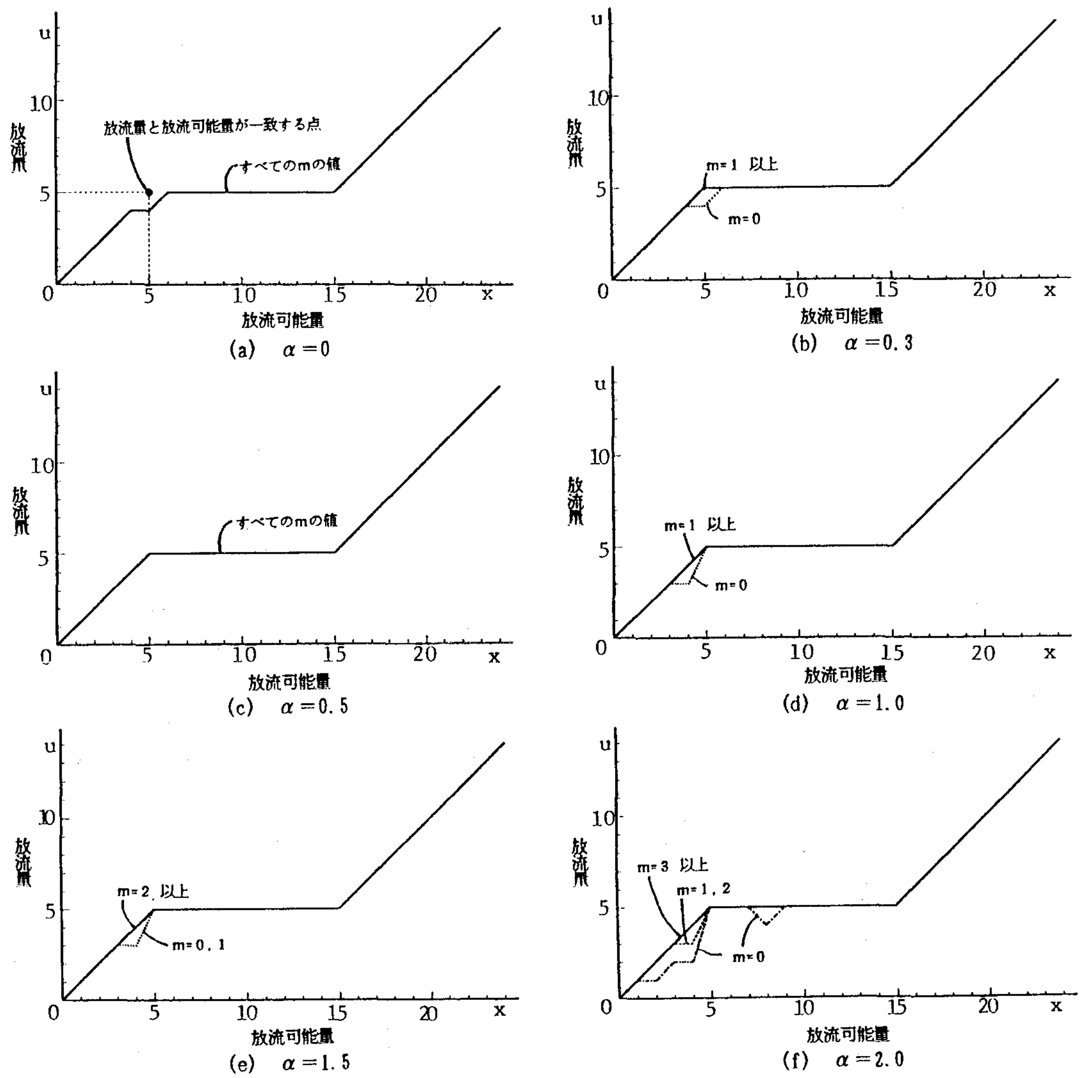
数値計算の結果求まった最適貯水池操作ルールを図－2(a) ～ (f) に、各々の操作に対する信頼性評価指標の値を表－1 に示す。表－1 の $RP$は渇水の再現期間であり、渇水が発生してから次の渇水が発生するまでの期間の期待値である。これは$FR$の逆数として算定される。

表－1 より、$\alpha$の値の増加とともに渇水が発生した場合に期待される渇水の継続期間$ED$は概ね単調に減少していることがわかる。$\alpha$が増加すると、渇水継続期間 $m$ の増加に対して被害の割増率 $(m+1)^{\alpha}$ の増加の割合が増加する。このため、$\alpha$が小さい内は渇水継続期間の影響は不足水量の被害に及ぼす影響に比べてあまり大きくなく、継続期間よりも不足水量を重視した操作をとることとなる。また、$\alpha$が大きくなればむしろ渇水継続期間 $m$ を重視した放流方式がとられるようになる。

拡張型モデルは従来型モデルをその特殊形として含んでいる。すなわち、$\alpha = 0$ の場合、拡張型モデルは従来型モデルに一致する。従来型モデルでは (図－2(a) $\alpha = 0$ の場合) 、損失関数が放流量のみの関数であるため、当該期における渇水の継続期間の長さに関わらず当該期の放流可能量 $x$ の関数 $u(x)$ として放流操作が定まる。このような場合には貯水池を空にする前に放流量の削減を行い、貯水量を温存する「節水型操作」が望ましいことが図－2(a) から読み取れる。これは、損失関数が不足水量 $(d-u)$ に対して逓増関数であるため、大規模な不足水量の発生を防ぐことが被害軽減上で必要となることによる。

一方、渇水の継続期間を考慮した拡張型損失関数を用いた場合 (図－2(b) ～ (f)) には、渇水の継続期間を減少させるように操作が行われる。通常、計画時に想定される貯水池の操作は「線形放流方式」と呼ばれる放流操作であり、図－2(c)($\alpha = 0.5$) がこれに相当する。この操作は、平常時に貯水量をフルに使いきるため、上述の節水型操作に比べ、渇水の生起頻度や継続期間が短くなるという特色を有している。その反面、節水型操作に比べて渇水時には不足水量が大きくなりやすいという傾向がある。

従来、渇水の継続期間等を考慮しない場合には、被害最小化を達成するために線形貯水池操作を用いることに対する肯定的な結論が導かれることは希であっ




図－2　最適操作ルールの算定結果

た。しかし、本研究で提案した拡張型モデルでは渇水の継続期間を明示的に損失関数に取り込んでいるために線形貯水池操作が有利な場合を示すことができる。すなわち、$\alpha$の増加につれて、より継続期間を短くするような貯水池操作が望ましいとする結果が導かれる。例えば、$\alpha = 0.3$ の場合には、渇水が発生していない内は節水型操作をとるが、渇水が発生している状況の下では、線形貯水池操作を行うことが望ましいという結論が導かれている。$\alpha$が増加して 0.5 となると、既述したように、節水型操作をもはや採用せず、渇水の継続期間に関わらず線形貯水池操作を採用している。したがって、渇水の生起頻度や継続期間は減少する。さらに、$\alpha$を増加させて$\alpha = 1.0, 1.5$ とする (図－2(d),(e)) と、$m \geq 1$ あるいは $m \geq 2$ の場合には線形貯水池操作を用いるが、継続期間が $m = 0,1$ と短い場合には、放流可能量が必要放流量を下回った場合に放流量を削減し、早期に貯水量を回復させるという操作がとられている。これは、渇水の頻度や継続期間を減少させるためには線形貯水池操作以上に有効な操作方式であり、より一層渇水の継続期間を減少させる方向に操作がシフトしてきていることを示している。

$\alpha$をさらに大きく設定してやると、図－2(f) のような操作が算定される。この操作では、放流可能量が必要放流量を下回った場合には渇水の継続期間が短い場合に限って、先述のような放流量の削減操作が行わ

れる。しかし、放流可能量が必要放流量を上回る場合にも節水が行われるという一見奇妙な操作となっている。このような操作は表－1に示すように渇水の生起頻度を増加させる。その一方で、短い渇水が頻発することとなるので条件付き期待渇水継続期間$ED$はむしろ減少する。$\alpha$が大きく設定された場合には渇水の継続期間削減の効果が優先されるから、一見不可解なこの結果もモデル上は妥当な結果である。しかしながら、実用上はこのような操作が望ましいと考えられる場合はほとんどないと考えられる。このことは、パラメータ$\alpha$の設定可能な範囲を考察する上で重要な意義を持つものと考えられる。

## 4. おわりに

本研究では、まず、貯水池最適操作ルールの設計問題を取り上げ、渇水の継続期間を明示的に組み込んだ拡張型損失関数を想定し、貯水池操作問題を平均期待損失最小化問題として確率DPによりモデルを構築した。このことにより、被害のみでなく、渇水の「頻度」「期間」を反映した貯水池操作を求めることが可能となった。次いで、渇水に対する水利用システムの信頼性評価指標（渇水生起確率$PF$、渇水生起頻度$FR$、渇水継続期間$EM$、条件付き期待渇水継続期間$ED$）を定義し、これらの指標と拡張型の損失関数との関連性を示した。そして、任意の貯水池操作ルールに対して、渇水に対する信頼性を評価する方法を示した。

本稿では、単一貯水池系の水利用システムを対象として最適運用計画モデルを構築したが、貯水池の統合操作等への応用のためには複数のダムや評価地点を有する水利用システムへの拡張が必要である。しかしながら、複数貯水池系へ本モデルを適用していくためには、通常の確率DPモデルの場合と同様に、数値計算上「次元の呪い」の問題が生じる。したがって、この問題を克服するための研究を進めていく必要がある。また、拡張型損失関数の関数形やパラメータの同定等については、経済学的観点から考察していくことが必要である。

## 参考文献


1) Yeh, W, W-G : Reservoir Management and Operations Models:A State-of-the-Art Review, Water Resour. Res., vol.21, no.12, pp. 1797-1818, 1985.
2) Yakowitz, S. : Dynamic Programming Applications in Water Resources, Water Resour. Res., vol.18, no.4, pp. 673-696, 1982.
3) Moran, P. A. P. : A Probability Theory of Dams and Storage System, Aust. Jour. Applied Science, Vol. 5, pp. 116-124, 1954.
4) Lloyd, E. H. : Reservoirs with Serially Correlated Inflows, Technometrics, Vol. 5, No. 1, pp. 85-93, 1963.
5) Prabufu, N. U. : Time-dependent Results in Storage Theory, Jour. Applied Probability, Vol. 1, pp. 1-46, 1964.
6) Hashimoto T., Stedinger, J. R. and Loucks D. P. : Reliability, Resiliency, Vulnerability Criteria for Water Resource Systems Performance Evaluation, Water Resour. Res., Vol. 18, No. 1, pp. 14-20, 1982.
7) 小尻利治、池淵周一、飯島健：安全度評価をベースにした最適な水利用システムの構成、第29回水理講演会論文集、pp. 323-328 、1985.
8) 鈴木正人、長尾正志： 2段階推移モデルによる相関離散流量を受ける貯水池理論、土木学会論文集、第411号／II-12 、pp. 161-168 、1989.
9) 多々納裕一、岡田憲夫、河合一：残流域流出量を考慮した水利用システムの信頼性評価モデルに関する研究、土木計画学研究論文集、Vol. 7 、pp. 209-217 、1990.
10) Askew, A. J. : Chance-constrained Dynamic Programming and the Optimization of Water Resources System, Water Resour. Res., 10(6), pp. 1099-1106, 1974.
11) Sniedovich, M. : Reliability-constrained Reservoir Control Problems, 1, Methodological Issues, Water Resour. Res., 15(6), pp. 1574-1582, 1979.
12) Rossman, L. : Reliability-constrained Dynamic Programming and Randomized Release Rules in Reservoir Management, Water Resour. Res., 13(2), pp. 247-255, 1977.
13) R. A. Howard : ダイナミックプログラミングとマルコフ過程, 培風館, 1971.
14) 北川敏夫：マルコフ過程, 共立出版, 1967.