【土木計画学研究・論文集 №7 1989年12月】

空間相互作用をとりいれた地域モデルの推定法*

Spatial Interdependence Modeling and Estimation Technique

奥村 誠** 足立 康史*** 吉川 和広****

By Makoto OKUMURA, Yasushi ADACHI, Kazuhiro YOSHIKAWA

Spatial data are characterized by spatial interdependence and heterogeneity which give a variety of measurement problems. Heterogeneity can be covered by some econometrical techniques for model with non-spherical error term. Though spatial interdependence is considered as a "statistical noise" in the field of econometrics to date, how to model spatial interaction is the main subject in regional modeling. However, most of empirical works fails to take into account the interdependence effects in estimation or tests.

In this paper, we consider a family of simultaneous spatial models which explicitly contain spatial interdependence. The most popular OLS estimator is neither unbiased nor consistent. We propose a new consistent and efficient estimator, that is named Two Stage Generalized Least Squares(2SGLS) Estimator. OLS bias, efficiency of 2SGLS and 2SLS estimator are numerically assessed. We conclude by discussing the applicability of 2SLS and 2SGLS estimator.

1．はじめに

これまで、地域や都市の空間的な発展・変化を記述・分析し、予測を行なうために数多くの地域モデルが開発され、実用に供されてきた。これらのモデルを実際に用いる場合には、観測データに基づいてパラメータの値を推定し、モデルの構造が現実にうまく合致しているかを検定しなければならない。この際の統計的手法は、扱うデータの性質やモデルの構造を十分に考慮したものでなくてはならない。[1)]

現在地域モデルを作成する際に多く用いられている推定法は通常最小二乗（ＯＬＳ）法である。またモデルの適合度を検定する手法として、ｔ検定、Ｆ検定などが使用されている。ＯＬＳ推定値が不偏性、効率性の点からみて望ましい推定値であり、ｔ検定等の検定が信頼性を持つためには、撹乱項が説明変数と独立で分散が一定である正規分布に従うという仮定が要請される。

しかしながら地域データは空間的な次元を含んでおり、このような統計上の仮定を満足しないことがほとんどである。その結果モデル推定上の問題が生ずる。[2)] 例えば佐々木は、土木計画学で用いられる地域モデルの推定上の問題点として、不等分散性の問題（heteroscedastisity）、空間的自己相関の問題（autocorrelation）、プーリング推定の必要性の３点を指摘している。[3)] このうち不等分散性の問題は、計量経済学においても取り扱われており、その知見を用いて対処できる問題である。また第３の問題の解決には地域モデルの動学化に関する議論が必要となるので、静学的なモデルの推定論に引き続いて検討されるべきものと考えられる。

**正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学科
***学生会員 京都大学大学院 工学研究科修士課程
****正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科
（〒606 京都市左京区吉田本町 075-753-5073）
* Key Words モデル推定,空間相互作用,地域モデル

しかしながら第２の空間的自己相関の問題は、これまで計量経済学においてあまり扱われていないものの、静学的な地域モデルにも存在する問題である。地域の現象は各ゾーンに固有の要因からの影響の外に、空間相互作用を受けているため、変数間の関係が１つのゾーンの中で閉じなくなる。このことを考慮せずにモデルを作成すると残差に空間的自己相関が生じる。逆に、残差に空間的自己相関が見られる場合には、モデル構造が空間相互作用を十分に表現できていないことが多い。このように空間的自己相関の問題は空間相互作用の表現方法と密接に関連しており、地域モデルに特有の問題であると言える。

本研究では、地域モデルにおける空間相互作用の考え方を整理し、地域モデルの分類を行なうとともに各モデルの推定方法を考察する。さらに、これまでに多くの実用モデルが開発されている連立型の線形地域モデルについて、ＯＬＳ推定法の問題点を明らかにし、それを解決するための推定法を提案する。

２．地域モデルにおける空間相互作用の考え方

地理学における地と図の概念に代表されるように、一般に地域の現象は、自ゾーンに固有の要因（内在的諸特性）と、他ゾーンからの影響要因（空間相互作用）から説明できると考えられる。[4]

ここでは、地域モデルにおけるこれら２つの要因の考慮の方法によってモデルを分類する。議論を簡単にするため、線形のモデルを取り上げる。なお以下では、Ｘは外生変数行列$(n\times k)$，ｙは内生変数ベクトル$(n\times 1)$，βはパラメータベクトル$(k\times 1)$，εは攪乱項ベクトル$(n\times 1)$を表わす。また添字のｉは着目しているゾーン，ｊはそのゾーンに影響を持つ他のゾーンを表わすものとする。

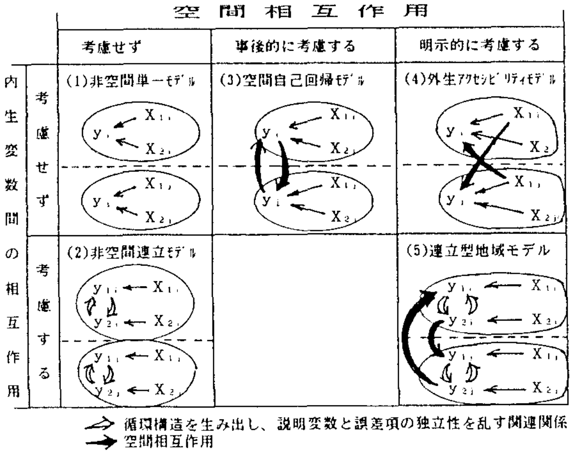
(1) 空間相互作用を考慮しない非空間単一モデル

空間相互作用に比べて内在的諸特性の影響が特に強い場合には、各ゾーンごとに変数間の関連関係が閉じているので、空間相互作用を考慮しない非空間型のモデルにより表現することができる。

最も簡単なモデルは以下の形式となる。

$$y_i = X_i\beta + \varepsilon_i \qquad (i=1,,,n) \qquad (1)$$

このモデルの推定法については、計量経済学の分野で研究が進んでいる。誤差項εの分布によって用いるべき推定法が異なってくる。もし誤差項が相互



図－１ 地域モデルの分類

に独立で分散が一定の分布に従い、外生変数Ｘとも独立であるならば、通常最小二乗法（ＯＬＳ）によって不偏性を持ち効率的なパラメータ推定量を得ることができる。つまり共分散行列が、

$$E(\varepsilon\varepsilon^T) = \sigma^2 I \qquad (2)$$

であれば、ＯＬＳ推定量

$$\hat{\beta} = (X^TX)^{-1}(X^Ty) \qquad (3)$$

を用いることができる。

しかしながら実際には、誤差項はこのような仮定を満足しない。第１に各ゾーンの面積や人口が異なる場合、規模の大きいゾーンの変数の分散は規模の小さいゾーンの分散に比べて大きくなるのが普通である。このような不等分散性が存在するとＯＬＳ推定量は不偏ではあるが効率性が低下するという問題がある。第２に既に述べたような空間的自己相関の問題が生じる。残差における空間的自己相関は1960年にThomasによって初めて指摘されたが、Cliff と Ord は、空間的自己相関係数や MoranのＩ統計量の性質を研究し自己相関の計測法を確立した。[5] これに引き続く Hainingらの研究の成果として、残差の自己相関パターンから誤差項の共分散行列を推定する方法が開発された。[6)7)]

さて、一旦共分散行列の形が明らかになれば、一般化最小二乗法（ＧＬＳ）を用いて不偏かつ効率的な推定量を得ることができる。すなわち、

$$E(\varepsilon\varepsilon^T) = \sigma^2\Omega, \quad \Omega \neq I \qquad (4)$$

に対して、ＧＬＳ推定量

$$\tilde{\beta}=(X^{T}\Omega^{-1}X)^{-1}(X^{T}\Omega^{-1}y) \quad (5)$$

を用いることができる。

(2) 非空間連立型モデル

空間相互作用を考慮しないが、いくつかの活動を同時に取り上げる場合には、以下のような連立型のモデルとなる。

$$y_{1i}=y_{2i}\gamma_1+X_{1i}\beta_1+\varepsilon_{1i}$$
$$y_{2i}=y_{1i}\gamma_2+X_{2i}\beta_2+\varepsilon_{2i} \quad (i=1,,,n) \quad (6)$$

第1式を第2式の右辺に代入すれば、y_2がε_1の項を含んでいることが簡単にわかる。よって第1式における説明変数y_2と誤差項ε_1はもはや独立ではなくなり、ＯＬＳ推定量、ＧＬＳ推定量はともに不偏性を持たないという問題が生じる。このような場合には２段階推定法(２ＳＬＳ)が用いられる。第１段階としてy_1, y_2 をＸについてＯＬＳ回帰する。その結果の推定量は誤差項と相関を持たないので、これをy_1, y_2 の代わりに用いて第２段階の推定を行うことによりバイアスを除去することができる。

(3) １次空間自己回帰モデル

空間相互作用は本来、他地域に存在する変数との機能的な関係から生じるものであるが、その関係を明示的にモデル化せずに、Whittle によって提案された自己相関項を用いることによって事後的に処理する方法が考えられた。つまり、以下のような１次空間自己回帰モデルが得られる。

$$y_i=\rho\sum_j f_{ij}y_j+X_i\beta+\varepsilon_i \quad (i=1,,,n) \quad (7)$$

ρは空間自己相関係数でありゾーンを越える空間相互作用の強さを表わす。f_{ij} はゾーン間の結合パターンを表わす行列で、通常地理的な隣接関係等に基づいて外生的に与えられる。

このモデルについては、他のゾーンの内生変数が右辺に含まれているため、ＯＬＳでは効率的な推定量が得られず、特別な工夫が必要である。Ord は右辺のｙを外生変数として扱う代わりに、誤差項の分布を修正することを考えた。これによりＧＬＳ推定が可能となり効率的な推定値を得ることができる。[8] ただし、ＧＬＳで用いるｙの共分散行列Ωの中に未知パラメータρが含まれているので、Ωを用いてβとρをＧＬＳ推定することと、ρの推定値を用いてΩを更新することを、交互に繰り返すという手法を提案している。

(4) 外生変数による空間相互作用を表現したモデル（外生アクセシビリティモデル）

空間相互作用を明示的に表現するため、ゾーンをまたがる変数間の関係を定式化する。その際の説明変数が外生変数のみであれば、以下のような形式のモデルが得られる。

$$y_i=X_i\beta_1+\sum_j f_{ij}X_j\beta_2+\varepsilon_i \quad (i=1,,,n) \quad (8)$$

このモデルでは第２項の変数が外生変数であるので、$\sum_j f_{ij}X_j$を新たな外生変数に置き換えて考えれば、第１の非空間モデルに還元できる。従って、ＯＬＳ等の推定法を用いることができる。Empirical Type の土地利用モデルの多くはアクセシビリティ指標を含んでいる。その指標に含まれるパラメータは交通流動データを用いて予め推定しておき、土地利用モデルの推定の際には外生変数として扱われることが多かった。そこでこのモデルを外生アクセシビリティモデルと呼ぶこととする。

(5) 空間相互作用を内生変数を用いて表現したモデル（連立型地域モデル）

例えば、小売販売額と人口がともに内生変数であるモデルでは、各ゾーンの小売販売額は自ゾーンばかりでなく隣接するゾーンの人口にも影響を受ける。つまり、他のゾーンの別の内生変数が相互作用の原因となっており、その関係は以下のような連立モデルの形で表現できる。

$$y_{1i}=\rho_1\sum f_{ij}y_{2j}+X_{1i}\beta_1+\varepsilon_{1i} \quad (i=1,,,n)$$
$$y_{2i}=\rho_2\sum g_{ij}y_{1j}+X_{2i}\beta_2+\varepsilon_{2i} \quad (9)$$

f_{ij}, g_{ij} は変数間の関連関係が空間的にどのような広がりを持つかを表わす行列であり、通勤流動や買物流動などの分布パターンが用いられる。

ローリーモデルを基礎とするモデルをはじめ、多くの土地利用モデルはこの形式に帰着できる。このモデルの推定法については未だ研究が進んでいないため、これまではあたかもy_1, y_2 が外生変数であるかのように扱って、ＯＬＳ推定されていることが多かった。しかし３．で示すように、このモデルでは他のゾーンの内生変数が右辺に含まれているため、ＯＬＳ推定量，ＧＬＳ推定量はともに不偏性、効率性を持たないという問題がある。

本研究ではこの連立型地域モデルの推定方法を開発することとする。

３．連立型地域モデルのＯＬＳ推定の問題点

式(9)を行列表示すると、

$$y_1=\rho_1 F y_2+X_1\beta_1+\varepsilon_1$$

$$y_2=\rho_2 G y_1+X_2\beta_2+\varepsilon_2 \qquad (10)$$

さらに２式をまとめると、次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \rho_1 F \\ \rho_2 G & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

これより、 (11)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & -\rho_1 F \\ -\rho_2 G & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} I & -\rho_1 F \\ -\rho_2 G & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

なお、逆行列の分割公式を用いると、

$$\begin{pmatrix} I & -\rho_1 F \\ -\rho_2 G & I \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} I+\rho_1\rho_2 F(I-\rho_1\rho_2 GF)^{-1}G & \rho_1 F(I-\rho_1\rho_2 GF)^{-1} \\ \rho_2(I-\rho_1\rho_2 GF)^{-1}G & (I-\rho_1\rho_2 GF)^{-1} \end{pmatrix} \qquad (13)$$

となる。式(10)はまた、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Fy_2 & X_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Gy_1 & X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \beta_1 \\ \rho_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

$$Y = Z B + \varepsilon \qquad (15)$$

と書ける。ただし、

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

$$Z=\begin{pmatrix} Fy_2 & X_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Gy_1 & X_2 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

$$B=(\rho_1,\beta_1,\rho_2,\beta_2)^T \qquad (18)$$

$$\varepsilon=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \qquad (19)$$

である。

いま、未知パラメータＢをＯＬＳ推定すると、その推定量$\hat{B}$は次のようになる。

$$\begin{aligned}\hat{B} &=(Z^TZ)^{-1}(Z^TY)\\ &=(Z^TZ)^{-1}(Z^TZB+Z^T\varepsilon)\\ &=(Z^TZ)^{-1}(Z^TZ)B+(Z^TZ)^{-1}(Z^T\varepsilon)\\ &=B+(Z^TZ)^{-1}(Z^T\varepsilon) \qquad (20)\end{aligned}$$

ここで第２項の期待値がバイアスの有無を決める。Ｚの中に内生変数Fy_2, Gy_1が含まれており、これらはεと独立でないので、この項の期待値は０とはならない。よってＯＬＳ推定量は不偏性を持たない。

次にこの項の漸近分布を考察する。Slutsky の定理より、

$$\begin{aligned}&\mathrm{plim}(Z^TZ)^{-1}(Z^T\varepsilon)\\ &=\mathrm{plim}(Z^TZ)^{-1}\mathrm{plim}(Z^T\varepsilon) \qquad (21)\end{aligned}$$

$Z^T\varepsilon$の確率極限は、

$$\mathrm{plim}(Z^T\varepsilon)=\mathrm{plim}\begin{pmatrix} Fy_2 & X_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Gy_1 & X_2 \end{pmatrix}^T\varepsilon=\begin{pmatrix} \mathrm{plim}((Fy_2)^T\varepsilon_1) \\ 0 \\ \mathrm{plim}((Gy_1)^T\varepsilon_2) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (22)$$

ここでは、外生変数と誤差項との独立性の仮定より、$X_1\varepsilon_1$, $X_1\varepsilon_2$, $X_2\varepsilon_1$, $X_2\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\varepsilon_2$の確率極限は０に等しいことを用いている。

右辺の２つの確率極限はスカラーなので転置できて、

$$\mathrm{plim}((Fy_2)^T\varepsilon_1)=\mathrm{plim}(\varepsilon_1{}^TFy_2)$$

式(12),(13)より、

$$\begin{aligned}&=\mathrm{plim}(\varepsilon_1{}^T\rho_2F(I-\rho_1\rho_2GF)^{-1}G\varepsilon_1)\\ &=\rho_2\sigma_1{}^2\mathrm{tr}(FG(I-\rho_1\rho_2GF)^{-1}) \qquad (23)\end{aligned}$$

一般にこの行列のトレースは０ではないから、ρ_2が０でなければこの項は有限の値を持つことになる。

同様にして、

$$\begin{aligned}&\mathrm{plim}(\varepsilon_2{}^TGy_1)\\ &=\rho_1\xi\sigma_1{}^2\mathrm{tr}(GF(I-\rho_1\rho_2FG)^{-1})\end{aligned}$$

ただし、$\xi=\sigma_2{}^2/\sigma_1{}^2$である。 (24)

ρ_1が０でない限り、この確率極限は有限値を持つ。

以上より

$$\mathrm{plim}\hat{B}-B=\sigma_1{}^2\mathrm{plim}(Z^TZ)^{-1}H \qquad (25)$$

ただし、

$$H=\begin{pmatrix} \rho_2\ \mathrm{tr}(F(I-\rho_1\rho_2GF)^{-1}G) \\ 0 \\ \rho_1\xi\,\mathrm{tr}(GF(I-\rho_1\rho_2GF)^{-1}) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (26)$$

以上のことから、空間相互作用がない（$\rho_1=\rho_2=0$）という場合を除けば、バイアスの漸近分布が０に等しくならず、ＯＬＳ推定量は一致性を持たないことがわかる。

式(25)を用いれば、ＯＬＳバイアスが漸近的にはどの程度の大きさになるかを評価することが可能である。

4．連立型地域モデルの推定方法

(1) 2段階一般化最小二乗法（2SGLS：Two Stage General Least Squares Method）

3．で述べたようなOLS推定の問題点は、右辺に含まれる内生変数と誤差項とが独立でないことに起因している。そこで、非空間連立モデルで用いられているような2段階の推定方法を用いることにより、バイアスを除去することとする。

第1段階として、内生変数のy_1, y_2を、誤差項と独立な適当な外生変数Xに対してOLS回帰する。

すなわち、

$$\bar{y}_1 = X\bar{\gamma}_1 \tag{27}$$

$$\bar{\gamma}_1 = (X^T X)^{-1}(X^T y_1) \tag{28}$$

$$\bar{y}_2 = X\bar{\gamma}_2 \tag{29}$$

$$\bar{\gamma}_2 = (X^T X)^{-1}(X^T y_2) \tag{30}$$

よって

$$\begin{aligned} E(F\bar{y}_2^T \varepsilon_1) &= F \cdot E(\bar{\gamma}_2^T X^T \varepsilon_1) \\ &= F \cdot E(\bar{\gamma}_2)^T \cdot E(X^T \varepsilon_1) \\ &= F \cdot E(\bar{\gamma}_2)^T \cdot 0 = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

同様に

$$E(G\bar{y}_1^T \varepsilon_2) = 0 \tag{32}$$

よって式(25)より、第2段階のバイアスが0となることが期待できる。ここで、第1段階の推定値を用いた説明変数の行列$\bar{Z}$を定義しておく。

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} FX\bar{\gamma}_2 & X_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GX\bar{\gamma}_1 & X_2 \end{pmatrix} \tag{33}$$

ところがこの操作により、第2段階の誤差項の分布が変化する。第2段階の誤差項をμで表すと、

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix} \tag{34}$$

式(15)に代入すると、

$$\begin{aligned} Y &= \begin{pmatrix} 0 & \rho_1 F \\ \rho_2 G & 0 \end{pmatrix} (\tilde{Y} + \mu) + \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \varepsilon \\ &= \tilde{Y} + \mu \end{aligned} \tag{35}$$

誤差項のみを取り出すと、

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & \rho_1 F \\ \rho_2 G & 0 \end{pmatrix} \mu + \varepsilon \tag{36}$$

よって、

$$\mu = \begin{pmatrix} I & -\rho_1 F \\ -\rho_2 G & I \end{pmatrix}^{-1} \varepsilon \tag{37}$$

これより、

$$\begin{aligned} &\mathrm{plim}(\mu\mu^T) \\ &= \begin{pmatrix} I & -\rho_1 F \\ -\rho_2 G & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 I & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\rho_1 F \\ -\rho_2 G & I \end{pmatrix}^{-1\,T} \\ &= \sigma_1^2 \ \Omega \end{aligned} \tag{38}$$

となる。ただし、

$$\Omega = \begin{pmatrix} I & -\rho_1 F \\ -\rho_2 G & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \xi I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\rho_1 F \\ -\rho_2 G & I \end{pmatrix}^{-1\,T} \tag{39}$$

である。

よって、第2段階において効率性の高い推定量を得るためには、GLS推定が必要である。つまり、

$$\tilde{B} = (\bar{Z}^T \Omega^{-1} \bar{Z})^{-1} (\bar{Z}^T \Omega^{-1} \bar{Y}) \tag{40}$$

ここで、共分散行列Ωに未知パラメータρ_1, ρ_2, ξが含まれているため、次のような繰り返し手順が必要となる。

①先験的情報を用いてパラメータρ_1, ρ_2, ξの初期値を与える（あるいは$\rho_1, \rho_2=0, \xi=1$と置く）。

②式(39)を用いて共分散行列Ωを計算する。

③共分散行列 Ω を用いて式(40)から$\beta_1, \beta_2, \rho_1, \rho_2$のGLS推定値を求める。

④y_1, y_2の残差を計算し、分散の比をξとする。

⑤全ての推定値が収束しているか調べる。収束していない場合は②に戻り、②～⑤の手順を繰り返す。

以上の方法を2段階一般化最小二乗法（2SGLS推定法）と呼ぶこととする。

(2) 2SGLS推定量の性質

まず推定量のバイアスについて検討する。

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= (\bar{Z}^T \Omega^{-1} \bar{Z})^{-1} (\bar{Z}^T \Omega^{-1} \bar{Z} B + \bar{Z}^T \Omega^{-1} \mu) \\ &= B + (\bar{Z}^T \Omega^{-1} \bar{Z})^{-1} (\bar{Z}^T \Omega^{-1} \mu) \end{aligned} \tag{41}$$

第2項で確率変動するのはΩ^{-1}とμであり、統計的に独立ではないため、0に等しいとは限らない。よってこの推定量は不偏性を持たない。漸近分布の展開は省略するが、岩田がSURモデルに関して行っているのと同様にして[9]、式(41)の第2項は0に確率収束することが示される。よって2SGLS推定量は一致性を持つ。

一方推定量の分散の期待値は、

$$\begin{aligned} E(V_{\tilde{B}}) &= E((\tilde{B} - B)(\tilde{B} - B)^T) \\ &= E((\bar{Z}^T \Omega^{-1} \bar{Z})^{-1} \bar{Z}^T \Omega^{-1} \mu \\ &\qquad \mu^T \Omega^{-1} \bar{Z} (\bar{Z}^T \Omega^{-1} \bar{Z})^{-1}) \\ &= \sigma_1^2 ((\bar{Z}^T \Omega^{-1} \bar{Z})^{-1} \bar{Z}^T \Omega^{-1} \Omega \\ &\qquad \Omega^{-1} \bar{Z} (\bar{Z}^T \Omega^{-1} \bar{Z})^{-1}) \\ &= \sigma_1^2 (\bar{Z}^T \Omega^{-1} \bar{Z})^{-1} \end{aligned} \tag{42}$$

となる。また$\sigma_1{}^2$の一致推定量も、非空間型のGLSと同様に、

$$\sigma_1{}^2=\frac{y^T\Omega^{-1}(I-Z^T(Z^T\Omega^{-1}Z)^{-1}Z^T\Omega^{-1})y}{(2n-k_1-k_2-3)}$$

によって求めることができる。 (43)

(3) 2段階通常最小二乗(2SLS)推定量の性質

以上では第2段階にGLSを用い、一致性と効率性を同時に満足する推定量を得た。もし非空間連立型モデルに対する2SLS推定法と同じように第2段階にOLS推定を用いることができれば、上述したような繰り返し手順は不必要となる。そこで第2段階の推定にOLSを用いた場合（2SLS）の推定量の性質を検討することとする。

2SLS推定量は、

$$\begin{aligned}\hat{B}&=(\bar{Z}^T\bar{Z})^{-1}(\bar{Z}^T\bar{Y})\\&=(\bar{Z}^T\bar{Z})^{-1}(\bar{Z}^T\bar{Z}B+\bar{Z}^T\mu)\\&=B+(\bar{Z}^T\bar{Z})^{-1}(\bar{Z}^T\mu)\end{aligned} \tag{44}$$

式(31),(32)より $E(\bar{Z}^T\varepsilon)=0$ であり、これより$E(\bar{Z}^T\mu)=0$ となるので、この第2項の期待値は0となる。ゆえに2SLS推定量は不偏性を有する。

一方、2SLS推定量の分散については、

$$\begin{aligned}E(V_{\hat{B}})&=E((\hat{B}-B)(\hat{B}-B)^T)\\&=E((\bar{Z}^T\bar{Z})^{-1}\bar{Z}^T\mu\mu^T\bar{Z}(\bar{Z}^T\bar{Z})^{-1})\\&=\sigma_1{}^2((\bar{Z}^T\bar{Z})^{-1}\bar{Z}^T\Omega\bar{Z}(\bar{Z}^T\bar{Z})^{-1})\end{aligned} \tag{45}$$

が成立する。よって式(42)によって与えられる2SGLSの分散と、式(45)の値とを比較することにより、両者の効率性を比較できる。

5．計算例

ここで提案した2SGLS推定法及び2SLS推定法を、実際の連立型地域モデルに適用し、その性質を確認することとする。

(1) 対象とした連立型地域モデル

ゾーン別の夜間人口(y_1)と従業人口(y_2)を内生変数とするモデルを考える。

夜間人口は地域内で従業する就業者と、地域外に通勤している就業者(X_1) のいずれかに扶養されていると考えられる。通勤ODをC_{ij}で表わすと、地域内で従業しiゾーンに居住する就業者の数は、

$$\sum_j\frac{C_{ij}}{\sum_k C_{kj}}y_{2j}=\sum_j f_{ij}y_{2j}=(Fy_2)_i \tag{46}$$

となる。一方、従業人口は対住民サービスと対事業所サービスよりなり、後者を説明する外生変数として第2次産業従業人口(X_2)を取り上げる。 対住民サービスの立地量は各ゾーンの商圏人口によって定まる。買物ODをS_{ij}で表わすと、この商圏人口は、

$$\sum_j\frac{S_{ij}}{\sum_k S_{kj}}y_{1j}=\sum_j g_{ij}y_{1j}=(Gy_1)_i \tag{47}$$

となる。ここで行列F,GはODパターンを表わす。

$$f_{ij}=\frac{C_{ij}}{\sum_k C_{kj}}\qquad g_{ij}=\frac{S_{ij}}{\sum_k S_{kj}} \tag{48}$$

このようにしてモデルは式(9)の形に定式化できる。

ρ_1とβ_1はそれぞれ地域内従業者、地域外従業者の扶養率であり、 ρ_2は住民1人当たりの対住民サービス従業者数、 β_2は第2次産業を基準とした対事業所サービスの乗数を表わしている。

(2) パラメータ推定結果

対象地域として滋賀県(ゾーン数50)を取り上げ、昭和60年の国勢調査データおよび昭和58年の自動車ODデータを用いてパラメータの推定を行なった。結果は表－1の通りである。各パラメータとも、いずれの推定法でも妥当な範囲の値が得られている。OLS推定値は2段階法に比べて$\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_2$が小さく、$\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$が大きいが、差は大きいものではない。

パラメータ推定値と外生変数から内生変数の再現値を計算した。再現精度についてもほとんど差は見られないが、RMS誤差ではOLS, 2SLS法、RMSパーセント誤差では2SLS, 2SGLS法、実績値との相関係数ではGLS法が優れている。

式(25)を用いたOLSバイアスの計算値はパラメータの絶対値の10%～85%に及び、無視できる大きさではない。さきに述べた大小関係と対照させると、2SLS, 2SGLS法によりOLSバイアスが軽減されていると考えられる。

2SLSと2SGLSの効率性を比較するため、式(42)と式(45)の値を計算した。共分散行列のうち効率性を規定する対角項を比べると、式(42)の値が式(45)の値を下回っており、その比は0.4～0.7程度である。これに関連して推定の効率性が改善されるので、β_1に関するt値は 2SLS推定量では有意でないが、2SGLS推定量については有意であるという結果が得られた。なお、非対角項の計算結果

表－1 パラメータ推定値

推定方法	y_1(夜間人口) ρ_1	β_1	RMS誤差 RMS%誤差	相関係数	y_2(従業人口) ρ_2	β_2	RMS誤差 RMS%誤差	相関係数
ＯＬＳ	2.0149 (4.73)	2.0338 (1.56)	860.3 5.61%	0.9891	0.1570 (5.53)	1.7303 (9.54)	388.5 3.19%	0.9883
ＧＬＳ	1.9985 (5.60)	1.5482 (2.44)	1234.3 5.81%	0.9903	0.1306 (7.24)	1.7439 (14.2)	494.8 3.19%	0.9905
２ＳＬＳ	1.9419 (4.89)	2.4278 (1.29)	910.8 5.53%	0.9868	0.1506 (6.08)	1.7786 (11.4)	403.6 3.13%	0.9871
２ＳＧＬＳ	1.8620 (5.24)	2.5668 (2.08)	1269.2 5.67%	0.9764	0.1318 (5.09)	1.8504 (11.5)	465.5 3.16%	0.9862
OLSバイアスの推定値	0.187	-0.708			0.253	-1.467		
推定量分散比(2SGLS/2SLS)	0.5666	0.4062			0.6356	0.6756		

注：カッコ内の数値はｔ値を表わす。
パラメータ推定値と外生変数を用いて式(12)の第１項を計算し、再現値とした。
RMS誤差, RMS%誤差, 相関係数は、この再現値と実績値より求めた。

は両者で余り大きな差はなかった。

(3) パラメータの違いによる特性の変化

以上の分析で、漸近理論に基づく２ＳＧＬＳ法の優位性が、実際的な状況においても意味を持つことを確認した。しかし、実証データはあるパラメータの組合せに対する１つのサンプルデータに過ぎず、より一般的な結論を導くことはできない。

以下では、このような結論が、他のパラメータの組合せに対しても成立するか否かを検討することとする。

先の計算例と同じ外生変数について、パラメータの真値を外生的に数種設定し、内生変数の仮想的な値を計算する。これらのデータをもとに推定を行なう場合のＯＬＳバイアスを計算した結果を表－２に、２ＳＧＬＳ推定量の分散の２ＳＬＳ推定量の分散に対する比を計算した結果を表－３に示す。

表－2 ＯＬＳバイアスの漸近推定値

所与パラメータ値 ρ_1	β_1	ρ_2	β_2	ＯＬＳバイアスの漸近推定値 $\hat{\rho}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\rho}_2$	$\hat{\beta}_2$
2.0	1.50	0.2	1.50	0.309	-1.101	0.291	-1.514
0.0	1.50	0.2	1.50	0.653	-1.500	0.000	-0.000
1.0	1.50	0.2	1.50	0.473	-1.327	0.305	-0.757
3.0	1.50	0.2	1.50	0.164	-0.792	0.173	-1.675
4.0	1.50	0.2	1.50	0.059	-0.430	0.062	-1.152
2.0	0.75	0.2	1.50	0.306	-1.040	0.339	-1.599
2.0	2.25	0.2	1.50	0.311	-1.160	0.245	-1.391
2.0	3.00	0.2	1.50	0.313	-1.216	0.204	-1.259
2.0	1.50	0.0	1.50	0.000	0.000	0.589	-2.053
2.0	1.50	0.1	1.50	0.111	-0.298	0.438	-1.828
2.0	1.50	0.3	1.50	0.406	-2.039	0.159	-1.094
2.0	1.50	0.4	1.50	0.295	-2.304	0.059	-0.601
2.0	1.50	0.2	0.75	1.252	-2.433	0.817	-2.518
2.0	1.50	0.2	2.25	0.136	-0.707	0.143	-1.051
2.0	1.50	0.2	3.00	0.076	-0.520	0.084	-0.800

ＯＬＳバイアスを見ると、どのケースにおいても、$\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2$は過大推定、$\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$は過小推定になり、その大きさは無視できないことがわかる。式(26)から、$\rho_1 = 0$であれば$\hat{\rho}_2, \hat{\beta}_2$にはバイアスが発生しないことはわかるが、０に等しくない場合にはρ_1が小さいほど$\hat{\rho}_2$のバイアスは大きくなることがわかった。$\hat{\rho}_1, \hat{\beta}_1$のバイアスも$\rho_1$が小さいほど深刻である。$\rho_2$の値と、$\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \hat{\beta}_2$のバイアスの大きさとの間にも同様の関係がある。$\beta_1$の値はバイアスにほとんど影響しないのに対して、$\beta_2$の値の変化は大きく影響する。式(26)に$\beta_2$が直接的には含まれていないことから、これは$\beta_2$が小さいと$\rho_2$の影響が相対的に強くなるためであると考えられる。

推定量の分散について見ると、ρ_1, ρ_2が大きくなるにつれて、２ＳＧＬＳと２ＳＬＳの効率性の差が大きくなる。計算例では２ＳＧＬＳの分散が２ＳＬＳの分散の３分の１程度でおさまるケースも見られた。なおβ_1, β_2の値のもつ影響は小さい。

(4) ２ＳＬＳ法と２ＳＧＬＳ法の適用性

以上の結果から考えて、空間相互作用がまったく

表－3 パラメータ推定量の分散の比（2SGLS／2SLS）

所与パラメータ値				推定量の分散の比(2SGLS/2SLS)			
ρ_1	β_1	ρ_2	β_2	ρ_1	β_1	ρ_2	β_2
2.0	1.50	0.2	1.50	0.566	0.510	0.706	0.7544
0.0	1.50	0.2	1.50	0.887	0.920	0.858	0.8880
1.0	1.50	0.2	1.50	0.703	0.671	0.819	0.8257
3.0	1.50	0.2	1.50	0.488	0.422	0.649	0.7225
4.0	1.50	0.2	1.50	0.450	0.487	0.625	0.6882
2.0	0.75	0.2	1.50	0.578	0.513	0.666	0.7319
2.0	2.25	0.2	1.50	0.560	0.512	0.738	0.7651
2.0	3.00	0.2	1.50	0.558	0.517	0.759	0.7679
2.0	1.50	0.0	1.50	0.942	0.938	0.963	0.9683
2.0	1.50	0.1	1.50	0.771	0.740	0.896	0.9158
2.0	1.50	0.3	1.50	0.424	0.348	0.526	0.5714
2.0	1.50	0.4	1.50	0.401	0.314	0.475	0.5021
2.0	1.50	0.2	0.75	0.558	0.517	0.759	0.7678
2.0	1.50	0.2	2.25	0.574	0.511	0.680	0.7401
2.0	1.50	0.2	3.00	0.578	0.513	0.666	0.7310

含まれない場合を除いては、ＯＬＳバイアスは無視することができず、２ＳＬＳ法か２ＳＧＬＳ法を用いる必要がある。また、２ＳＬＳの推定値がｔ検定で棄却されても、２ＳＧＬＳでは分散を小さくできるため有意な推定値が得られる場合も見られ、ρ_1, ρ_2 の値が大きい場合には２ＳＧＬＳを用いることが望ましいと結論付けられる。

６．おわりに

本研究では、空間相互作用を取り扱う方法に着目して地域モデルの分類を行い、それらの構造に対応したモデル推定の方法を用いる必要性を指摘した。

連立型地域モデルは、これまでに多くの土地利用モデルとして用いられているにもかかわらず、その構造に対応した推定法が開発されていない。ＯＬＳ推定量は深刻なバイアスを持つことから、２段階推定法が必要であることがわかった。そこで２段階（通常）最小二乗法（２ＳＬＳ）と本研究で開発した２段階一般化最小二乗法（２ＳＧＬＳ）の特性を、漸近理論と実際のデータによる計算例を通じて検討し、これらの手法の適用範囲を明らかにした。

今後の研究課題をあげると以下のようである。

a) ここでは、 誤差項の分布形を仮定しないという立場から最尤法は取り上げていない。一般にＧＬＳ推定量は漸近的には最尤推定量と一致するので、２ＳＧＬＳ推定法もそのような性質を有するかどうかを検討する必要がある。このことを通じて、ｔ検定やＦ検定といった検定法の信頼度が評価できる。

b) 本研究では バイアス等の評価を漸近分布を用いて行っているので、大標本特性を議論していることになる。地域モデルにおいては観測できるサンプル数が限られているため、むしろ小標本特性が問題になる。そこでモンテカルロ・シミュレーションの利用が考えられるが、通常のシミュレーションは計算量が膨大になるため、森棟が行っているような標準化シミュレーションを利用する必要がある。[10]

c) 本研究では 時間を考慮しない静学的なモデルを取り上げて考察した。動学的に拡張する場合、空間相互作用が時間的な遅れをともなって伝播するという、時空間を同時に扱ったようなモデルの開発が必要であり、それに対応する推定方法が必要となる。

参考文献

1) Benett,R.J. and Horduk,L. :Regional Econometric and Dynamic Models. Handbook of Regional and Urban Economies, vol.1, pp.407-441, North-Holland,1986.

2) Anselin,L. and Griffith,D.A. :Do Spatial Effects Really Matter in Regression Analysis? Papers of the Regional Science Association, Vol.65, pp.11-34, 1988.

3) 佐々木公明 :モデル推定に関する計量経済学的課題，第18回土木計画学シンポジウム，pp.121-124，土木学会,1984.

4) 田中和子 :都市地理学における土地利用の空間分析，第18回土木計画学シンポジウム，pp.101-109，土木学会,1984

5) Cliff,A. and Ord,J. :Spatial Autocorrelation, Pion, 1973.

6) Cliff,A. and Ord,J. :Spatial Processes, Models and Applications, Pion, 1981.

7) Anselin,L. :Spatial Econometrics, Pion, 1988.

8) Ord,J. :Estimation Methods for Models of Spatial Interaction. Journal of the American Statistical Association,Vol.70,pp.120-126, 1975.

9) 岩田暁一 :計量経済学,有斐閣,1982.

10) 森棟公夫 :経済モデルの推定と検定,共立出版, 1985.