

ネットワーク形態を考慮した交通 均衡配分モデルの比較研究

A COMPARISON OF STOCHASTIC AND DETERMINISTIC EQUILIBRIUM TRAFFIC
ASSIGNMENT MODELS WHEN THE STRUCTURE OF NETWORK IS CONSIDERED

河上省吾* 広畠康裕** 徐 志敏***

By Shogo KAWAKAMI, Yasuhiro HIROBATA and Zhi Min XU

The equilibrium traffic assignment models are reviewed. the similarity between the link flows obtained from deterministic and stochastic equilibrium traffic assignment models is investigated at different congestion level, different network structure and OD distribution pattern. A typical city transportation network is used to show how the difference of deterministic and stochastic equilibrium models is influenced by the structure of network and OD distribution pattern as well as the level of congestion. The procedure is intended to assist in the choice of the most appropriate assignment algorithm for a given network and congestion level.

1. はじめに

交通均衡モデルは、利用者が経路選択を行う際に、経路所要時間に対する知覚の差と行動のランダム性があると仮定するか否かによって決定論的な均衡モデル(DUE)と確率論的な均衡モデル(SUE)に分けられる。DUEモデル¹⁾は、利用者が交通システムに関する情報を完全に把握しており、かつ同じ行動方式を取ると仮定するもので、これまでに理論的な面、計算アルゴリズム、実証的な検討等について多くの研究がなされてきた。これに対して、SUEモデル²⁾は経路選択を行う際の人間の知覚と行動におけるランダム性を考慮するもので、現実の利用者行動をより正確に反映できると言われているが、これまで有効な計算手法は開発されていない。すなわち、現在のSUEモデルの代表的な計算方法である

逐次平均法の収束には、通常、20~40回位の繰り返しを必要とし、DUEモデルにおけるFrank-Wolfe法の10~15回位に比べてかなり多くの計算時間を要する。このため、実際の交通配分を行う際に予測精度と計算コストを考慮した配分手法の選択問題が生じてくる。

Eash R. W.³⁾、宮城⁴⁾、桑原⁵⁾等は実測のリンクフローとの適合度を指標として、両モデルの比較を行い、貴重な実証例を提供したが、これまで実証的な研究はまだ数少なく、また、それらの比較はいずれも特定の対象地域に限られている。このため、一般的にどの様な場合にDUEモデルとSUEモデルに有意な差があるか、どの様な場合に両モデルが一致するようになり、計算上簡単な手法を使えばよいのかといった結論を出すのは現時点では困難であると思われる。したがって、このような概略なモデルの適用性の評価のためには、仮想状況での検討に基づくことが望ましいと考えられる。

Y. SheffiとW. B. Powell⁶⁾は仮想的なネットワークを用い、リンク混雑状態を影響要因としてDUEとSUEの両モデルの差について考察し、混雑度の増加につれて、

* 正会員 工博 名古屋大学工学部土木科教授
(〒464 名古屋市千種区不老町)

** 正会員 工博 豊橋技術科学大学建設工学科助教授
(〒440 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)

*** 学生会員 工修 名古屋大学工学部博士後期在学中

DUEモデルとSUEモデルの差が単調的に減っていく傾向があることを示した。しかし、Sheffi等の考察対象となったテストケースは20ペア交通量のみの特殊な格子型ネットワークにとどまっている。したがって、一般的な状況下でのモデル選択の指針を作るためには、多くのテストケースを設定した上で、両モデルの比較検討を行い、両モデルの差に影響を及ぼす要因とその影響の程度を明確にしなければならないと思われる。

本論文は、まずDUEモデルとSUEモデルの基本的な仮定の相違点を出発点として、ネットワーク形態、リンク混雑状況、OD分布パターンなど、両モデルの与える配分交通量の相違点を拡大あるいは縮小するような影響を及ぼす可能性のあるいくつかの要因を取り上げ、DUEモデルとSUEモデルの一般的な比較検討にどの様な要因を考慮すべきかについて述べる。次に、仮想的なネットワークとOD分布パターンを設定し、DUEとSUEモデルを適用して、それらの要因による両モデルの差の変化傾向を調べる。その結果によりDUEとSUE両モデルの差はネットワークの交通混雑度だけではなく、ネットワーク構造形態、OD分布パターンによっても影響されることを示す。本研究は両モデルの差に影響を与える主な要因を明確にし、各要因の変化による両モデルの差の変化傾向を把握する。これらの結果は概略的な傾向であるが、モデル選択のガイドラインを確立する上で、大きなヒントを与えると言えよう。

2. 交通均衡モデル

2.1) リンク走行費用関数

リンクのフローと走行費用の関係を示すリンク走行費用関数としては、いくつかの種類があるが、本研究では実際によく使われているBPRタイプの関数(図-1参照)を用いる。

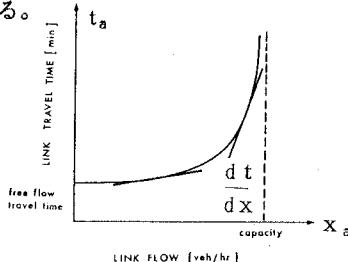


図-1 リンク走行費用関数

$$t_a(x_a) = \alpha + \beta x_a^{4.0} \quad (2.1)$$

ここで、 t_a はリンクaの所要時間で、 x_a はリンクaのフ

ロー、 α は自由流の所要時間で、 β は自由流所要時間と容量に関係のある係数である。

2.2) 決定論的均衡モデル(DUEモデル)

Wardropの利用者均衡モデルは、すべての利用者が自分の時間費用を最小にするように経路を選択すると言う利用者行動仮説に基づいている。この仮説の下で、「どの利用者もより安い費用の経路を見いだせないような交通フローパターン」がWardrop均衡と定義される。その数式表現は以下のようである。

$$C_{krs} - u^{rs} \begin{cases} = 0, & \text{if } f_{krs} > 0 \\ \geq 0, & \text{if } f_{krs} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

ここには C_{krs} はODペアr,s間k経路の時間費用で、 u^{rs} はr,s間の最小費用である。 f_{krs} はODペアr,s間k経路上のフローであり、以下のネットワーク上のフロー成立条件を満足しなければならない。

$$x_a = \sum_k \delta_{a,k} r^s \cdot f_{krs} \quad \forall a \quad (2.3a)$$

$$q_{rs} = \sum_k f_{krs} \quad \forall r,s \quad (2.3b)$$

$$f_{krs} \geq 0 \quad \forall k,r,s \quad (2.3c)$$

ここに、 x_a はaリンクのフローで、 q_{rs} はODペアr,s間の分布交通量である。また、 $\delta_{a,k} r^s$ は経路k上にリンクaがあるとき1、そうではないとき0の値を取る。なお、 C_{krs} と t_a の関係以下の通りである。

$$C_{krs} = \sum_a \delta_{a,k} r^s \cdot t_a \quad \forall k,r,s \quad (2.3d)$$

以上のWardrop均衡は、利用者がネットワーク全体の情報を完全に把握しており、かつ客観的に見た最短経路を選択すると仮定していることから、決定論的な均衡モデルと呼ばれるわけである。

一般には均衡配分の計算は上述の連立方程式を直接解くのではなく、Beckmann⁷⁾ 数理最適化問題を解くことに帰着する。Beckmannモデルの解法として Frank-Wolfe法が最も有効であると考えられるので、本研究ではF-W法を用いることにする。

2.3) 確率均衡モデル(SUEモデル)

一方、実際の交通行動は、個々の利用者の時間価値や嗜好等の違いによって、すべての利用者が客観的に見た最小費用経路となる経路を選択しているとは言えない。このような人間の知覚や価値観の違いによるランダム性を考慮した配分方法が従来の確率配分法である。C.F.DaganzoとY.Sheffi²⁾はWardropの均衡概念と確率配分原理を結合させ、確率均衡の概念を提案した。

確率均衡モデルでは、各個人は自分の知覚所要時間

費用を最小にするように経路を選択するという行動仮説に基づいたもので、「どの利用者ももっと安い費用の経路を見い出せないと思っている時のフローバランス」が確率均衡であると定義される。その数式表現は以下の通りである。

$$P_{k^rs} = \Pr(C_{k^rs} < C_{l^rs}, l \neq k, l, k \in K_{rs}) \quad (2.5a)$$

ここに、 C_{k^rs} は、ODペア r, s 間 k 経路の知覚所要時間であり、確率論変数と仮定され、 P_{k^rs} は k 経路の選択される確率である。 K_{rs} はODペア r, s 間の経路集合である。そして、一般的に知覚所要時間は次式で表現される

$$C_{k^rs} = c_{k^rs} + \varepsilon_{k^rs} \quad (2.5b)$$

ここに、 c_{k^rs} は経路所要時間の期待値で客観的な所要時間に等しく、 ε_{k^rs} は知覚所要時間のばらつきを表すランダム項である。なお確率的均衡モデルも式(2.3a), (2.3c)のフロー条件を満足しなければならない。

確率均衡モデルは知覚所要時間の分布形の仮定の違いのよって異なるモデルが導かれる。その代表的なものとして、LogitモデルとProbitモデルがあるが、本研究では後者のモデルを用いる。Probitモデルでは、ネットワークリンクの知覚所要時間 T_a が正規分布 $N(t_a, \theta t_a)$ に従うと仮定している。

式(2.5b), (2.3d)から、次のようになる

$$\mathbb{E}(C_{k^rs}) = c_{k^rs} = \sum_a t_a \cdot \delta_{a,k^rs} \quad (2.6a)$$

$$\text{cov}[C_{k^rs}, C_{l^rs}] = \theta \sum_a t_a \delta_{a,k^rs} \cdot \delta_{a,l^rs} \quad (2.6b)$$

本研究では、このSUBモデルの計算手法としては、Monte-Carloシミュレーションを基礎とした逐次平均法を用いるものとし、また、 θ の値はSheffi等の結果との比較のために0.3としている⁶⁾。

3. 影響要因別のSUBとDUEの差の検討

3.1) 利用者知覚のランダム性の大きさの影響

周知のように、SUBモデルは概念的にDUEモデルの拡張であるから、両者に差が生じる基本的な原因は利用者知覚及び行動のランダム性にある。したがって、利用者が交通システムに関する完全な情報が与えられ、知覚と行動のランダム性がなくなる場合には、SUBもDUEに収束する。Probitモデルの場合、 $\theta \rightarrow 0$ となると $T_a \rightarrow t_a$ となり、SUB→DUEとなる。

3.2) 混雑状況の影響

Y. SheffiとW. B. Powell⁶⁾は図-2のような20ペア分布交通量のある格子状テストネットワークにおいて、 θ

=0.3とし、交通需要強度 λ を変化させながら、DUEとSUBモデルの比較検討を行い、 λ が上昇するにつれて、SUBとDUEの差が単調に減っていく傾向があることを示した。

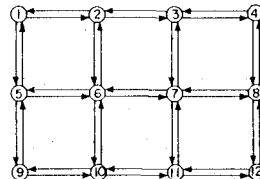


図-2 Sheffiのテストネットワーク

Y. Sheffi等が用いたテストネットワークのデータを表-1に示す。それを用いた解析結果は図-3で示している。ここで、Sは次式で定義され、DUEとSUBモデルの

$$S = \frac{\sum |X_a - X'_a|}{\sum X_a} \times 100\% \quad (3.1)$$

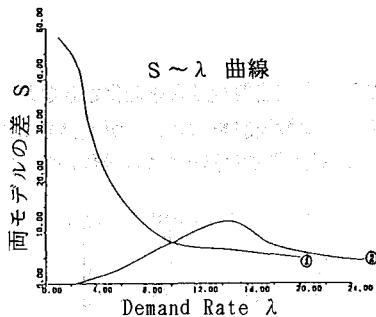
予測リンクフローの差を示す指標である。

表-1 Sheffiのテストネットワークデータ

From node	To node	α	β	α'	β'
1	2	.20	.008	.30.0	.006
1	5	.18	.008	.18.0	.008
2	1	.20	.008	.30.0	.006
2	6	.19	.008	.39.0	.006
2	3	.23	.008	.33.0	.006
3	2	.23	.008	.33.0	.006
3	7	.16	.008	.36.0	.006
3	4	.17	.008	.37.0	.006
4	3	.17	.008	.37.0	.006
4	8	.22	.008	.42.0	.006
5	1	.18	.008	.38.0	.006
5	6	.14	.008	.34.0	.006
5	9	.24	.008	.24.0	.008
6	2	.19	.008	.39.0	.006
6	5	.14	.008	.34.0	.006
6	7	.17	.008	.37.0	.006
6	10	.20	.008	.40.0	.006
7	3	.16	.008	.36.0	.006
7	6	.17	.008	.37.0	.006
7	8	.13	.008	.43.0	.006
7	11	.26	.008	.46.0	.006
8	4	.22	.008	.42.0	.006
8	7	.13	.008	.33.0	.006
8	12	.19	.008	.37.0	.006
9	5	.24	.008	.37.0	.006
9	10	.7	.008	.44.0	.006
10	9	.7	.008	.37.0	.006
10	6	.20	.008	.40.0	.006
10	11	.18	.008	.18.0	.006
11	10	.18	.008	.38.0	.006
11	7	.26	.008	.46.0	.006
11	12	.17	.008	.17.0	.008
12	8	.19	.008	.37.0	.006
12	11	.17	.008	.37.0	.006

ここは α, β は式(2.1b)中の係数で、 $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ はSheffiが用いたデータであり、 α', β' は本研究が用いたデータである。

本研究でもSheffi等と同じ条件の下で彼らとほぼ同じ結果(図-3の曲線①)を得た。曲線①を見ると、混雑度が上昇するにつれてSUBモデルがDUEモデルに単調に収束する傾向があるが、この原因について、Sheffi

図-3 SUEとDUEの差Sと交通需要強度 λ の関係

等はリンクパフォーマンス関数の形にあると解釈している。すなわち、図-1で示しているように、ネットワークの混雑度が上昇して、リンク交通量が容量に近づくとき、 dt/dx が大きくなり、経路選択の際に利用者がわずかな違いでも大きな時間的な損失を招くことになるから、知覚と行動のランダム性が結果的に減ると考えられる。

Y. Sheffi等は、この例を通じてDUEとSUEモデル選択の指針の確立のため的一般的な基準を示したが、彼らの比較検討は、分布交通量が2つ0ペアのみ(1-12, 4-9)で、リンク容量も一様な対称格子型ネットワークのものにとどまっている。したがって、一般的な結論を得るためにには、もっと多くのケースを設定し、検討する必要があると思われる。

そこで、まず、本研究では、異なるネットワーク条件においてもY. Sheffi等と同じ結論を得られるかどうかを検討するために、彼らが用いたネットワークデータのうちリンク自由流所要時間(表-1の α')とリンク容量に関するパラメータ(表-1の β')を変えてDUEとSUE両モデルをもう一度比較して見た。その場合のS- λ 曲線は図-3の曲線②で示している。Sheffi等の結果と違って λ が上昇するにつれてSが単調に減少するのではなく、一つの山が出ている。その山を越えてからは、 λ が増加するとSは減っていく傾向を示すようになる。ここで、ネットワークの一部のリンクの自由流の所要時間を変えることは、Sheffi等が設定した対称な格子型ネットワークを非対称なものに改造したことと同じ意味を持つ。曲線②は、 λ が一定値 λ_0 を超えると非対称な場合でもSUEがDUEに収束していく傾向があることを示しており、Sheffi等の推測の妥当性を裏付けているが、同時に、その一定値 λ_0 はネットワークの形態やOD分布パターンにより大きく影響されることも示唆している。そこで、以下では、多ODペアの場合に

について考察するとともに、特に、ネットワーク形態やOD分布パターンの違いによるSUEモデルとDUEモデルの差について考察する。

3.3) ネットワーク形態とリンク・ノード密度の影響

リンク数:

1680

ノード数:

441

セントロイド数:

36

$\phi = 29.5$

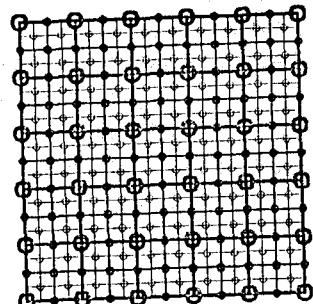


図-4(a) FN ネットワーク

リンク数:

440

ノード数:

121

セントロイド数:

36

$\phi = 15.2$

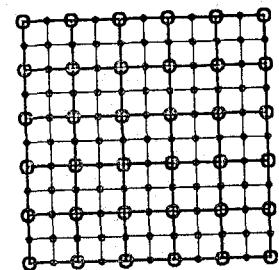


図-4(b) MN ネットワーク

リンク数:

120

ノード数:

36

セントロイド数:

36

$\phi = 8.1$

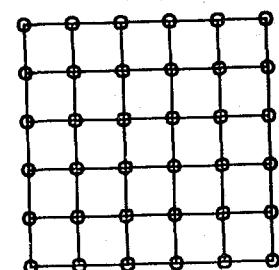


図-4(c) CN ネットワーク

図-4 本研究のテストネットワーク

前述のように、ネットワーク形態が対称か非対称か、ノードやリンクの分布が均等か否か、またネットワーク総容量が同じでも網構成が密か粗かによってSUEモデルとDUEモデルの差が大きくなったり小さくなったりする場合もあると考えられる。そこで、それらのネットワーク特性の相異がDUEモデルとSUEモデルの差にどの程度の影響を与えるかを考察するために、本研究は以

下のようにテストネットワークを設定して、両モデルの比較検討を行い、ネットワーク特性の相異の影響について考察してみる。ここでのテストネットワークは図-4(a), 4(b), 4(c)に示す3つの対称格子型ネットワークとする。ここでは、網密度の順にFN, MN, CNと呼ぶ。FN, MN, CNのネットワーク総容量とOD分布パターンは同じであり、それらの間の相違は網密度だけである。なお、本研究ではネットワークの密度を示す指標を、以下のように定義する。

$$\phi = \rho \cdot \sqrt{e \cdot v} \quad (3, 2)$$

ここに、 e はネットワークのノード数、 v はリンク数、 ν はリンク数とノード数でネットワーク網密度を表すときのパラメーターで、本研究では $\nu=4.0$ としている。 ρ は対象地域の面積とOD分布パターンに関係のある係数であり、同じ対象地域とOD分布パターンのネットワークの比較の場合には $\rho=1.0$ としてよい。

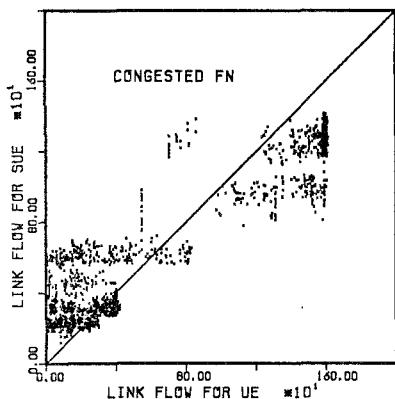
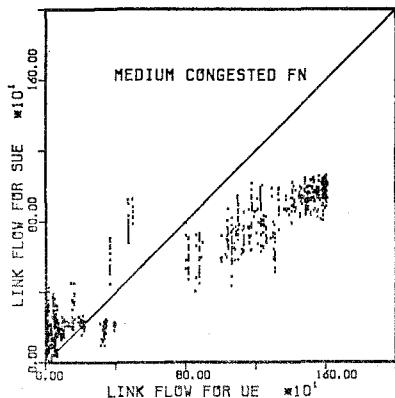
図-5(a) FN $\lambda=15.0$ 図-5(b) FN $\lambda=10.0$

図5a～5iはOD交通量が交通需要強度 $\lambda=5.0, 10.0, 15.0$ の3レベルで、 $q_{rs}=k_{rs} \cdot \lambda$ (k_{rs} は修正重力モデルによって与える)によって与えられるときの、

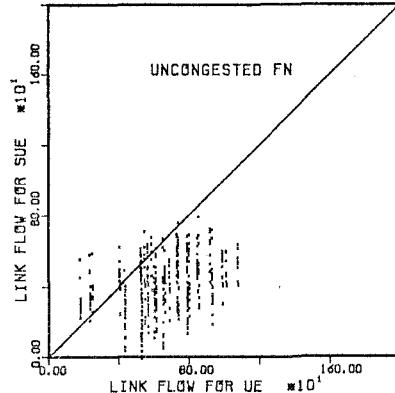
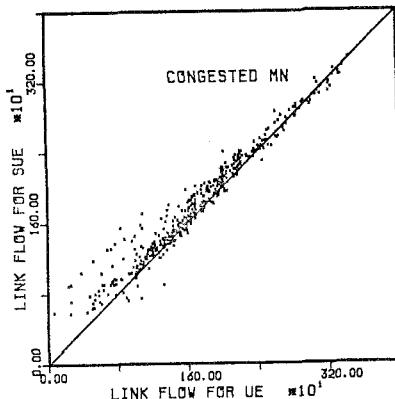
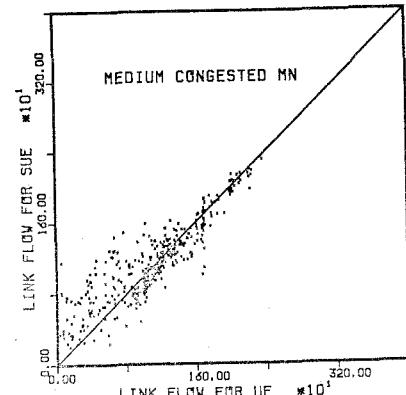
図-5(c) FN $\lambda=5.0$ 図-5(d) MN $\lambda=15.0$ 図-5(e) MN $\lambda=10.0$

図-5 SUEとDUEの予測リンクフローの比較

MN, MN, CNそれぞれにおける、SUEとDUEの予測結果の比

参考にしている。

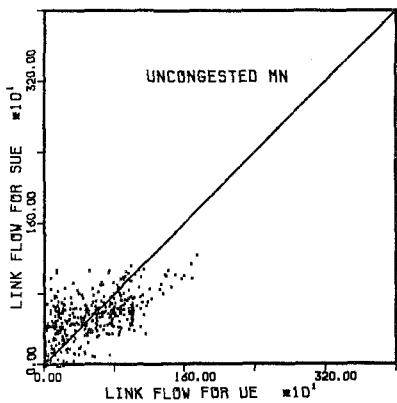


図-5(f) MN $\lambda=5.0$

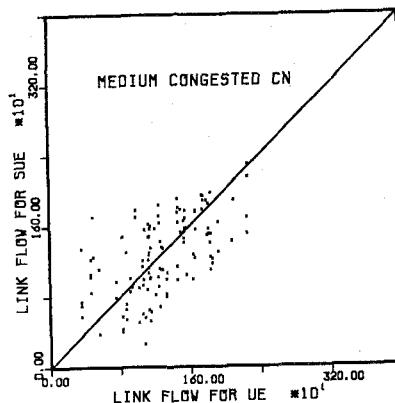


図-5(h) CN $\lambda=10.0$

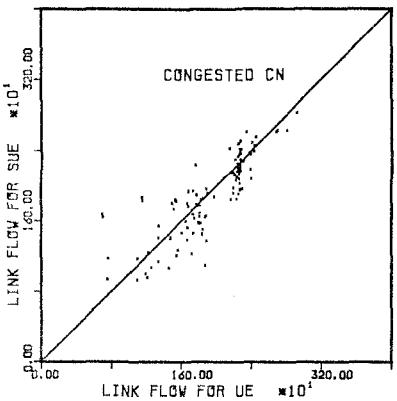


図-5(g) CN $\lambda=15.0$

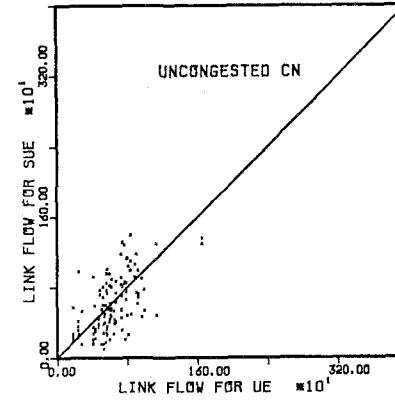


図-5(i) CN $\lambda=5.0$

較を示している。なお、ここで繰り返し計算の回数は、F-W法が15回で、逐次平均法が30~40回位である。

図5(a)~5(i)より、交通需要強度 λ が増加するにつれて、SUEモデルとDUEモデルの予測リンクフローが 45° 線に集中する傾向が見られ、交通混雑度が増大するにつれて両モデルの差が小さくなることが分かる。また、図-6のS~ ϕ 曲線に示すように、交通需要強度 λ が一定のとき、 ϕ が大きくなるにつれてSUEとDUEの予測結果の差が増えていく傾向も見られ、ネットワーク密度により両モデルの差は異なることが分かる。ただし、Sと ϕ の関係には、 λ の値によって若干の相違が見られる。なお、この図-6の曲線の当てはめにおいては、図5に示した計算結果のみではなく、ネットワーク形態が若干異なるいくつかのケースについての計算結果同様の傾向を示したことから、それらの結果をも

参考にしている。

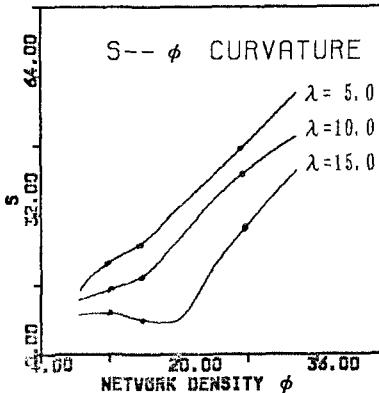


図-6 S~ ϕ 曲線

3.4) OD分布パターンの影響

ここではOD分布パターンの変化がSUEとDUEの両モデルの差に及ぼす影響について考察する。

OD分布が集中的なパターンから均等なパターンに変わるとDUEモデルの場合でも各リンクの利用される確率が均等に近くなるので、SUEとDUEの両モデルの予測結果の差は小さくなると予想できる。それを確かめるために、テストネットワークを図-4aのものに設定し、OD分布パターンが異なる3つのケースに対して、ネットワーク総容量とトータル交通量が一定という条件下でSUEとDUEの両モデルを適用した。その結果が図-7a, 7b, 7cである。

ここで3つのケースは、セントロイド数がそれぞれ異なっており、図4-aに示したノードを表す円の大きさの順に大、中、小とすると、ケース1は大のみ（セントロイド数36）、ケース2は大と中（セントロイド数36）、ケース3は大、中、小（セントロイド数441）を、それぞれセントロイドとして設定している。

そこで、OD分布パターンの均等度と両モデルの差との関係を見るために、本研究ではOD分布パターンの均等度を示す指標 ω を以下のように定義する

$$\omega = c/e \quad (3.3)$$

ここに c はセントロイド数で、 e はノード数である。

図7a, 7b, 7cでは、OD分布が均等なパターンになるにつれて、SUEとDUEの両モデルの予測リンクフローが45°線に集中する傾向が見られる。

図-8はDUEモデルとSUEモデルの解析結果の差とOD分布パターンの関係を示している。S～ ω 関係曲線はOD分布パターンの均等度 ω が大きくなるにつれて、DUEとSUE両モデルの差Sが単調に減少していく傾向が見られ

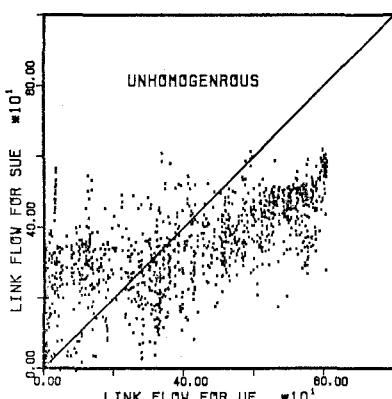
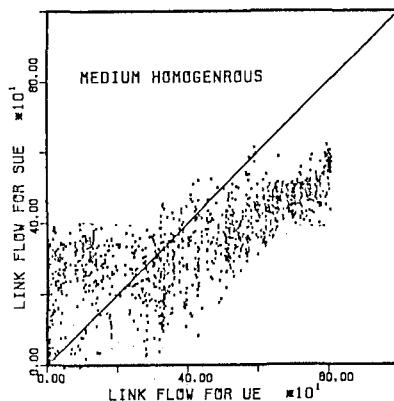
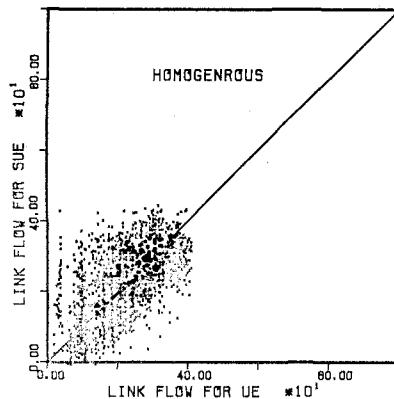
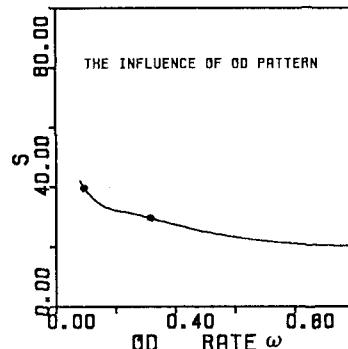
図-7a $\omega=0.08$ 図-7b $\omega=0.27$ 図-7c $\omega=1.0$

図-7 OD分布の違いによる両モデルリンクフローの比較する。なお、ここで曲線の当てはめにおいても図-6と同様の方法を用いている。

図-8 S～ ω 関係曲線

4. モデル選択の検討

SUEモデルはDUEモデルに比べて現実的な仮定をしているから、より正確に実際の交通現象を反映できると言われているが、その計算手法の効率がよくないため、SUEとDUEの両モデルの予測精度があまり差がない場合には、DUEモデルを使う方が望ましい。

3章ではDUEモデルがSUEモデルの良好な近似となるいくつかのケースについて議論したが、その結果は表-2のようにまとめられる。この表は、影響要因の各パラメータの変化方向と、両モデルの差の変化方向との対応関係を示している。

表-2 各要因によるSUEとDUEモデルの差の影響

分散 θ	交通需要 強度 λ	ネットワーク 網密度 ϕ	OD分布 均等度 ω	両モデル の差 S
↖	○	○	○	↖
○	↗	○	○	↖
○	○	↘	○	↖
○	○	○	↗	↖

ここに、○は一定値を取ると意味し、矢印は変化方向を表す。↗は増加、↘は減少を意味している。

表-2より、ネットワークが対称で、リンク、ノード、ODの分布パターンが比較的に均等の場合には以下のようなことが言える。

(1) 交通需要強度が増加すると、SUEモデルがDUEモデルに収束していく傾向があるから、交通需要強度が一定値を超えるとDUEモデルがSUEモデルの良好な近似となる。その一定値の値はネットワークの形態とOD分布パターンに関係する。

(2) 交通需要強度が一定の場合、ネットワークが細かくなると、各ODペアの経路の数が増えるから、全体的に利用者の知覚のランダム性の効果が顕著となり、SUEモデルとDUEモデルの差が大きくなる傾向が見られる。

(3) OD分布が均等なパターンの場合、特にネットワークの構造形態が比較的均一な場合、DUEモデルにおいても、全体的に各リンクの利用される確率は均等になる傾向があるから、DUEモデルはSUEモデルの良好な近似となる。

5. おわりに

本論文は、どの様な状況の場合にどの均衡配分モデルを用いるのが望ましいかという、配分モデル選択の

ためのガイドラインの確立を目指して、仮想的な配分問題を設定し、ネットワーク形態、リンク混雑状況、OD分布パターンを考慮しつつ、SUEモデルとDUEモデルの比較検討を行った。その結果、SUEモデルがDUEモデルに収束していく傾向のあるいくつかのケースを見い出した。そして、SUEモデルとDUEモデルの配分結果の差と、ネットワーク形態、混雑度、OD分布パターンとの関係の定量化を試みた。しかし、本研究は数少ない仮想的なケースでの計算結果に基づいて個々の要因ごとに概略な傾向を示すにとどまっている。したがって、具体的な配分を行う際に、どの様な条件の下で、どのモデルが最も適切であるかが正確に言えるためには、さらに数多くのケースについて検討する必要があると考えられる。それと同時に、現実の交通網を対象として、仮想的な交通網で得られた結論の妥当性を確認していく必要があると思われる。

参考文献:

- 1) Wardrop, J. G.: Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. Proc. Inst. Civil Engineers. PART I, Vol. 1, pp. 325-378, 1952.
- 2) Daganzo C. and Sheffi Y.: On Stochastic Model of Traffic Assignment, Transpn Sci. 11, 253-274, 1977.
- 3) Eash R. W., Janson B. N., and Boyce D. E.; Equilibrium Trip Assignment; Advantages and Implications for Practice. Transportation Research Record 728, PP. 1-8, 1979.
- 4) 宮城俊彦、小川俊幸:均衡確率配分に関する実例研究. 土木学会第41回年次講演集IV-252
- 5) 桑原雅夫:交通量配分の実証的検討. 交通工学、Vol. 23, NO. 2, 1988
- 6) Sheffi, Y. and Powell, W. B.: A Comparison of Stochastic and Deterministic Traffic Assignment over Congested Networks, Transpn. Res., Vol. 15B, No. 1, pp. 53-64, 1981.
- 7) Beckmann, M. J., McGuire, C. B. and Wisten, C. B.: Studies in the Economics of Transportation, Yale University Press. New Haven, Conn, 1956.
- 8) Sheffi, Y.: Urban Transportation Networks, Prentice-hall, INC., Englewood Cliffe, New Jersey, 1985. pp63-69