【土木計画学研究・論文集 No.4 1986年10月】

Lie群論による世帯の嗜好変化とデベロッパーの行動に関する理論的研究*

Theoretical Analysis on Taste Changes and Developer's Behavior by Lie Group Theory

小林潔司**、 張衛彬***、 吉川和広****

By Kiyoshi KOBAYASHI, Wei-Bin Zhang, and Kazuhiro YOSHIKAWA

We present a dynamic model for the behavior of a developer who is assumed to be a profit taker. A conservation law in the housing market can be deduced by the classic calculus of variations, which explains spatial equilibrium of the housing market. We introduce the concept of infinitesimal transformations in the Lie group theory to describe the taste changes of households. By investigating invariant properties of dynamic model under infinitesimal transformations, the conservation law in the housing market is derived to explain invariant structure in the housing market under the taste changes of the households.

1. はじめに

近年、日本を含めた先進諸国においては大都市圏の構造や社会・経済環境は従来とは異なった方向へ変動しつつある。また、人々の価値観は多様化してきており、住宅立地に関する嗜好や効用も変化しつつある。一方で、住宅立地モデルや住宅市場理論もこれまでも数多く開発されてきた。しかしながら、これらのモデルや理論が、果して上述のような環境の変化や人々の住宅に対する嗜好の変化にどこまで対応できるのかは明確にされていない[1]。

最近、住宅市場の構造変化や嗜好変化を直接モデル化しようとする試みが欧米諸国で進んでいる。これらの研究[2]では、例えばモデルのパラメータのシフトにより嗜好変化を表現しようとしている。しかし、モデルのパラメータは、本来、経済主体の行動や現象の観測を通じて測定されるものであり、将来のパラメータ値の変化をどう予測するかという問題がある。また、理論的にも異なるパラメータの値を持つモデルから導出される限界項（偏導関数）等は異なったものとなり、この場合、モデルの動的整合性を保つことが困難になるという問題が生じる。

本研究では、人々の嗜好変化をLie 群論における無限小変換を用いて定式化する。Lie 群論による方法は、モデルのパラメータを変化させなくても（パラメータが変化する場合にも適用可能であるが）、ある時点で観測されたモデルの構造を不変に保ちながら嗜好変化を内蔵させる事が可能となる。さらに、人々の嗜好の変化（変数やパラメータの持つ意味の変化）を許容しうるモデル、つまり嗜好変化に対し

*キーワーズ：住宅市場、Lie 群論

**正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学科（〒606 京都市左京区吉田本町）
***学生員 工修 京都大学大学院工学研究科
****正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

て動学不変性を持つモデルの一般形を明らかにできるというメリットがある。既存の都市モデルにおいて種々の関数形が用いられているが、関数形によって許容しうる嗜好変化の族の大きさが異なる。実用的にはより大きな動学不変性を持つモデルが望ましいことは言うまでもない。逆に、動学不変性を持たないモデルではわずかの嗜好変化に対してモデルの解の意味が大きく異なるという問題が生じる。

本研究は嗜好変化と都市モデルの動学不変性の概念をLie 群により明確に定義するとともに、嗜好変化に対して動学不変性を持つようなモデルを求めることを最終的な目的の一つと考えている。このことは、数学的にはLie 群上での関数あるいは数理計画問題の不変性を分析する問題に帰着する。どういう関数・数理計画問題を対象にするかにより、検討対象となる都市モデルが異なる事は言うまでもない。Lie 群論を用いた研究は緒についたばかりで、まだ体系的な研究を行うには至っていないが、本稿ではこのような研究の一環として住宅市場におけるデベロッパの行動モデルを対象として若干の成果を得ることができたので報告することとする。

2．動学的基本モデル

デベロッパーに関する動学モデルはすでに数多く提案されている。Fujita[3]は、これらのモデルをその基礎となっているデベロッパーの行動に関する仮説により、(1) 静的期待モデル、(2) 完全予見モデル ,(3) 合理的期待モデル、(4) 適応期待モデルに分類している。その中でも、特に完全予見(Perfect Forsight) 仮説（以下PF仮説と略す）に関しては、研究が蓄積されており、動学モデル（PFモデル）も数多く提案されている。本研究では、PF仮説に基づいて、デベロッパーの行動を基本モデルとして定式化する。PFモデルの研究事例としてはDiamond [4]があるが、本稿ではデベロッパーの開発行為を明示的に考慮することによりDiamond の動学モデルを拡張する。デベロッパーの利潤F(t)を次式で定義する。

$$F(t)=R(A(t),Q(t)) - C(A(t),\dot{Q}(t)) \qquad (1)$$

$R(A,Q)$：収益(Revenue) 関数、$C(A,\dot{Q})$：費用関数、$A(t)$: 立地条件を示す変数、$Q(t)$: 住宅サービスを示す変数、$\dot{Q}(t)= dQ/dt$ である。$A(t)$、$Q(t)$、$\dot{Q}(t)$ はベクトル変数であり、以後簡単に$A,Q,\dot{Q}$ と記述する。公共主体は社会資本を整備することによって、立地条件A をコントロールできる。A は開発地点ごとに固有に定義される関数であり、デベロッパーにとって外生的に与えられる。すなわち、デベロッパーは$t=0$ の時点で宅地開発地点を選択することによりA を決定することができると考えている。Q はデベロッパーが開発行為を通じて住宅市場に提供しうる住宅のサービス特性を記述する変数である。これにはデベロッパーの開発行為によって変化するような特性（例えば、アメニティ等）を含む。デベロッパーは利潤に対して中立的あるいは投機的であったりするが、このようなデベロッパーの行動パターンを考慮するために、デベロッパーの行動を次式に示すように、各期に得られる利潤に対する効用の現在価値の総計を最大化する問題として定式化する。

$$\mathrm{Max} \int_0^\infty U(R(A,Q)-C(A,\dot{Q}))\exp(-kt)dt \qquad (2)$$

ここで、U:効用関数、K:割引率である。以後、上式を基本モデルと呼ぶ。

3．基本モデルの最適性の条件

基本モデルの最適条件を変分法により求める。いま、式(2) のLagrangianを次式のように定義する。

$$L(A,Q,\dot{Q})=U(F(t))\exp(-kt) \qquad (3)$$

Euler-Lagrange条件により、式(2) の最適条件は

$$\partial L/\partial A = d/dt(\ \partial L/\partial \dot{A}\ ) \qquad (4)$$

$$\partial L/\partial Q = d/dt(\ \partial L/\partial \dot{Q}\ ) \qquad (5)$$

となる。式(4) より$U'\partial F/\partial A\ \exp(-kt)=0$。ここに$U'=dU/dF$である。すなわち、

$$\partial R/\partial A=\partial C/\partial A \qquad (6)$$

となり、デベロッパーの土地取得による限界収益と限界費用が一致する。次に、式(5) より

$$U'\partial R/\partial Q =kU'\partial C/\partial \dot{Q}- d/dt(U'\partial C/\partial \dot{Q}) \qquad (7)$$

いま、簡単のために、ディベロッパーが利潤の水準に対して中立的である、すなわち$U(F(t))=F(t)$であると考えると、式(7) は

$$\partial R/\partial Q= k\partial C/\partial \dot{Q} - d/dt(\ \partial C/\partial \dot{Q}) \qquad (8)$$

となる。$p=\partial C\ /\ \partial \dot{Q}$ と書換えると、式(8) は

$$\partial R/\partial Q = kp - dp/dt \qquad (9)$$

となる。ここで、開発事業に規模の効果がない、すなわち、$dp/dt=0$ の場合、式(9) は$\partial R/\partial Q=kp$とな

り、住宅供給による限界収益は割引かれた限界費用と一致する。次に、開発事業に規模の効果が現れる場合 $dp/dt>0$ であり、住宅提供による限界収益は規模の効果のない場合より低減する。$\partial R/\partial Q=r$ とし、式(9) の両辺を t で微分すると、

$$dr/dt = k\,dp/dt - d^2p/dt^2 \qquad (10)$$

開発事業に規模の効果があれば，$d^2p/dt^2<0$ より $dr/dt>0$ となり、規模の効果によりデベロッパーの住宅供給による限界収益は時間とともに増加する。

4．世帯の嗜好変化と無限小変換

人々の価値観の多様化や技術革新の結果、世帯の立地条件、住宅の質に対する嗜好は時間とともに変化していくと考えられる。Sato[5]はこのような、人々の嗜好の変化はLie 群論における無限小変換を用いて表現できることを示した。さて、立地条件や住宅の価値はなんらかの測定単位を用いて計測される。人々の嗜好が変化すれば、測定単位そのものの意味が変化する。例えば、人々の時間価値が変れば、同じアクセシビリティの値が異なった主観的な意味を持つようになる。数学的には、立地条件、住宅の特性といった値(Quantity)はある時間における局所座標系で記述される。嗜好が変れば測定単位を与える局所座標系そのものが変化する。ここで、次式に示すような局所座標系間の写像（図１）を考える。

$$T_\varepsilon: \bar{t} = Y(A,Q,t,\varepsilon)\,,\quad \bar{A} = X1(A,Q,t,\varepsilon)$$
$$\bar{Q} = X2(A,Q,t,\varepsilon) \qquad (11)$$

ここに、 Y, X1 , X2 は ε をパラメータとするLie 群である。ここで無限小作用素(Infinitesimal generator) τ、ξ_1、ξ_2 を

$$\tau = \partial Y(A,Q,t,\varepsilon)/\partial\varepsilon$$
$$\xi_1 = \partial X1(A,Q,t,\varepsilon)/\partial\varepsilon$$
$$\xi_2 = \partial X2(A,Q,t,\varepsilon)/\partial\varepsilon \qquad (12)$$

と定義すれば、局所座標系間の写像(Lie 群) は

$$T_\varepsilon: \bar{t} = t + \tau\varepsilon + 0(\varepsilon)$$
$$\bar{A} = A + \xi_1\varepsilon + 0(\varepsilon)$$
$$\bar{Q} = Q + \xi_2\varepsilon + 0(\varepsilon) \qquad (13)$$

となる。$0(\varepsilon)$ は無限小項を示す。ここで、ある基準年次 $t=0$ の時点である住宅の属性が (A,Q) であるとする。嗜好変化が起これば同じ属性でも異なる価値を持つようになる。すなわち、$t=\varepsilon$ の時点で同じ

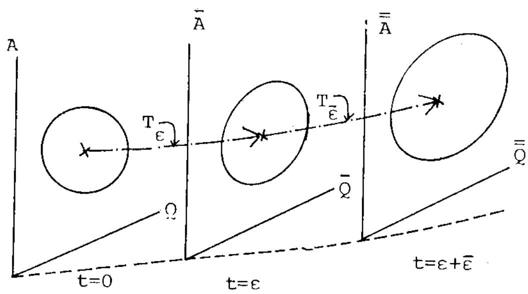

図１ 局所座標系間の写像(Lie 群)

属性の価値を測定すれば $(\bar{A},\bar{Q})$ となる。式(13)は、このような同一の対象の異なる測定単位における測定値間の関連関係を表現している。逆に、$t=\varepsilon$ の時点で測定された属性 $(\bar{A},\bar{Q})$ は嗜好変化が起こる前の時点 $t=0$ における測定単位に換算できる。すなわち、式(13)に示すLie 群の逆元を考えることにより、すなわち、式(13)の逆写像

$$T_{-\varepsilon}: t = \bar{t} - \tau\varepsilon - 0(\varepsilon)$$
$$A = \bar{A} - \xi_1\varepsilon - 0(\varepsilon)$$
$$Q = \bar{Q} - \xi_2\varepsilon - 0(\varepsilon) \qquad (14)$$

により、任意の時間の変数の値をある基準年次における測定単位に換算することができる。この意味では、経済学でよく用いるデフレータと同じような使い方が可能である。しかし、嗜好の変化は測定単位の変化であり、嗜好変化が起こった時に同じ構造をもつモデルを異なる時点で用いることができるかどうかが問題になる。後に明らかにするように、任意のタイプの嗜好変化に対して時間的移転可能性があるモデルは存在しない。すなわち、嗜好変化のタイプによって、適用可能なモデルの関数の形が限定される。本研究では、無限小変換上での基本積分(2)の不変性を検討し、どのような嗜好変化のタイプに対してどのような効用関数、収益関数、費用関数を用いることができるのか検討する。

5．動学不変性の定義

一般に、動学システムの不変性を示す概念として「動的不変性」「発散を伴う不変性」がある[6]。これらの概念に基づいて、基本モデルの不変性を以下のように定義する。すなわち、微小な ε に対して

$$L(\bar{A},\bar{Q},\dot{\bar{Q}},\bar{t}) - L(A,Q,\dot{Q},t) = O(\varepsilon) \quad (15)$$

$$L(\bar{A},\bar{Q},\dot{\bar{Q}},\bar{t}) - L(A,Q,\dot{Q},t) = \varepsilon\ d\Phi/dt + O(\varepsilon) \quad (16)$$

が成立する。ここに、$O(\varepsilon)$ は無限小項、ΦはA,Qに関する任意の関数である。式(15)は「動的不変性」を、式(16)は「発散を伴う不変性」を定義している。Lagrangianは式(3) より現在価値に割引かれたデベロッパーの効用と解釈できる。いま、ある基準年次$t=0$ のある住宅の属性が(A,Q) であり、嗜好変化が起こったあとの$t=\varepsilon$の時点で属性の価値が$(\bar{A},\bar{Q})$ と測定されたとする。(A,Q), $(\bar{A},\bar{Q})$ は、本来同一の住宅の属性であり、嗜好の無限小変化に対して、効用は同じ値を示さなければならない。「動的不変性」とはこのように嗜好変化が起こっても同じ効用水準値を与える関数を用いることができることを意味する。一方、「発散を伴う不変性」とは、嗜好変化が生じた場合、デベロッパーの効用関数は関数の形を一定に保ったまま、別の効用水準のレベルにシフトすることを意味する。すなわち、嗜好の変化によって同じ関数族に属する別の曲線にシフトするわけである。実際、住宅市場に影響を及ぼす要因は、嗜好変化だけとは限らず、技術革新も大きな影響を与えよう。すなわち「発散を伴う不変性」とは、対象とするシステムが外部からの影響を受けた際、これらの影響は効用の水準をシフトさせるが関数の形には影響を及ぼさないことを示す。いずれにせよ、基本モデルがある嗜好変化のタイプに対して動学的に不変であれば、そのような嗜好変化が起こっても基本モデルから導出される種々の性質、例えば最適条件は不変に保たれる。基本モデルを不変に保つような嗜好変化のパターンの族が大きければ大きいほど、基本モデルの不変性の範囲が広くなる。つまり、多少の嗜好の変化が起こっても基本モデルを用いて分析することが可能となる。

6．動学不変性の必要条件

一般に、任意のタイプの無限小変換に対して、基本モデルの動学不変性が成立するわけでない。つまり、すでに述べたように我々はPF仮説に基づいて世帯の嗜好変化を許容しうる動学モデルの開発を目指したものであるが、このようなPF仮説が適用可能な範囲が存在する。基本モデルを不変に保つために無限小変換が満足すべき必要条件を求め、基本モデルの適用可能性の範囲を検討する。まず「動的不変性」を満足するための条件を求める。ここで式(15)をεで微分し、若干の変形により基本積分が無限小変換に対して不変であるための条件が求まる。これは、Lie 群論における基本不変量[6]であり、

$$\tau\,\partial L/\partial t + \xi_1\,\partial L/\partial A + \xi_2\,\partial L/\partial Q + \partial L/\partial \dot{Q}\,(d\xi_2/dt - \dot{Q}\,d\tau/dt) + L\,d\tau/dt = d\Phi/dt \quad (17)$$

となる。基本モデルの基本不変量は$U(d\tau/dt - k\tau) + U'(\xi_1\,\partial R/\partial A - \xi_1\,\partial C/\partial A + \xi_2\,\partial R/\partial Q - \partial C/\partial \dot{Q}\,d\xi_2/dt + \dot{Q}\,\partial C/\partial \dot{Q}\,d\tau/dt) = 0$となる。この、基本不変量が$U \neq 0$, $U' \neq 0$であるすべてのU, U'に対して恒等的に成立するためには

$$d\tau/dt - k\,\tau = 0 \quad (18)$$

$$\xi_1\,\partial R/\partial A - \xi_1\,\partial C/\partial A + \xi_2\,\partial R/\partial Q - \partial C/\partial \dot{Q}\,d\xi_2/dt + \dot{Q}\,\partial C/\partial \dot{Q}\,d\tau/dt = 0 \quad (19)$$

が成立しなければならない。式(18)より

$$\tau = a\ \exp(kt) + \Psi(A) \quad (20)$$

を得る。ここに、$\Psi(A)$ は立地条件に関する任意の関数である。また、式(19)が任意のξ_1, ξ_2, Q, $\dot{Q}$ に対して成立するための条件として

$$\xi_1 = \eta(A,Q,t) \quad (21)$$

$$\partial C/\partial \dot{Q}\ \partial \xi_2/\partial t - \xi_2\,\partial R/\partial Q = 0 \quad (22)$$

$$\xi_2\,\partial C/\partial \dot{Q} = ak\exp(kt)\,\dot{Q}\,\partial C/\partial \dot{Q} + \phi(A,t) \quad (23)$$

を得る。ここに、次の定理を得る。

> 定理１：基本モデルの動的不変性が成立する必要条件は世帯の嗜好変化を示す無限小変換が式(20)～(23)に示す条件を満足することである。

また、「発散を伴う不変性」に基づいた場合も同様の必要条件を得ることができる[7]。

> 系１：基本モデルの発散を伴う不変性が成立するための必要条件は無限小変換が式(20)～(23)に示す条件を満足することである。

系１より「動的不変性」、「発散を伴う不変性」という異なる不変性の定義を用いても同じ結果を得ることが明らかとなった。我々は、例えばポテンシャルがある水準にある地域を対象として都市モデルを作成する。さらに、このモデルを経済の発展や人口の増減によりモデルを作成した時点とは異なったポテンシャルの状態にある将来の地域に適用し予測や政策実験を行う。このような方法論は都市モデルの適用において我々が従来採用してきたものである

が、上述のことはこの方法論に問題がないことを示す。以上はPFモデルを対象とした議論であるが、都市モデル一般においてもこのようなモデルの時間的移転可能性が成立しうるかどうか検討する余地があろう。しかし、モデルを構成している変数や定数の意味が嗜好の変化といった外的な要因により変化する場合には、従来のようなモデルの適用方法では将来の予測結果に重大な誤差を生じうる。この場合モデルが外的な変化に対して影響を受けないように工夫する必要がある。本稿で着目しているLie 群はそのための一つの有効な手段であろう。

さて、以上では基本モデルを不変に保つ必要条件を求めた。定理１は基本モデルの適用範囲を示し、嗜好の変化が定理１の条件を満足しない場合には基本モデルが適用できない。この場合、PF仮説とは異なる行動仮説に基づく動学モデルの開発を目指す必要がある。次に式(22),(23) をξ_2 について解くことにより、これらの条件を満足する無限小変換ξ_2 の一般形を求めることとする。式(23)は非線形の偏微分方程式であるが、費用関数が$\dot{Q}$ に対して線形かあるいは非線形かによって偏微分方程式の性質が異なる。費用関数が$\dot{Q}$ に対して1)線形、2)非線形の場合のそれぞれに対して偏微分方程式を解く。

(1) 費用関数が線形の場合

次式のように$\dot{Q}$ に対して線形の費用関数を考える。

$$C(A,\dot{Q})=\omega(A)+p\dot{Q} \tag{24}$$

ここで$\omega(A)$ は、立地条件に関する任意の関数である。式(24)を式(23)に代入し、これを、ξ_2 の各要素ξ_{2j}に関して解くことにより

$$\xi_{2j}=a\,k\,\exp(kt)(\Sigma_i\,\lambda_{ij}\,Q_i)+\phi_j\,(A,t) \tag{25}$$

$$\Sigma_i\,\lambda_{ij}\,p_i=p_j \qquad (j=1,---,m) \tag{26}$$

$$\Sigma_j\,p_j\,\phi_j\,(A,t)=\phi(A,t) \tag{27}$$

ここに、$\phi(A,t),\phi_j\,(A,t)$ は式(27)を満足する任意の関数、$\xi_2=(\xi_{21},--,\xi_{2j},--,\xi_{2m}),Q=(Q_1,--,Q_j,--,Q_m)$,である。

(2) 費用関数が非線形の場合

非線形費用関数の場合、割引率k,パラメータa のの値により偏微分方程式の性質が異なる。a≠0 and k≠0 の場合には、定理１の条件を満足するような解は存在しない。一方、a≠0 or k≠0の場合、式(23)は

$$\Sigma_j\,\xi_{2j}\partial C/\partial\dot{Q}_j=\phi(A)\quad(=0) \tag{28}$$

となる。式(28)の左辺は$Q,\dot{Q}$ を含んでおり、任意の$Q,\dot{Q}$ に対して式(28)が成立するためには、$\phi(A)=0$でなければならない。この時、偏微分方程式(28)の二つの解

a) $\tau=a\,\exp(kt)+\Psi(A)$

$\xi_1=\eta(A,Q,t)$, $\xi_2=0$

b) $\tau=a\,\exp(kt)+\Psi(A)$

$\xi_1=\eta(A,Q,t)$

$\xi_{2j}=\phi_j\,(A,Q)\qquad(j=1,---,m)$

$$\Sigma_j\,\phi_j\,(A,Q)=-\zeta(A)\;\phi_m\,(A,Q) \tag{29}$$

を得る。$\zeta(A)$:任意の関数である。また、費用関数はA と$\dot{Q}$ に関して分離可能でなければならない[7]。

$$C(A,\dot{Q})=\omega(A)+\chi(\dot{Q}) \tag{30}$$

ここにω、χ はそれぞれ$A,\dot{Q}$ に関する関数である。

> 定理２：基本モデルが嗜好変化に対して動的不変である必要条件は、無限小変換関数が費用関数が$\dot{Q}$ に対して線形の場合式(20),(21),(25)～(27)非線形の場合式(29)を満足することである。

定理２に基づいて、表１には基本モデルを動的不変に保ちうる嗜好変化のパターンと、そのときに用いることのできる基本モデルの形式をとりまとめて示している。なお、表１に示す嗜好変化の各パターンに対して動的不変性を保持しうる収益関数の一般形は式(22)に示す偏微分方程式をQ に対して解くことにより求まる。しかし、この方程式の一般解を求めるのは容易ではないので、本稿の 8. において定理２の条件を満足するような無限小変換のタイプをいろいろ想定し、それぞれの場合に対して方程式を満

表－１　基本モデルと無限小変換

費用関数	a ,k	無限小変換
$C(A,\dot{Q})=\omega(A)+p\dot{Q}$ (線形)	任意	$\tau=a\exp(kt)+\Psi(A)$ $\xi_1=\eta(A,Q,t)$ $\xi_{2j}=ak\exp(kt)(\Sigma_i\,\lambda_{ij}\,Q_i)+\phi_j\,(A,t)$ $\Sigma_i\,\lambda_{ij}\,p_i=p_j\;(j=1,--,m)$ $\Sigma_j\,\phi_j\,(A)=\phi(A,t)$
$C(A,\dot{Q})=\omega(A)+\omega(\dot{Q})$ (可分離非線形)	a≠0 k=0 or a=0 k≠0	$\tau=a\exp(kt)+\Psi(A)$ $\xi_1=\eta(A,Q,t)$ $\xi_{2j}=\phi_j\,(A,Q)$ $\Sigma_j\,\phi_j\,(A,Q)/\phi_m\,(A,Q)=-\zeta(A)$
	a≠0 k≠0	基本モデルは動的不変でない
任意の非線形関数	a≠0 k=0 or a=0 k≠0	$\tau=1$ or $\tau=\Psi(A)$ $\xi_1=\eta(A,Q,t),\xi_2=0$ (ξ_2に関する嗜好変化を許容しない)
	a≠0 k≠0	基本モデルは動的不変でない

足するような収益関数の形式を求めることとする。

7．住宅市場における保存則

嗜好変化のタイプを示す無限小変換が定理２に示す条件を満足する場合、基本モデルは嗜好変化に対して不変性を保つことが明らかとなった。さて、基本モデルが嗜好変化に対して不変であれば、基本モデルの最適解は、当然のことながら無限小変換に対して不変である。そこで、式(17)に示した基本不変量に基本モデルの最適条件を示すEuler-lagrange条件式を代入しNoether の定理[8]を用いれば、基本モデルの最適解の動的不変性が保証される条件が導出できる。すなわち、基本モデルの最適経路上で

$$\Omega=(L-\dot{Q}\ \partial L/\partial\dot{Q})+\xi_2\ \partial L/\partial\dot{Q}=\mathrm{Const.}\qquad(31)$$

が成立しなければならない。これは、最適経路上での不変量を示すもので住宅市場の保存則と呼ぶこととする。定理２を満足する無限小変換を式(31)に代入すれば、基本モデルに対する保存則を求めることができる。例えば、費用関数が$\dot{Q}$ に対して線形の場合には、式(3),(25)～(27)より、保存則

$$\Omega=(a\exp(kt)+\Psi(A))(U+p\dot{Q}U')\exp(-kt)+\xi_2\ pU'\exp(-kt)=\mathrm{Const.}\qquad(32)$$

を得る。保存則は動的不変な基本モデルの最適解上で効用関数 U、収益関数 R、費用関数 C、無限小変換ξ_2 の間に成立すべき条件を示している。ここで留意すべきことは、基本モデルの中の効用関数、収益関数、費用関数が動的不変性を保持する場合には、保存則は実証的に検証可能なことである。つまり、PF仮説自体を直接検証することは困難であるが、保存則はPF仮説に基づく基本モデルから演繹的に導出されたものであり、保存則を検証することによりPF仮説が検証可能となるわけである。また、保存則は基本モデルのHamiltonian を定義しており、Hamiltonianの正準変換を利用した動学モデルの開発も可能である。これに関しては別の機会に発表する。

8．嗜好変化のタイプと基本モデルの動的不変性

世帯の嗜好変化のパターンを種々想定し、それぞれの場合に対して実際に基本モデルの動的不変性を満足するような効用関数、収益関数、費用関数の形式および保存則を具体的に求めることとする。さて、定理２の条件を満足するような無限小変換を網羅的に列挙することは可能であるが、その数は膨大な量に及ぶ。その詳細は参考文献[7]に譲り、ここでは代表的な無限小変換のタイプを取上げ考察する。

(1) Case 1 ($\tau=1$、$\xi_1=0$、$\xi_2=0$)

本ケースのLie 群は$\bar{t}=t+\varepsilon$、$\bar{A}=A$ 、$\bar{Q}=Q$となる。いま、パラメータεを時間の経過を示すパラメータと考えると、このケースは嗜好の変化が生じない通常の動学モデルを考えることとなる。表１より明らかなように、嗜好変化が生じない場合には任意のタイプの関数型を基本モデルで用いることができる。この場合、保存則は

$$\Omega=(U+\dot{Q}U'\ \partial C/\partial\dot{Q})=\mathrm{Const.}\qquad(33)$$

となる。いま、ここで効用関数の形式としてa)$U=\alpha+\beta F$ 、b)$U=\exp(\alpha+\beta F)$、c)$U=\ln(\alpha+\beta F)$の三つのタイプを考える。

a) Case 1-a ($U=\alpha+\beta F$ の場合)

式(33)に$U=\alpha+\beta F$ 代入すれば保存則は、

$$\alpha+\beta F+\beta\ \dot{Q}\partial C/\partial\dot{Q}=\nu\qquad(34)$$

ここに、νは定数である。最適利潤 F^* は

$$F^*=(\nu-\alpha-\dot{Q}\ \partial C/\partial\dot{Q})/\beta\qquad(35)$$

となる。デベロッパーが利潤の水準に対して中立である場合、デベロッパーは任意の時点で最適利潤

$$F^*=\nu-MC\ ,\quad MC=\dot{Q}\ \partial C/\partial\dot{Q}\qquad(36)$$

を得る。MCは住宅を一単位供給するのに必要な費用であり、総限界費用と呼ぶこととする。

b) Case 1-b ($U=\exp(\alpha+\beta F)$の場合)

本ケースの場合における保存則は

$$\exp(\alpha+\beta F)(1+\beta MC)=\nu\qquad(37)$$

となる。また、最適利潤は

$$F^*=1/\beta\cdot\ln(\nu/(\beta MC+1))-\alpha/\beta\qquad(38)$$

c) Case 1-c ($U=\ln(\alpha+\beta F)$の場合)

本ケースにおける保存則は

$$\ln(\alpha+\beta F)+\beta MC/(\alpha+\beta F)=\nu\qquad(39)$$

最適利潤は陰関数

$$((\alpha+\beta F)\exp(-\nu))^{(\alpha+\beta F)}=\exp(-\beta MC)\qquad(40)$$

を Fに対して解くことにより得られるが、これを利潤に関する明示的な関数（最適値関数）として解析的に表現することは不可能である。

(2) Case 2 ($\tau=1$、費用関数が線形の場合)

費用関数は次式で与えられる。

$$C(A,\dot{Q})=\omega(A)+\Sigma_j\ p_j\ \dot{Q}_j \tag{41}$$

本ケースでは、a=0 であり無限小変換ξ_1，ξ_2は

$$\xi_1=\eta(A,Q) \tag{42}$$

$$\xi_{2j}=\phi_j(A) \tag{43}$$

$$\Sigma_j\ p_j\ \phi_j(A)=\phi(A) \tag{44}$$

と簡略化される。さらに、偏微分方程式(22)を解くことにより本ケースにおける収益関数の一般形は

$$R(A,Q)=\theta_1(A)+\theta_2(\pi(A)\ \chi) \tag{45}$$

$$\chi=\Sigma_j\ Q_j+\zeta(A)Q_n \tag{46}$$

$$\zeta(A)=-\Sigma_j^{m-1}\phi_j(A)/\phi_m(A) \tag{47}$$

ここに、θ_1，θ_2，π，ζは任意の関数である。式(42)より、世帯の立地条件に対する嗜好変化は住宅の質および立地条件の任意の関数として表現でき、基本モデルはかなりの程度広い範囲の嗜好変化を許容しうる。一方、式(43)より住宅の質に対する嗜好変化は住宅が立地している立地条件のみに影響される場合に限られる。一方、このような嗜好変化に対してQ の値を式(47)で定義される$\zeta(A)$ を用いて式(46)に示すように補正し、式(45)に示す収益関数を用いれば基本モデルの動学不変性が保証される。ここで重要なことは、式(45)においていくつかの仮定をおけば実用的な収益関数のタイプが得られることである。例えば、①式(45)の$\pi(A)$ を定数と考えれば、A とQ に関してseparable な収益関数が得られる。②式(45)の第１項を定数、$\pi(A)$ を付け値関数と考えれば、multiplicativeな収益関数、$R(A,Q)=\Sigma_j\ \pi(A)Q_j$ を得る。この場合、基本モデルはPF仮説に基づく既存のモデル[3]と形式上一致する。換言すれば、既存の動学モデルの多くは本ケースにおいて動的不変な基本モデルの一つの特殊ケースに相当することがわかる。なお、②の場合$\zeta(A)=1$であり、収益関数中のQ を$\zeta(A)$ により補正する必要はないが、嗜好変化の族は$\Sigma_j\ \phi_j(A)=0$を満足するようなタイプに限定される。つまり許容される嗜好変化は住宅の特性やタイプによって異なる方向に変化するものに限られる。

a) Case 2-a ($U=\alpha+\beta F$ の場合)

本ケースにおける保存則と最適利潤は、$\nu(t)=\nu\exp(kt)$, $MC=p\dot{Q}$ とすれば

$$\alpha+\beta F+\beta(MC-\phi(A))=\nu(t) \tag{48}$$

$$F^*=(\nu(t)-\alpha)/\beta-MC+\phi(A) \tag{49}$$

b) Case 2-b ($U=\exp(\alpha+\beta F)$の場合)

本ケースにおける保存則と、最適利潤は

$$\exp(\alpha+\beta F)(1+\beta MC-\beta\phi(A))=\nu(t) \tag{50}$$

$$F^*=\ln(\nu/(\beta MC-\beta\phi(A)+1))/\beta-\alpha/\beta \tag{51}$$

となる。

c) Case 2-c ($U=\ln(\alpha+\beta F)$の場合)

最適利潤を明示的な関数の形で表現できない。

式(44)より$\phi(A)$ は住宅の質に対する嗜好変化により生じる住宅の付加価値を住宅の質の改善に要する限界費用で評価したものであることがわかる。いま、世帯の住宅の質に対する嗜好が増加している場合を考えよう。この場合$\phi(A)>0$ となり式(49)(51)よりデベロッパーは世帯の嗜好の変化に伴う超過利潤$\phi(A)$ を得る。ここで超過利潤$\phi(A)$ はA の関数となっている。つまり、規模の効果が存在しない小規模の宅地開発の場合には、立地条件により世帯の嗜好変化のパターンは異なり、デベロッパーが獲得する超過利潤も立地条件によって異なる。

(3) Case 3 （ $\tau=1$、費用関数が非線形の場合）

本ケースでは開発事業が大きく規模の効果を無視できない場合を考えている。定理２に示す条件を満足するためには費用関数はA と$\dot{Q}$ に関して分離可能でなければならない。

$$C(A,\dot{Q})=\omega(A)+\chi(\dot{Q}) \tag{52}$$

定理２より無限小変換ξ_1，ξ_2は

$$\xi_1=\eta(A,Q) \tag{53}$$

$$\xi_{2j}=\phi_j(A,Q)\quad(j=1,---,m) \tag{54}$$

$$\Sigma_j^{m-1}\phi_j(A,Q)/\phi_m(A,Q)=-\zeta(A) \tag{55}$$

である。Case 2と異なって、式(54)より、世帯の住宅の質に対する嗜好が住宅が立地している立地条件と現在住んでいる住宅の影響を受け変化しても基本モデルは動的な整合性を保ちうる。式(55)を満足するような関数ϕ_jは、$\phi_j(A,Q)=\phi_j(A)\cdot\kappa(Q)$ となる。いま、$\kappa(Q)$ を定数と考えれば、Case 2の無限小変換となり、Case 2の無限小変換のタイプを包含する。この意味では、Case 2の場合よりもより大きな嗜好変化の族を許容することとなる。また、本ケースにおいても式(45)～(47)に示す収益関数が基本モデルを不変に保ちうる。以上より、実用的な収益関数のタイプとしてはA とQ に関してmultiplicativeあるいはseparable な関数があげられよう。これ以外の複雑な収益関数を用いることは収益関数としての精度をあげえても、基本モデルは嗜好変化に

対して不変性を維持しえず得策ではないと考える。

a) Case 3-a ($U=\alpha+\beta F$ の場合)

$MC=\dot{Q}\partial C/\partial\dot{Q}$ とすれば保存則と最適利潤は

$$\alpha+\beta F+\beta MC=\nu\exp(kt) \tag{56}$$

$$F^{*}=\nu\exp(kt)/\beta-MC-\alpha/\beta \tag{57}$$

となる。式(57)より住宅建設の規模の効果によりデベロッパーの利潤は長期的に増加する。

b) Case 3-b ($U=\exp(\alpha+\beta F)$の場合)

本ケースにおける保存則と、最適利潤は

$$\exp(\alpha+\beta F)(1+\beta MC)=\nu\exp(kt) \tag{58}$$

$$F^{*}=\ln(\nu\exp(kt)/(\beta MC+1))/\beta-\alpha/\beta \tag{59}$$

c) Case 3-c ($U=\ln(\alpha+\beta F)$の場合)

Case1-c Case2-c と同様に最適利潤を明示的な関数の形では表現できない。

9. まとめと今後の課題

本研究では、Lie 群論により住宅市場における世帯の嗜好変化をモデル化できることを示し、具体的にデベロッパーの行動分析を通じてLie 群論の適用性を検討したものである。本研究は、まだ理論研究の段階にとどまっているが、以下に示すような知見と今後の研究のための問題提起を得ることができた。1)完全予見仮説に基づいてデベロッパーの行動をモデル化した場合、任意の嗜好変化に対して動的不変性を持つモデルは存在しない。2)A,Q に関してMultiplicativeなあるいはseparable な収益関数を用いた場合、基本モデルは嗜好変化を許容する。3)既存の完全予見モデルの多くは、本研究で求めた動的不変なモデルの一つの特殊ケースに相当する。しかし、この場合許容される嗜好変化のタイプは限定される。4)動学モデルが嗜好変化に対して動的不変であれば、観測可能な保存則を得ることができる。ただし、ln型の効用関数を用いた場合、最適利潤を関数の形で明示的に表現できない。5)建設規模が小さく完全競争が成立している場合には場合には世帯の嗜好の変化に応じてデベロッパーは超過利潤を得ることができる。6)建設費用に規模の効果が存在する場合には、デベロッパーの利潤は長期的に増加する。しかしながら、デベロッパーの行動分析からは、住宅の立地条件に対する嗜好変化 ξ_1 のタイプと基本モデルの付け値関数の形π(A) を特定化できない。著者らは、世帯の立地行動のLie 群論による比較静学分析により、動的不変な付け値関数と嗜好変化の関連関係を分析できることを明らかにしている[9)]。さらに、現在、住宅立地だけでなく他の活動主体の立地行動や交通行動に関する理論的研究を実施するとともに、無限小変換の実証的な推計方法に関する研究に着手した。特に、後者はLie 群を用いた実用的な都市モデルを開発していくうえで重要な基礎研究であると考える。なお本研究の遂行にあたってÅ.Andersson教授(Umeå 大学),A.Wierzbicki教授(Warsaw 工科大学), W.Weidlich教授(Stuttgart大学) との議論を通じて多くの示唆を得ることができた。ここに感謝の意を表します。

参考文献

1)Kobayashi,K.,Zhang,W.B.,and.Yoshikawa,K.:Taste changes and conservation law in the housing market,Proc. of European Institute of Advanced Regional Science, Sweden, 1986.

2)例えば、Wilson,A.G.: Catastrophe Theory and Bifurcation,Application to Urban and Regional Systems. Coom Helm,London ,1981.

3)Fujita,M.:Urban spatial dynamics: a review, Sistemi Urbani,3,pp.411-475,1983.

4)Diamond,B.D and Tolly, G.S.:The Economics of Urban Amenities , Academic Press, 1982.

5)Sato,R.:Theory of Technical Change and Economic Invariance — Application of Lie Groups, Academic Press, 1981.

6)Ikeda,M.et al.:On the concept of symmetry in Pontryagin's maximum principle,SIAM, Jour.. of Control,Vol.13,pp.389-399,1975.

7)Kobayashi,K.,Zhang,W.B., and Yoshikawa,K.: Behaviors of Developers and Conservation Laws in the Housing Market, Kyoto Univ.RR.No.86-PT-02,1986.

8)Noether,E.:Invariant variation problems,Transport Theory and Statistical Physics, Vol.1,No.3. 1918.

9)Kobayashi,K,Zhang,W.B.,and Yoshikawa,K.: New Comparative Static Approach to Households's Taste Change by Lie Group Theory, CERUM,WP.,Umeå Universitet, Sweden, 1986 .