【土木計画学研究・論文集 No. 2 1985年1月 招待論文】

交通均衡モデル：理論と計算法*

Travel Choice Equilibrium Models : Theory and Algorithms

宮 城 俊 彦**

By Toshihiko MIYAGI

1. 序　論

交通配分法は，交通施設計画や交通管理運用計画を行うにあたり必要欠くべからざる技法であり，交通需要予測において重要な一分野を構成してきた．交通配分という用語を用いるとき，それは，一般には固定された地域間の交通需要量をある配分原則に従って地域間の利用可能径路に割り当てることを指す．このことは，計画者が利用目的に応じて配分原則を随意選択することができることを意味し，また，交通需要は交通サービスに無関係であることを暗に仮定することになる．

一方，本研究で対象とする交通均衡モデルは，概念的には次のような点で従来の交通配分と異なっている．まず第一に，交通均衡モデルでは計画者が交通量を割り当てるというのではなく，利用者の交通行動の結果，必然的に生じる交通パターンを求めようとする．したがって，利用者の交通行動分析が均衡理論の1つの柱になる．第2は，交通需要は交通サービス水準に応じて変化することを前提にしている点である．そして，その結果生じる異なる地域，交通機関そして径路相互間の競合が，果たして秩序ある安定した交通パターンを創出し得るのかという命題こそは均衡理論の中心課題といえる．

本研究の主要な目的は，交通均衡モデルの理論的背景とその計算法について，従来の研究成果を体系的に整理することであるが，いくつかの新しい考え方についても提示している．本研究での検討項目を整理すると以下のようである．

① 利用者の交通行動と交通均衡の関係を明確にする．

② 従来の数理最適化モデルとしての均衡モデルと近年提案された変分等式モデルの関係を明らかにする．

③ 均衡解の計算法および均衡解の存在条件，一意性について示す．

④ 利用者行動仮説から直接，均衡モデルを誘導する方法を提示する．

⑤ 需要関数がロジット公式で与えられるときの均衡問題が不動点問題として定式化できることを示し，均衡解の特性を明らかにし，均衡解を求めるための不動点近似法を提案する．

本論の構成は以下のようである．

まず，2節では交通均衡の定義とその数理モデルの関係について触れる．交通均衡の中心となる概念

* キーワード：交通均衡，不動点問題

** 正会員　工博　岐阜大学講師　工学部建設工学科
（〒501-11／岐阜県岐阜市柳戸1-1）

は *Wardrop* によって提案された均衡原理である. Wardrop 均衡は *Beckmann* によって等価な数理最適化問題に置き換えられることが明らかにされたが，しかし，利用する関数の条件によっては凸計画問題としては構成し得ない場合がある．このため *Smith* は変分不等式問題として交通均衡が定義できるような利用者行動の条件を設定し，Wardrop 均衡を定義しなおしている．２節では，*Smith* の考え方を基本に利用者行動仮説と交通均衡の定義との関係を議論する．さらに，交通均衡を表現する数理最適化モデルと非最適化モデルとしての変分不等式モデルを紹介し，解の一意性，均衡解の計算法について既存研究を概要する．なお，Wardrop 均衡の計算法にはこの節で触れられる研究以外にも多くの研究成果がある．これらの研究を含めて整理した均衡モデル体系を，最適化モデルを中心に系譜図として追補している（**付録－1**）.

２節で示される均衡モデルは，交通均衡の定義より展開されたモデルである．しかし，本来，交通均衡が存在するかどうかは，利用者の効用最大化行動と結びつけられて展開されるべきであると考える．３節では，利用者のランダム効用最大化行動を基礎として交通均衡モデルを定式化している．モデルの定式化において重要となる１つの概念は，利用者の知覚する交通費用（私的交通費用）であり，各々の利用者は自己の知覚する交通費用を情報に最適化行動を行う．しかし，個々の利用者は時間価値や趣好等が異なるため，すべての利用者が客観的にみて費用最小となる経路を選択するとは限らない．３節で提示されるモデルはこのような情況を反映しうるモデルで，Wardrop 均衡と非 Wardrop 均衡とを統一的に説明するモデルである．

最後の節は交通均衡を不動点問題として把え，均衡解を不動点近似計算法で求めるときに生じる問題点とその解決法について考察したものである．問題の性格をより明確にするため，この節では交通モード均衡問題を取り上げ，同一径路に自動車とバスが混在し，互いに影響しあう状況を設定している．このとき，均衡問題は，従来の最適化モデルの枠組では定式化できない．しかし，均衡点は存在し，不動点反復を利用するアプローチが有効であることが示される．なお，不動点問題と変分不等式問題は深く関係しているが，本研究では両者の関係に立ち入った分析は行っていない．

2. 交通均衡の定義と均衡モデル

(1) 用語と表記法

ノード集合 N，有効リンク集合 L で定義される交通ネットワークを $G(N, L)$ とおく．ノード集合のうちトリップの起終点となるノード対を OD 対と呼び，OD 対の集合を Z とする．ある OD 対 $k \in Z$ に存在する径路の集合を利用可能径路集合 P_k と呼び，P_k で実際に利用される径路の集合を有効径路集合 E_k と呼ぶ．明らかに $E_k \subseteq P_k$ である．

ところで，OD 対 k の交通需要を X^k とするとき，X^k は次の需要関数で与えられる．

$$X^k = D^k(\boldsymbol{\lambda}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1)$$

$\boldsymbol{\lambda}$ は，OD 対間の交通費用 λ^k のベクトルである．式(2.1)で $\boldsymbol{\lambda}$ の代わりに λ^k とする場合を特に独立需要関数と呼び，式(2.1)の競合需要関数と区別する．特に断わらない限り式(2.1)を需要関数とする．OD 対 k の r 番目径路（$r \in P_k$）を利用する交通量を x_r^k，また，リンク $a \in L$ を利用する交通量を f_a で表わし，各々径路交通量（径路フロー），リンク交通量（リンクフロー）と呼ぶ．このとき，これらの交通量間には次に示す基本関係式が成立する．

【フローの成立条件】

$$\sum_{r \in P_k} x_r^k = X^k$$

（OD 交通保存式）$\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2.2)

$$\sum_{k \in Z} \sum_{r \in P_k} \delta_{ar}^k x_r^k = f_a$$

（リンクフロー条件）$\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2.3)

$x_r^k \geq 0$

（フローの非負条件）…………… (2.4)

ここに，

$$\delta_{ar}^k = \begin{cases} 1 & \text{：経路 } r \text{ 上にリンク } a \text{ が存在するとき} \\ 0 & \text{：そうでないとき} \end{cases}$$

式(2.2)，(2.4)を満足するフローベクトル$\boldsymbol{x}$を実行可能ベクトルと呼ぶ．式(2.1)においてX^kの上限$\bar{X}^k$が存在するならば，$\boldsymbol{x}$の領域χは，

$$\chi = \{\boldsymbol{x} \mid 0 \leq \boldsymbol{x} \leq \bar{\boldsymbol{X}}\} \quad \cdots\cdots \quad (2.5)$$

で与えられる．

さて，リンクaの通過に際し，利用者によって支払われる総費用C_aは，次式の総費用関数で与えられるものとする．

$$C_a = C_a(\boldsymbol{f}) \quad \cdots\cdots \quad (2.6)$$

このとき，リンクaの平均費用c_aは次式で定義される．

$$c_a = c_a(\boldsymbol{f}) = C_a(\boldsymbol{f}) / f_a \quad \cdots\cdots \quad (2.7)$$

同様に，OD対kの径路rの平均費用c_r^kは，

$$c_r^k = c_r^k(\boldsymbol{f}) = \sum_{a \in L} \delta_{ar}^k \, c_a(\boldsymbol{f}) \quad \cdots\cdots \quad (2.8)$$

で与えられる．リンク総費用関数が当該リンクのフローのみの関数であると仮定できるとき，これを$C_a(f_a)$と表わす．このときのリンク平均費用関数，径路平均費用関数もこれに準じた表記法を用いるものと約束する．

(2) 交通均衡の定義

交通均衡の基本概念は，次に示す*Wardrop*[1]の配分原理に基づく．

(a) Wardropの配分原理

> 利用されている径路の費用は等しく，利用されてない径路のそれよりも小さいかせいぜい等しい
> …………………… (I)

*Wardrop*の配分原理の数学的表現は次のようである．

$$\lambda^k - c_r^k(f_a) \begin{cases} = 0 & \text{if} \quad x_r^k > 0 \\ \geq 0 & \text{if} \quad x_r^k = 0 \end{cases} \quad \cdots \quad (2.9)$$

ここに，λ^kはOD対kの交通費用に対応するが，交通需要関数とは無関係に定義される定数である．

ところで，利用者のどのような行動が(I)あるいは式(2.9)の交通パターンをもたらすのであろうか．この点に関し，*Beckmann*[2]は利用者が最小費用径路を選択するという前提のもとで(2.9)が誘導できることを示した．ただし，*Beckmann*の定義した交通均衡は独立需要関数の存在を仮定した上でのものであり，次のように表現される．

$$\lambda^k(X^k) - c_r^k(f_a) \begin{cases} = 0 & \text{if} \quad x_r^k > 0 \\ \leq 0 & \text{if} \quad x_r^k = 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots \quad (2.10)$$

$\lambda^k(\cdot)$はD^kの逆関数であり，逆需要関数と呼ぶ．

一方，*Smith*[3]は次に示す利用者行動仮説に基づき交通均衡を定義している．

(b) 利用者行動仮説

> 利用者が今日選択した径路を翌日変更するならば，彼は，彼の選択径路よりも，今日，費用の安かった径路を翌日選択する．…………… (II)

したがって，すべての利用者が翌日も同じ径路を選択するならば，言いかえれば，径路を変更するものが誰もいなければ，それはNashの意味での均衡状態を表わしている[4]．この理由により，*Smith*は*Wardrop*の配分原理を均衡概念をより強調した次の表現で定義しなおしている．

(c) Wardrop均衡

> どの利用者もより安い費用の径路を見い出せないような交通パターンをWardrop均衡と呼ぶ．
> …………………… (III)

(III)の数学的表現は次のようである．すなわち，Wardrop均衡パターンを$\hat{\boldsymbol{x}}$とし，$\hat{\boldsymbol{x}}$により生ずるリンクフロー・パターンを$\hat{\boldsymbol{f}}$とおくならば，すべての

$k \in Z$において，

$$c_r^k(\hat{\boldsymbol{f}}) > c_s^k(\hat{\boldsymbol{f}}) \text{ ならば } \hat{x}_r^k = 0$$
$$r, s \in P_k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.11)$$

が成立する．

ところで，今日の交通パターンが均衡状態にないならば，利用者の径路変更によって，ネットワーク全体の総私的交通費用（今日の径路費用で評価された総交通費用）は減少するであろう．したがって，(Ⅱ)は次のような均衡原理を生み出す．

【Smith均衡】

今日の総交通費用よりも今日の径路費用で評価した翌日の総交通費用（総私的交通費用）が減少するように利用者は翌日径路を選択する．もし，総私的交通費用が減少しないのであれば，今日の交通パターンは交通均衡状態にある．…．(Ⅳ)

この定義は数学的には変分不等式条件式として表現でき，均衡問題を数理最適化問題として定式化する必要がなく解くことができる．また，(Ⅳ)と(Ⅲ)は等価であり[3]，さらに，(Ⅳ)と(Ⅰ)と等価になる[5),6)]．

複数モードの均衡条件について，*Dafermos* は利用者最適化パターンの定義より次式に示す均衡条件が導けることを示している[5]．

$$\lambda^{km}(\boldsymbol{X}) - c_r^{km}(\boldsymbol{f}) \begin{cases} = 0 & \text{if } x_r^{km} > 0 \\ \leq 0 & \text{if } x_r^{km} = 0 \end{cases}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots (2.12)$$

ここに，$\lambda^{km}(\cdot)$はOD対kの交通モード$m \in M_k$（M_kはOD対kの利用可能モード集合）の逆需要関数である．式(2.12)が式(2.9)，(2.10)と異なる点は，複数モードへの拡張のみならず，$\lambda^{km}(\cdot)$，$c_a(\cdot)$が交通需要，リンク交通量のベクトルに対して定義されている点にある．

(3) 交通均衡モデル

Wardrop の配分原理は，1956年に*Beckmann*によって数理最適化問題という新しい衣装をまとわせられ登場してきた．すなわち，*Beckmann*は式(2.10)を満足する均衡解を求めることは，次に示す数理最適化問題を解くことと等価であることを示したのである．

(a) Beckmann均衡モデル：BEM

目的関数：$F_B(\boldsymbol{x}) \to$最小化

$$F_B(\boldsymbol{x}) = \sum_{a \in L} \int_0^{f_a} c_a(f)\, df_a$$
$$- \sum_{k \in Z} \int_0^{X^k} \lambda(X)\, dX^k \quad \cdots\cdots (2.13)$$

制約条件：式(2.4)

目的関数のf_a, X^kはおのおの(2.3)，(2.2)で定義されるので，F_Bは$\boldsymbol{x}$の関数になることに注意する．

Beckmann はF_Bのもつ行動論的含意には触れてない．しかし，F_Bの第2項は交通に対する総支払い意思額を表わし，また，第1項は次節でみるように利用者の総私的交通費用を表わしているので，F_Bは利用者の交通に伴う便益の尺度を与えていると解釈できる．BEモデルの最適解が満足すべき Kuhn-Tucker条件は，式(2.10)で与えられ，したがって，BEモデルの最適解はWardrop均衡に一致する．また，F_Bが$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{f})$に関し厳密な凸関数ならば，すなわち，$F_B$のヘッセ行列が次式の条件を満足する正値行列ならば均衡解$(\hat{\boldsymbol{X}}, \hat{\boldsymbol{f}})$は一意的である．

$$\sum_{a \in L} \dot{c}_a\, y_a^2 - \sum_{k \in Z} \dot{\lambda}^k\, Y_k^2 > 0 \quad \cdots\cdots (2.14)$$

ここに，$\dot{c}_a$，$\dot{\lambda}^k$はおのおの$c_a(\cdot)$，$\lambda^k(\cdot)$の導関数であり，y_a, Y_kはおのおのf_a, X^kに対応した実数値変数を表わす．一般に，$\dot{\lambda}^k \leq 0$となるので，リンク費用関数が厳密な増加関数であるならば，均衡解は常に一意的に定まる．このとき，BEモデルは非線形凸計画問題となり，勾配法や Newton-Raphson法あるいはDFP法などを利用して解くことができる．ただ，これらの手法は制約条件無しの最適化手法であるので，BEモデルの非負制約条件を満足するようアルゴリズムを若干修正する必要がある[7]．大規模ネットワーク上での均衡解の計算にはFrank-Wolfeの分解原理を応用した均衡アルゴ

リズム（FW法と呼ぶことにする）が有効である．FW法は簡単にいえばAll - or - nothing 法と直線探索を組み合わせた反復解法である．すなわち，各反復時点で得られる最短経路とそれまでに有効経路と判断された経路相互間でWardrop 原理が成立するよう，直接探索法によってOD交通を連続的に分配する方法である．ただし，FW法をBEモデルに適用するためには，式(2.2)のOD交通条件をBEモデルの制約条件として導入し，かつ，式(2.2)の右辺が需要関数によって与えるものとしてBEモデルを修正する必要がある[8]．

ところで，OD間の交通需要が固定している場合には，F_B の第２項は定数値に置き換えられるであろう．したがって，この場合の交通均衡モデルは次のように定式化できる[9]．

(b)　需要固定型均衡モデル

目的関数：$F_J(x)$ →最小化

$$F_J(x) = \sum_{a \in L} \int_0^{f_a} c_a(f)\, df_a \quad \cdots (2.15)$$

制約条件：(2.2)，(2.4)

この問題に対応するKuhn - Tucker 条件が式(2.9)に一致することは容易に示すことができる．この問題に対しても多くの効率的な計算法が提案されているが[10),11),12),13),14]，1970年代でほぼ出つくした感がある．

ところで，Beckmann型の最適化均衡モデルは以下の仮定の下に構築されていることに注意が必要である．

① 単一モードの交通ネットワークである．

② OD間の交通需要は独立需要関数で表され，そのOD間の最小交通費用に依存して変化する．

③ リンク交通費用はそのリンクの交通量のみの関数である．

これらの仮定を幾分緩めた最適化モデルがいくつか提案されているが[15),16),17),18]，しかし，凸計画問題として均衡モデルを定式化するには需要関数，リンク費用関数にある程度制約を加える必要が生じる．なぜならば，(2.13)が成立するためには，積分可能な需要関数，リンク費用関数を仮定しなければならないからである．このため，近年の研究は，前節で述べた均衡条件をそのまま定式化する非最適化モデルへと進展してきた．変分不等式モデル[3),5),19),20]あるいは相補性条件式モデル[21),22]がそうである．

(c)　変分不等式（Variational Inequality：VI）モデル

Smith は，前節で述べた均衡条件の数学的表現が次式に示す変分不等式条件になることを示している[3]．

$$\boldsymbol{c}(\hat{\boldsymbol{f}})(\boldsymbol{f} - \hat{\boldsymbol{f}}) \geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.16)$$

また，*Dafermos* は(2.12)の均衡条件が(2.16)の一般形である次の変分不等式条件で表現できることを示した[5]．

$$\boldsymbol{c}(\hat{\boldsymbol{f}})(\boldsymbol{f} - \hat{\boldsymbol{f}}) - \boldsymbol{\lambda}(\bar{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X} - \bar{\boldsymbol{X}}) \geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.17)$$

したがって，均衡解は，(2.16)あるいは(2.17)を満足する $\hat{\boldsymbol{f}}$ あるいは $[\hat{\boldsymbol{X}}, \hat{\boldsymbol{f}}]$ を求めることになり，最適化問題を解く必要はない．均衡解の存在は，*Brouwer* の不動点定理によって保証される[3),5]．

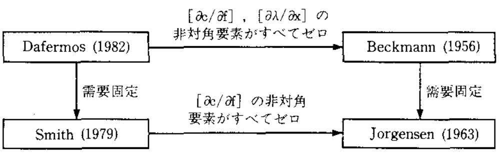
$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{\lambda}$ が強い単調性を持つならば，すなわち，

$$(\boldsymbol{c}(\hat{\boldsymbol{f}}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{f}))(\boldsymbol{f} - \hat{\boldsymbol{f}}) \geqq k_1 |\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f}|^2$$
$$(\boldsymbol{\lambda}(\hat{\boldsymbol{X}}) - \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{X}))(\boldsymbol{X} - \hat{\boldsymbol{X}}) \geqq k_2 |\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}|^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.18)$$

あるいは，ヤコビ行列 $[\partial \boldsymbol{c} / \partial \boldsymbol{f}]$，$-[\partial \boldsymbol{\lambda} / \partial \boldsymbol{X}]$ が正値行列ならば，均衡解 $[\hat{\boldsymbol{X}}, \hat{\boldsymbol{f}}]$ は一意的である．これらの結果はBeckmannモデルの解の一意性の条件を一般化したものとなっている．事実，$[\partial \boldsymbol{c} / \partial \boldsymbol{f}]$，$[\partial \boldsymbol{\lambda} / \partial \boldsymbol{X}]$ が対称行列ならば，(2.17)は(2.19)の目的関数の最小化問題の最適条件に一致する（**付録－2**）．

$$F_D(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{f}) = \int_0^{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{c}(\boldsymbol{f})\, d\boldsymbol{f} - \int_0^{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{X})\, d\boldsymbol{X} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.19)$$

さらに，$[\partial \boldsymbol{c} / \partial \boldsymbol{f}]$，$[\partial \boldsymbol{\lambda} / \partial \boldsymbol{X}]$ の非対角項がすべて0ならば，(2.19)はBeckmannモデルに一



図－1　交通均衡の基本モデルの相互関係

致する．

したがって，*Smith* と *Dafermas* の変分不等式条件および *Beckmann*，*Jorgensen* の最適化モデルの関係は，**図－1** のように表わすことができる．

(2.16) の解法は *Fisk* と *Nguyen*[23]，*Smith*[24] によって，また，(2.17) については *Dafermos*[5] によって研究が進められている．

3．交通行動仮説からの均衡モデルの定式化

前節では交通均衡の定義に基づき誘導された等価な数理モデルについて説明した．この節では，交通均衡を定式化するのではなく，利用者の交通行動を直接的に数理表現することを考える．利用者の行動は，一般に利益最大化行動であるため対応するモデルも最適化モデルとなる．そして，最適化の結果が交通均衡を表現することになる．なお，この節で扱うモデルでは，地域間交通需要は固定されているものと仮定する．

(1)　最小費用径路選択行動の定式化

今，任意の数のトリップを考える．i 番目トリップが利用する径路を r_i とおき，リンク・径路接続関係を次式で定義する．

$$\delta_{a,r_i}=\begin{cases}1：トリップ\,i\,の利用径路\,r_i\,上にリンク\,a\,が存在するとき\\0：そうでないとき\end{cases}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3.1)$$

ところで，i 番目トリップがリンク a の利用に際し知覚するリンク a の交通費用（私的交通費用）は，$(i-1)$ 番目までのトリップ・パターン $(r_1, r_2, \cdots, r_{i-1})$ によって生じる交通費用 $c_a(r_1, r_2, \cdots, r_{i-1})$ と仮定する．このとき，i 番目トリップの私的径路費用 c^i は，

$$c^i=\sum_{a\in L}\delta_{a,r_i}\,c_a(r_1, r_2, \cdots, r_{i-1})\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3.2)$$

で与えられる．i 番目トリップは (3.2) を最小にするよう径路を選択するであろう．

式 (3.2) の最小化は，次のような交通行動を反映している．ある日，交通網が完成したと仮定し，一日一日トリップが増加していく状況を考える．このとき，i 日目にトリップを行う者が知覚する径路費用は，前日のトリップパターンでの交通費用である．この利用者行動仮説は *Smith* の定義 (II) と本質的には同じである．

さて，任意のトリップパターンのもとでのリンク交通費用は，

$$c_a(r_0, r_1, \cdots, r_l)=c_a\Big(\sum_{k=0}^{l}\delta_{a,r_k}\Big)\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3.3)$$

ただし，$\delta_{a,r_0}=0$

で表わされるので，結局，(3.2) は次式となる．

$$c^i=\sum_{a\in L}\delta_{a,r_i}\,c_a\Big(\sum_{k=0}^{i-1}\delta_{a,r_k}\Big)\ \cdots\cdots\ (3.4)$$

すべてのトリップがこのように行動するならば，トリップ数が X のとき，フロパターン $\boldsymbol{\delta}=[\delta_{a,r_i}]$ は次式の累積費用を最小化するように定まるであろう．

$$C=\sum_{i=1}^{X}c^i=\sum_{a\in L}\Big\{\sum_{i=1}^{X}\delta_{a,r_i}\,c_a\Big(\sum_{k=0}^{i-1}\delta_{a,r_k}\Big)\Big\}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3.5)$$

ところで，

$$\sum_{i=1}^{X}\delta_{a,r_i}\,c_a\Big(\sum_{k=0}^{i-1}\delta_{a,r_k}\Big)=\sum_{s=0}^{f_a-1}c_a(s)\cdot 1$$

とおけるので，トリップを離散変数として扱う場合の累積費用関数は (3.6) で与えられる．

$$C=\sum_{a\in L}\sum_{s=0}^{f_a-1}c_a(s)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3.6)$$

また，トリップを連続変数とし看なし得るならば，

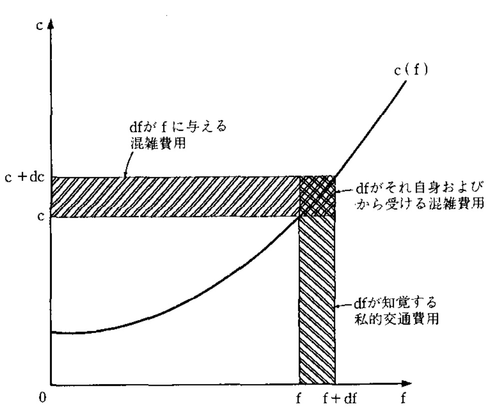
(3.6)は次のように置き換えられる.

$$C=\sum_{a\in L}\int_0^{f_a-1}c_a(f)\,df\fallingdotseq\sum_{a\in L}\int_0^{f_a}c_a(f)\,df \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(3.7)$$

したがって，利用者の私的交通費用最小化に基づく交通パターンは，フローの成立条件のもとで(3.7)を最小化するように定まる．このことは，均衡解がWardrop均衡に至ることを意味する.

ここで，再度，私的交通費用の概念に触れておく必要があろう．**図－2**に示すように，リンクaの今日の利用者数がfであると仮定する．このとき，翌日，新規にこのリンクに加わるものがdfだけいるとするならば，これらの追加的な利用者が知覚する費用は，$c(f)$であり，したがって，これらのトリップが知覚する総費用は$c(f)\cdot df$である．このとき，dfが知覚する$c(f)$を私的交通費用あるいは主観的交通費用と定義する．なぜならば，客観的にみれば，dfの追加利用者があることによって，既存の利用者に$(f\cdot dc+1/2\,dc\cdot df)$だけの追加費用を与え，$df$の実際の交通費用も$c(f+df)$となるからである．すなわち，$c(f+df)$は通常の意味での平均交通費用であり，客観的交通費用を与える．このとき，通常の意味での総費用は$c(f+df)(f+df)$となる.

リンク利用者がf_aのとき，私的費用概念に基づく平均費用は，平均費用の定義式(3.7)より，



図－2　私的交通費用と社会的交通費用

$$\bar{c}_a(f_a)=\frac{1}{f_a}\int_0^{f_a}c_a(f)\,df \quad\cdots\cdots\cdots\quad(3.8)$$

で与えられる．このとき追加利用者が既存利用者に与える社会的費用をも考慮した客観的費用は，$c_a(f_a)+\dot{c}_a f_a$であるから，式(3.8)によって定義される平均費用は，

$$\bar{c}_a=c_a(f_a)\cdot f_a/f_a=c_a$$

となり，通常の意味での平均費用に一致する.

(2)　ランダム効用モデルに基づく均衡モデル

これまでに対象とした交通均衡モデルは，すべての利用者が最小費用径路を選択するという，いわば決定論的均衡モデルであった．しかし，実際の交通行動は，個々の利用者の時間価値や趣好等の違いによって，すべての利用者が客観的にみて最小費用径路となる径路を選択しているとは言い難い．このような考え方を反映したモデルは従来確率配分モデルと呼ばれ，*Dial*の方法[25]が代表的なものである．しかし，Dial法は交通費用が利用者数によらず一定としている点で問題がある．ここでは，決定論モデルおよびDial法の問題点を解決するためのアプローチを示す.

今，OD対kでの径路選択に伴う効用が次に示す加法的ランダム効用によって記述できると仮定する.

$$\tilde{U}_j^k=V_j^k+\tilde{\varepsilon}_j^k,\ k\in Z,\ j\in P_k \quad\cdots\cdots\quad(3.9)$$

$\tilde{U}_j^k$：OD対kで径路jを選択する1トリップの効用

V_j^k：OD対kで径路jを選択する1トリップの測定できる効用

$\tilde{\varepsilon}_j^k$：誤差項

式(3.9)において記号「～」はその変数が確率変数であることを表わす．また，以降においては，測定できる効用V_j^kは，利用者の知覚する交通費用(私的平均費用)$\bar{c}_j^k$に負符号を付けたもので表わすことができると仮定する．すなわち，$V_j^k=-\bar{c}_j^k$である.

さて，誤差項は，次式に示す極値分布関数に従い，同一で独立に分布すると仮定する．

$$G(\varepsilon) = \exp\{-\exp[-\alpha(\varepsilon+\beta)]\} \quad \cdots\cdots (3.10)$$

ここに，βはモードを表わし，αは次式に示すように分散に関係するパラメーターである．

$$\alpha = (\pi^2/6\sigma^2)^{1/2} \quad \cdots\cdots (3.11)$$

このとき，径路選択に伴う最大効用の期待値S^kは次式で与えられる[26]．

$$S^k(\bar{c}) = -\frac{1}{\alpha}\ln\sum_{j\in E_k}\exp(-\alpha\bar{c}_j^k) \quad \cdots\cdots (3.12)$$

S^kを満足度関数と呼ぶことにし，個々のトリップの満足度は加法的であると仮定すると，ネットワーク全体でのトリップの効用Sは，

$$S = \sum_{k\in Z} X^k S^k(\bar{\boldsymbol{c}}) \quad \cdots\cdots (3.13)$$

で与えられる．したがって，共役性理論によって，(3.13)は，次に示すように最適化問題の解として与えられる[27]．

$$S(\boldsymbol{c}) = \min_{\boldsymbol{x}} \frac{1}{\alpha}\sum_{k\in Z}\sum_{r\in E_k}(x_r^k \ln x_r^k + x_r^k\bar{c}_r^k) \quad \text{s.t.} \sum_{r\in E_k} x_r^k = X^k \quad \cdots\cdots (3.14)$$

(3.14)の第2項は，$\sum_{a\in L} f_a\bar{c}_a$によって置き換えることができ，また，利用者が常にトリップの効用を最大化しようとするときの私的平均費用は(3.8)で与えられるので，(3.14)は客観的な平均費用を用いて次のように書き改められる．

$$S(\bar{\boldsymbol{c}}) = \min_{\boldsymbol{x}} \frac{1}{\alpha}\sum_{k\in Z}\sum_{r\in E_k} x_r^k \ln x_r^k + \sum_{a\in L}\int_0^{f_a} c_a(f)\,df \quad \cdots\cdots (3.15)$$

$$\text{s.t.} \sum_{r\in E_k} x_r^k = X^k, \quad x_r^k \geqq 0 \quad \cdots\cdots (3.16)$$

このモデルは，結果的には*Fisk*の均衡確率配分モデル[28]に一致する．

さて，(3.15)においてαが大きくなると第2項が支配的になり，(3.15)はWardrop均衡モデルに一致する．このことは，(3.11)より明らかなように，個々のトリップの径路選択に伴う効用のバラツキが小さくなり，利用者がすべて一様な評価基準に従って行動することを意味する．逆に，利用者の評価基準のバラツキが大きくなり，αが小さくなると，第1項が支配的になり交通費用に関係なく径路を選択する傾向が強くなる．

この最適化モデルに対してもＦＷ法が適用でき，Dial法を反復適用することによって均衡解を得ることができる．ただし，直線探索は行えず一定のステップ幅を用いる必要があるが解の収束性は理論的に証明されている[29]．また，αの増加に伴い均衡解がWardrop均衡に近づくことも実証的に確かめられている[30]．

ところで，(3.15)で与えられる利用者行動に対応した均衡条件は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} x_r^k &= \frac{X^k\exp(-\alpha c_r^k)}{\sum_{r\in E_k}\exp(-\alpha c_r^k)} \\ c_r^k &= \sum_{a\in L}\delta_{ar}^k c_a(f_a) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (3.17)$$

f_aはx_r^kに応じて定まるので，(3.17)は次のようにも表現できる．

$$\boldsymbol{x} = D(\boldsymbol{x}) \quad \cdots\cdots (3.18)$$

ここに，Dは(3.17)の第一式右辺に対応している．(3.18)はよく知られた不動点公式であり，Dを反復関数とする不動点反復法によって求めることができる．不動点反復法については次節でその基本的考え方に触れるが，この場合にもαが大きくなれば，Wardrop均衡解に近づくことが実証的に示されている[31]．

4．不動点問題としての交通均衡

この節では，Beckmann型の最適化モデルとして

定式化できないような２モード交通均衡を対象に，不動点反復法の有効性を示す．また，この場合，交通費用関数の厳密な単調性も成立せず，変分不等式モデルの解の一意性条件も成立しない．なお，ここでの議論は前節で示した均衡条件式（3.17）を満足するフローパターンを求めるのにも適用できることを付記しておく．

(1)　２モード交通均衡問題の定式化

不動点反復法の本質を明確にするため，ここでは *Florian* による２モード交通均衡問題[32]をさらに単純化したケースを想定する．すなわち，単一のリンクで結ばれる２都市間の交通均衡問題であり，以下のようにモデル化する．

$$x_1 = D_1(c_1,\ c_2) = \frac{X}{1+\exp[-\alpha(c_2-c_1)]} \quad \cdots\cdots \quad (4.1)$$

$$x_2 = D_2(c_1,\ c_2) = X - x_1 \quad \cdots\cdots \quad (4.2)$$

$$c_1 = c_1(x_1,\ x_2),\quad c_2 = c_2(x_1,\ x_2) \quad \cdots\cdots \quad (4.3)$$

ここに，

X：都市間交通需要量で一定値とおく．

D_1, D_2：自動車，バスの需要関数でロジット公式で表わせると仮定．

c_1, c_2：自動車，バスの交通費用．

なお，（4.1）の需要関数は本来，交通費用以外の要因をも含むが，ここでの議論では何ら本質的な意味を持たないので省略している．

さて，自動車の交通費用は自動車利用者数と運行バス車両数の関数によって表わされるが，バス運行台数はバス利用者数に関係なく一定値とおく．また，バス利用者の交通費用は自動車交通費用の関数であると仮定する．したがって，c_1, c_2はともにx_1のみの関数となる．すなわち，求めるべき変数は自動車利用者数のみである．したがって，以降では$x_1 = x$とおく．このとき，（4.1）～（4.3）は次のようになる．

$$x = D(c_1(x),\ c_2(x)) = \frac{X}{1+\exp[-\alpha(c_2(x)-c_1(x))]} \quad \cdots\cdots \quad (4.4)$$

（4.4）はより簡潔に$x = D(x)$と表現でき，次式の不動点反復法によって均衡解$\hat{x}$が求まると期待できる．

$$x^{n+1} = D(x^n) \quad (n：反復回数) \cdots\cdots (4.5)$$

ところで，交通費用関数のヤコビ行列Jは，

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial c_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial c_1(x)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial c_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial c_1(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial c_1(x)}{\partial x_1} & 0 \\ \dfrac{\partial c_2(x)}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}$$

となり非対称行列となるため，この問題をBeckmann 型の最適化問題として定式化することはできない．また，変分不等式問題の解が一意的に定まるための条件を満足しない．

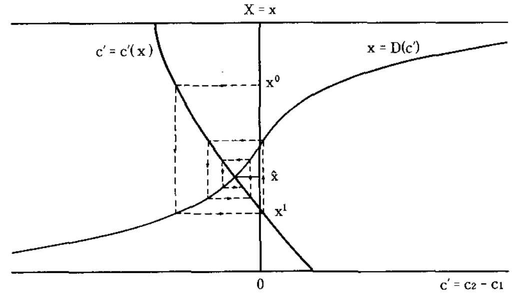
(2)　均衡解の存在

（4.4）に均衡解，すなわち，不動点が存在するかどうかをまず確認する必要がある．不動点$\hat{x}$が存在するための条件は次のようである[33]．

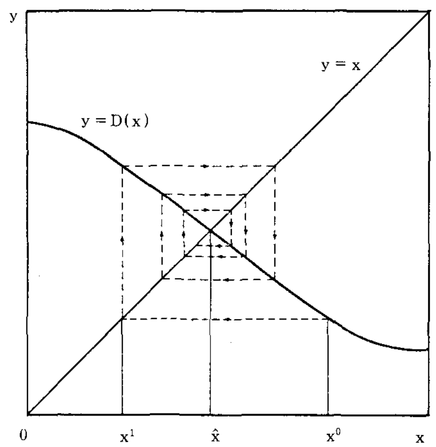
条件１：区間$\chi[0, X]$のすべての$x \in \chi$に対し，Dが定義でき，かつ，$D(x) \in \chi$となる．すなわち，Dはχをそれ自身の中に写像する関数である．

条件２：$D(x)$はχ上で連続である．

（4.4）で与えられる反復関数が条件1,2を満足す



図－３　交通均衡プロセス（収束する例）



図－4　交通モード均衡の不動点

るのは明らかである．すなわち，$c_2(x)-c_1(x)=c'(x)$ とおくと，$c'(x)$ は χ 上で連続な関数であり，$D(x)$ も χ 上で連続関数となる．また，$D(x)$ は，$x\in\chi$ に対し $c'(x)$ を介して $x\in\chi$ なる値を写像する．したがって，$D(x)$ は不動点 $\hat{x}=D(\hat{x})$ を持つ．

この状況を図示したのが，**図－3**である．すなわち，横軸に費用差をとり，縦軸に自動車利用者をとるとき，需要曲線は右上がりの曲線となる．また，交通費用より求められる費用差曲線 c' が図のように右下がり曲線ならば，図に示される探索糸に従って不動点 $\hat{x}$ が求められる．この状況をよく知られた不動点原理図（仮にこの呼称を使う）で表現しなおしたものが**図－4**である．

(3)　解の収束条件と一意性

図－3は解が収束する例を示したが，(4.5) で与えられる反復が常に収束するとは限らない．たとえば，**図－5**に示す状況では解は振動する．このような例は α が大きい値を持つ場合に見られるもので，α が大きくなるに従い需要曲線の傾きは急峻になる．反復法が収束するかどうかは，$D(x)$ と $c'(x)$ の勾配に依存しているように思われる．すなわち，不動点の近傍において，$c'(x)$ の勾配の絶対値が $D(c')$ の勾配の絶対値の逆数よりも大きすぎると収束が期待できない．すなわち，収束の条件は，

$$\left|\frac{dc'(x)}{dx}\right| < \left|\frac{dD}{dc'}\right|^{-1}$$

となる．この条件は次のように書き表わすことができる．

$$\left|\frac{dD(c'(x))}{dx}\right| < 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.6)$$

(4.6) は図より直観的に導かれたものであるが，しかし，(4.6) の条件は不動点が逐次近似できるための一般的条件の一変数の例であることを示すことができる．複数径路，複数ODの場合，フローの定義域 χ はノルム空間の部分集合を構成する．このとき，写像 $T:\chi\rightarrow\chi$ が次の条件を満足するとき，T を縮少写像と呼ぶ[34]．

すべての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in\chi$ に対し，

$$\| T(\boldsymbol{x})-T(\boldsymbol{y})\| \leq \alpha \,\| \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.7)$$

を満たす α, $0\leq\alpha<1$ が存在する．

T が微分可能であり，χ が凸集合ならば，

$$\| T'(\boldsymbol{x})\| < 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.8)$$

は (4.7) を満足し，T は縮少写像であることが示されている[34]．すなわち，(4.6) は $D(x)$ が縮少写像であることを表わす．このとき，縮少写像定理によって $\hat{x}=D(\hat{x})$ を満たす唯一の変数が存在し，また，$\hat{x}$ は任意の $x^0\in\chi$ から出発して反復法 (4.5) によって求められることが分る．2モード均衡の例に対しては，(4.6) は次のようになる．

$$\left|\frac{dc_2}{dx}-\frac{dc_1}{dx}\right| < \left|\frac{1}{\alpha q(1-q)}\right| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.9)$$

ここに，q は自動車が選択される確率である．(4.9) より，$D(x)$ を反復回数とする方法が収束するためには，α が大きくなればなる程，両モードの交通費用勾配差の絶対値が小さくなければならず，収束が保証される交通費用関数の設定条件が厳しくなる．逆に，α が小さければ収束条件は緩やかになる．

ところで，(4.6) の収束条件が一般に成立しているかどうかの確認は現実には非常に難しい．また，$D(x)$ を反復関数とする方法では，**図 - 5** に示すように不動点は存在しても解が求められない場合もある．これらの問題点を解決する方法として，(4.5) の反復法と $D(x)$ の逆関数を反復関数とする方法を併用するアプローチが考えられる．

すなわち，**図 - 5** に示される矢印の方向で解の収束が期待できないのであれば，探索糸を逆にたどれば均衡解へ至ることは明らかである．このことは，仮定された x に対応する交通費用差を $c'=D^{-1}(x)$ として求め，費用差関数 $c'(x)=c'$ を用いて，$x=[c'(c')]^{-1}$ として新たな x を求めることを意味する．したがって，反復関数は次式で与えられる．

$$c_2(x^n)=c_1(x^n)+\frac{1}{\alpha}\ \ln\left(\frac{x^n}{X-x^n}\right)$$

$$x^{n+1}=c_2^{-1}\ (c_2(x^n)) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.10)$$

(4.10) を利用する反復計算法の基本的考え方は *Florian*[32] によって提案されたものであり，複数の OD ネットワークへの適用も可能である．

(4.5)，(4.10) を併用する方法は，まず，α の大きさから判断して (4.5) の反復法が妥当だと思われる場合 (α の値が比較的小さな値をとる場合)，(4.5) を利用し，その結果解が収束しないならば，その時点で (4.10) に切り換え反復を継続する方法である．この方法は，*Florian* の 2 モード均衡問題を拡張した問題に適用され，収束することが実証的に確認されている[31]．

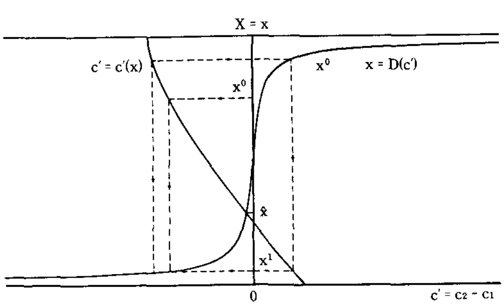


図 - 5　交通均衡プロセス (振動する例)

5. 結　論

本研究の目的は，大きく分類すると次の 3 つの点について考察することであった．第 1 は，交通均衡の定義に基づき誘導される既存の交通均衡モデルについて，均衡解の特性とその計算法を概要すること，第 2 は，既存のアプローチとは異なり，利用者行動から直接交通均衡モデルを誘導する方法を提示すること，第 3 は，不動点問題と交通均衡の関係を明らかにし，不動点反復法による均衡計算法の提案とその特性を示すこと，である．

これらの諸点の考察の結果を理論面，計算手法の面から結論づけると次のようになろう．

交通均衡モデルへの従来のアプローチは，交通均衡を定義し，それを等価な数理モデルへ変換するという方向にあった．しかし，理論的に正当なアプローチは，個々人の効用最大化行動の定式化を基礎におくものでなければならないだろう．各個人が，交通に伴う価値を追及することによって変動すると思われる交通パターンが，究極的には釣合いのとれた秩序ある状態に落ちつき，結果としては各個人の目論見とは違ったものになりうるという思想こそが交通均衡の重要な概念である．本研究では交通研究の分野で広く認められているランダム効用最大化原理に基づく交通均衡モデルの考え方を概要したが，提示した均衡モデルは Wardrop 均衡および非 Wardrop 均衡を包含するものであり，従来のモデルに較べ一般性を持つ．本研究では，地域間交通需要が固定されている場合を扱ったが，変動需要を場合を含むモデルへの拡張は容易に行える．ただ，この場合の定式化はロジットモデルを前提にしたものであり，その意味では一般性に欠ける．要約すれば，交通均衡理論の今後の課題は，利用者の交通行動の一般的定式化に基づく均衡概念の精緻化といえよう．

均衡解の計算法についていえば，従来の方法は凸計画問題を解くための数理最適化手法の適用が主流であった．しかし，この方向での計算法の開発は，ほぼ完成の域にあり，マイナーな変化はあっても体

制はそう変化しないように思われる．現在の中心的課題は，変分不等式問題，不動点問題としての交通均衡問題の計算法にある．不動点問題についていえば，より一般的な方法である単体分割による計算法は，計算時間がかかりすぎるという難点を持つ．それに対し，本研究で示した方法は，交通均衡の均衡条件の特性を有効に活用したものであり，従来，交通研究の分野で開発された手法を利用できる点で馴染みやすい．ただ，ロジット公式を前提にしている点で一般性に欠け，また，選択の対象となる路線をどのように限定するかという問題を含む．後者の問題解決のためには，径路列挙を必要としないDial法を有効に利用することが考えられる．不動点反復法は計算効率も高く，変分不等式問題では解が一意的に定まらない場合でも有効であり，今後の発展が望まれる．

参　考　文　献

1） J.G. Wardrop：Some theoritical aspetss of road traffic research, Proc. Inst. Civil Engineers, Part Ⅱ， 1, pp.325～378, 1952.

2） Beckmann, M.J., McGuire, C.B. and C.B. Winsten：Studies in the Economics of Transportation, Yale University Press, New Haven,Conn, 1956.

3） M.J. Smith：The existence, uniqueness and stabity of traffic equiliblia, Trsns. Res., Vol.13B, pp. 295～304, 1979.

4） P.A. Steenbrink：Optimization in Transport Networks, Wiley, London, 1974.

5） S.C. Dafermos：The general multimodal network equilibrium problem with elastic damand, Networks, Vol.12, pp.57～72, 1982.

6） 宮城俊彦・加藤　晃：発生・分布・配分統合モデルとその実用性について，交通工学，Vol.20, No.1, 1958年.

7） 宮城俊彦：交通ネットワーク均衡の理論と計算法，京都大学学位論文，1982年.

8） 加藤　晃・宮城俊彦・吉田俊和：交通分布・配分統合モデルとその実用性に関する研究，交通工学，Vol. 17, No.6, pp.3～11, 1982年.

9） N.O. Jorgensen：Some aspects of the urban traffic assignment problem, ITTE Graduate Rept., University of Calfornia, Berkeley, 1963年.

10） 日本オペレーションズ・リサーチ学会：新手法による高速道路交通量の推計，報文シリーズ・T-73-2. 1973年.

11） Leventhal. T.L., Nemhauser, G.L. and L.E. Trotter：A column generation algorithm for optimal traffic assinment, Trans. Sci., Vol.7, pp.168～176, 1973.

12） S. Nguyen：A unified approach to equilibrium methods for traffic assignment, in Traffic Equilibrium Methods（M. Florian, ed.），Montreal, 1974.

13） LeBlank, L., Morlock, E. and W. Pierskalla：An efficient approach to solving the road network equilibrium traffic assignment problem, Trans. Res., Vol.9, pp.309～318,1975.

14） 井上博司：勾配射影法による交通量配分法の岡山市道路網への適用，第2回土木計画学研究発表会講演集，pp.166～172, 1980年.

15） S.C. Dafermos：An extended assignment model with application to two way traffic, Trans. Sci., Vol.5, pp.366～389, 1971.

16） S.C. Dafermos：The traffic assignment problem for multiclass-user transportation networks, Trans. Sci., Vol.6, pp.73～87, 1972.

17） Abdulaal, M. and L.J. LeBlank：Methods for computing modal split and traffic assignment models. Trans. Sci., Vol.13, No.4, 1979.

18） Florian, M. and H.Spiess：On binary mode choice assignment models, Trans. Sci., Vol.17, pp.32～47, 1983.

19） S.C. Dafermos：Traffic equilibrium and variational inequalis, Trans. Sci., Vol.14, pp.42～54, 1980.

20） Fisk, C. and D. Boyce：Altenative variational inequality formulations of the network equilibrium travel choice problem, Trans. Sci., Vol.17, No.4, pp.454～463, 1983.

21） Aashtiani, H. and T. Magnanti：Equilibria on a congested transportation networks, Siam Journal on Algebra and Discrete Methods, Vol.2, pp.213～226, 1981.

22） R.L. Asmuth：Traffic Network Equilibrium, Tech. Rept. SOL-78-2, Stanford University, Stanford, CA. 1978.

23） Fisk, C. and S. Nguyen：Solution algorithms for network equilibrium models with asymmetic user costs, Trans. Sci., Vol.16, No.3, pp.361～381, 1982.

24）M.J. Smith：An algorithm for solving asymmetric equilibrium problems with a continuous cost-flow function, Trans. Res., Vol.17B, No.5, pp.365～371, 1983.

25）R. Dial：A probabilistic multipath traffic assignment model which obviates path enumeration, Trans. Res., Vol.5, pp.83～111, 1971.

26）HCWL. Williams：On the formuration of travel demand models and economic evaluation measures of user benefit, Environment and Planning A9, pp. 285～344. 1977.

27）宮城俊彦・加藤　晃：ランダム効用理論を基礎とした交通統合モデル，土木計画学研究・論文集，No. 1, pp.99～106, 1984年.

28）C. Fisk：Some developments in equilibrium traffic assignment, Trans. Res., Vol.14B, pp.243～255, 1980.

29）Powell, W. B. and Y. Sheffi：The convergence of equilibrium algorithms with predetermined step sizes, Trans. Sci., Vol.16, No.1, pp.45～55, 1982.

30）宮城俊彦・小川俊幸：共役性理論を基礎とした交通配分モデルについて，土木計画学研究・講演集，No. 7, 1985年.

31）宮城俊彦・大野栄治：交通機関分担を考慮したネットワーク均衡問題，土木計画学研究・講演集，No. 7, 1985年.

32）M. Florian：A traffic equilibrium model of travel by car and public transit models, Trans. Sci., Vol.8, pp.166～179, 1977.

33）二階堂副包：現代経済学の数学的方法，岩波書店，1960年.

34）D.C. Luenberger：Optimization by Vector Space Methods, John Wiley & Sons, New York, 1969.

35）佐佐木綱：道路網における交通量の配分方法，日本地域学会年報，第2号，pp.19～34, 1963年.

36）飯田恭敬：パスフローを用いた等時間原則による交通量配分，土木学会論文報告集，No.168, pp.45～57, 1969年.

37）飯田恭敬・井上博司・魚住隆影：カット法による交通量配分，土木学会論文報告集，No.196, pp.95～103, 1971年.

38）佐佐木綱・井上博司：等時間原則による交通量配分の繰り返し計算法，土木学会論文報告集，No.215, pp.43～47, 1973年.

39）S.C. Dafermos：Traffic Assignment and Resorce Allocation in Transportation Networks, Ph. D. Thesis, John Hopkins University, 1968.

40）Bruynooghe, M., Gibert, A. and M. Sakarovitch：Une Methode d'Affectation du Trafic, in Forth Symposium on Theory of Traffic Flow, Karlsruhe, 1968.

41）Dafermos, S.C. and F.T. Sparrow：The traffic assignment problem for a general network, Nat. Bur. Stand. 37B, pp.91～118, 1969.

42）M. Netter：Equilibrium and marginal cost pricing on a road network with several flow types, Traffic Flow and Transportation, pp.155～181,（G.F. Newell, ed.）, American Elsevier, New York,1971.

43）Wilkie, D.F. and R.G. Stefanek：Precise determination of equilibrium in travel forecasting problem using numerical optimization techniques, HRR 369, pp.239～252, 1971.

44）Florian, M. and S. Nguyen：A method for computing network equilibrium with elastic demands, Trans. Sci., Vol.8, pp.321～332, 1974.

45）S.P. Evans：Some models for combining the trip distribution and traffic assignment stages in the transport planning process, in Traffic Equiliblium Methods（M.Florian, ed.）, Montreal, Canada, 1974.

46）Florian, M. and S. Nguyen：A combined trip distribution, modal split and traffic assignment model, Trans. Res., Vol.12, No.4, pp.241～246, 1978.

47）Leblank, L.J. and M. Abdulaal：Combined mode split-assignment and distribution-modal split-assisignment models with multiple groups of travelers, Trans. Sci., Vol.16, No.4, pp.430～442, 1982.

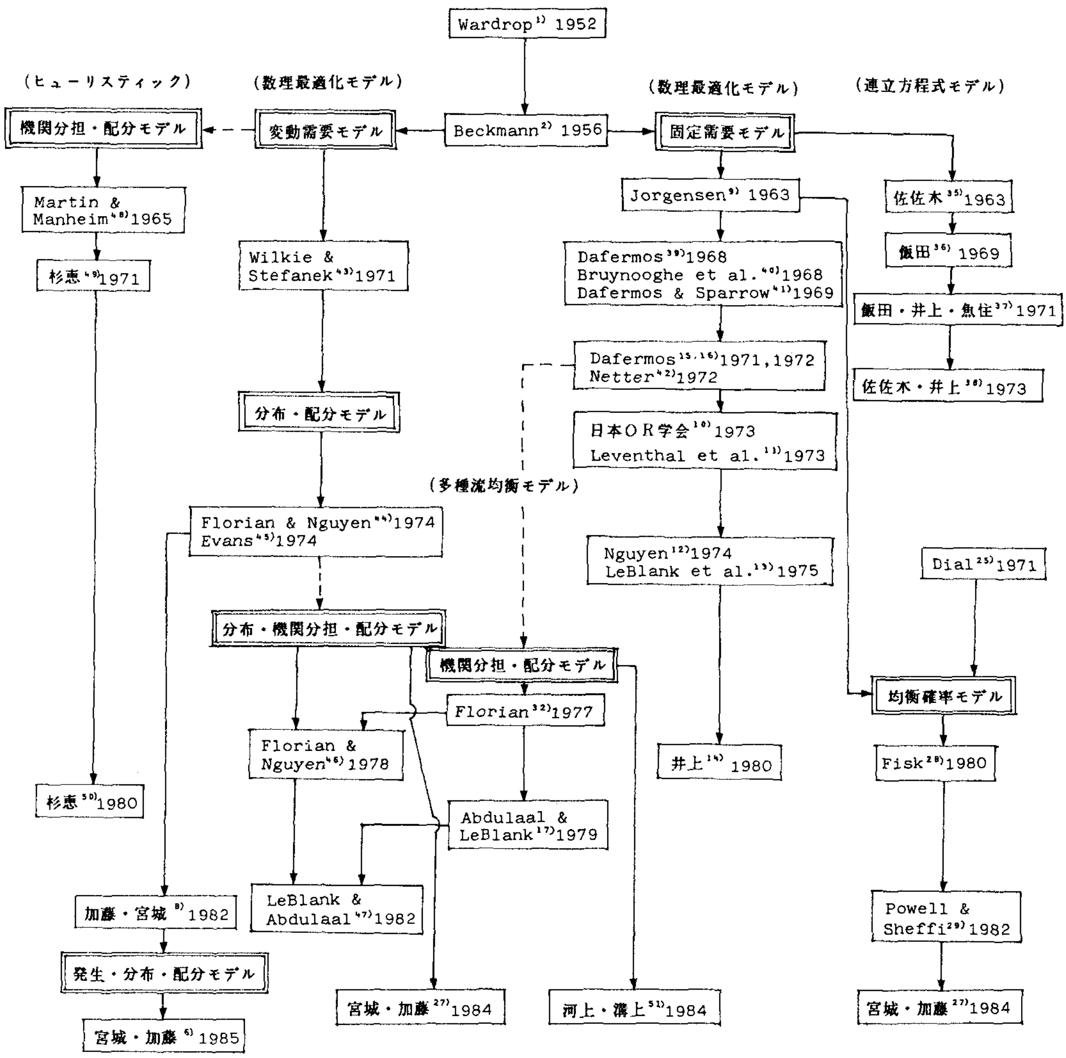
48）Martin, B.V. and M.L. Manheim：A research program for comparision of traffic assignment techniques, HRR 88, pp.69～84, 1965.

49）杉恵頼寧：増加配分法の実用化に関する研究，土木学会論文報告集，No.204, pp.83～93. 1971年.

50）杉恵頼寧：短期交通政策の効果測定モデルとその適用例，IATSS Review, Vol.6, No.4, pp.18～27, 1980年.

51）河上省吾・溝上章志：分担・配分を統合した交通需要予測モデルとそれを用いた最適バス輸送計画法，土木計画学研究・講演集，No.6, pp.247～253, 1984年.

【付録－１】 Wardrop均衡モデル系



注：① 最適化モデルを中心に，整理したものである．
② サフィックスは参考文献番号を表す．

【付録－2】 交通均衡における最適化モデルと変分不等式条件の関係

交通均衡を最適化問題として取り扱うための数学的に最も自然なアプローチは，交通均衡問題をシステム最適化問題（需要固定では，総交通費用最小化問題，需要の変動を認める場合には利用者余剰最大化問題となる）からの派生問題として定式化する方法である．ここでは，需要固定型の交通均衡についての定式化を示すが，需要変動型の場合にも同様に適用できる．

【総交通費用最小化問題】

目的関数：$F(\boldsymbol{f})$ →最小化

$$F(\boldsymbol{f}) = \sum_{a\in L} C_a(\boldsymbol{f}) \quad \cdots\cdots(1)$$

制約条件：(2.2)，(2.4)

リンク・フローは(2.3)で与えられる．

このとき，均衡フロー（$\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{f}}$）が満足すべき条件は次式で与えられる．

$$\varphi_r^k(\boldsymbol{f})\begin{cases} = \lambda^k & \text{if} \quad \hat{x}_r^k > 0 \\ \geq \lambda^k & \text{if} \quad \hat{x}_r^k = 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots(2)$$

ここに，φ_r^kはOD対kの経路rの限界交通費用であり，次式で与えられる．

$$\varphi_r^k(\boldsymbol{f}) = \frac{\partial F(\boldsymbol{f})}{\partial x_r^k} = \sum_{a\in L}\frac{\partial F(\boldsymbol{f})}{\partial f_a}\frac{\partial f_a}{\partial x_r^k}$$

$$= \sum_{a\in L}\delta_{ar}\frac{\partial F(\boldsymbol{f})}{\partial f_a} \quad \cdots\cdots(3)$$

Wardrop均衡は，式(2)において限界交通費用φ_r^kを平均交通費用c_r^kに置き換えたものに他ならない．式(3)より，

$$\varphi_r^k(\boldsymbol{f}) = \sum_{a\in L}\delta_{ar}^k\frac{\partial F(\boldsymbol{f})}{\partial f_a}$$

であるから，

$$\frac{\partial F^*(\boldsymbol{f})}{\partial f_a} = c_a(\boldsymbol{f}) \quad \cdots\cdots(4)$$

を満足する$F^*(\boldsymbol{f})$が存在するならば，$F^*(\boldsymbol{f})$の最小化はWardrop均衡を与える．

ところで，F^*の全微分は

$$dF^*(\boldsymbol{f}) = \sum_{a\in L}\frac{\partial F^*(\boldsymbol{f})}{\partial f_a}df_a \quad \cdots\cdots(5)$$

で与えられるので，

$$dF^*(\boldsymbol{f}) = \sum_{a\in L}c_a(\boldsymbol{f})\,df_a \quad \cdots\cdots(6)$$

と書き表わされるための必要十分条件は，次式に示す*Hotelling*の条件が成立することである．

$$\frac{\partial c_j(\boldsymbol{f})}{\partial f_i} = \frac{\partial c_i(\boldsymbol{f})}{\partial f_j} \quad \cdots\cdots(7)$$

すなわち，費用関数のヤコビ行列が対称行列ならば，F^*は積分経路に依存せず，次式によって一意的に定められる．

$$F^*(\boldsymbol{f}) = \int_0^{\boldsymbol{f}}\sum_{a\in L}c_a(\boldsymbol{f})\,df_a \quad \cdots\cdots(8)$$

式(8)の最適解が一意的に求められるためには，F^*のヘッセ行列，すなわち，$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{f})$のヤコビ行列が正定符号行列になることである．

もし，式(7)の可積分条件が成立しないならば，F^*は積分経路に応じて値を変えるため，交通均衡問題を最適化問題として定式化することは不適当である．

さて，目的関数が式(8)で与えるものとしたときの，最適解の満たすべき条件について考えてみよう．

今，リンクフロー集合をWとおくと，均衡解$\hat{\boldsymbol{f}}$は次式を満足する．

$$F^*(\hat{\boldsymbol{f}}) = \min_{\boldsymbol{f}\in W} F^*(\boldsymbol{f}) \quad \cdots\cdots(9)$$

Wは凸集合なので，

$(1-t)\hat{\boldsymbol{f}} + t\boldsymbol{f} = \hat{\boldsymbol{f}} + t(\boldsymbol{f}-\hat{\boldsymbol{f}})$，　$0 \leq t \leq 1$

もまたW上に存在する．

このとき，

$$\Phi(t) = F^*(\hat{\boldsymbol{f}} + t(\boldsymbol{f}-\hat{\boldsymbol{f}}))，\quad 0 \leq t \leq 1 \quad \cdots\cdots(10)$$

とおくと，$\Phi(t)$は$t=0$で最適解を与えるので，

$$\Phi(0) \leq \Phi(t) \quad \cdots\cdots(11)$$

が成立する．式(10)を$0 < t \leq 1$で考え，次のように変形する．

$$\frac{\Phi(t)-\Phi(0)}{t} \geq 0,\quad 0 < t \leq 1 \quad \cdots\cdots(12)$$

(10)の$t=0$における微係数は，

$$\Phi(0) = \sum_{a \in L} \frac{\partial F^*(\hat{\boldsymbol{f}})}{\partial f_a}(f_a - \hat{f}_a) \quad \cdots\cdots(13)$$

となるので，式(12)において，$t \to 0$とすることにより，

$$\boldsymbol{c}(\hat{\boldsymbol{f}})(\boldsymbol{f}-\hat{\boldsymbol{f}}) \geq 0 \quad \cdots\cdots(14)$$

を得る．

式(14)を満足する$\hat{\boldsymbol{f}}$が一意的に定まるための条件は，次のように誘導できる．

いま，$\hat{\boldsymbol{f}}_1$，$\hat{\boldsymbol{f}}_2$ ($\hat{\boldsymbol{f}}_1 \neq \hat{\boldsymbol{f}}_2$) はともに式(14)を満足する解であると仮定しよう．すなわち，

$$\boldsymbol{c}(\hat{\boldsymbol{f}}_1)(\boldsymbol{f}-\hat{\boldsymbol{f}}_1) \geq 0$$
$$\boldsymbol{c}(\hat{\boldsymbol{f}}_2)(\boldsymbol{f}-\hat{\boldsymbol{f}}_2) \geq 0$$

第1式，第2式において，$\boldsymbol{f}$をおのおの$\boldsymbol{f}=\hat{\boldsymbol{f}}_2$，$\boldsymbol{f}=\hat{\boldsymbol{f}}_1$とおき，両式の差をとることにより，

$$(\boldsymbol{c}(\hat{\boldsymbol{f}}_1)-\boldsymbol{c}(\hat{\boldsymbol{f}}_2))(\hat{\boldsymbol{f}}_1-\hat{\boldsymbol{f}}_2) \leq 0$$

を得る．したがって，均衡解が一意的に求められるための条件は，上式から自然に導かれ，次式を得る．

$$(\boldsymbol{c}(\hat{\boldsymbol{f}}_1)-\boldsymbol{c}(\hat{\boldsymbol{f}}_2))(\hat{\boldsymbol{f}}_1-\hat{\boldsymbol{f}}_2) > 0 \quad \cdots\cdots(15)$$

すなわち，$\boldsymbol{c}$のヤコビ行列が正定符号行列になることと，式(15)は等価である．

（昭和58年度土木学会論文奨励賞受賞）