ランダム効用理論を基礎とした交通統合モデル

A Formulation of the Combined Travel Demand Models based the Random Utility Theory

宮城俊彦 *　加藤　晃 **

1. はじめに

交通需要関数は、個人の交通に係わる選択を個人の社会経済的特性および交通システム特性との関係で記述するものであり、それらの特性の変化が交通選択にどのような変化を及ぼすのかを予測するのに利用される。個人の交通に係わる選択とは、「どこからどこへ」、「どの交通手段で」、「どの径路を利用して」交通するかであり、伝統的な交通需要予測法では、これらの選択プロセスを交通発生、交通分布、交通機関分担そして交通配分という4つの逐次的なモデルで分析してきた。このとき、モデルは個人の交通選択行動ではなく、類似な特性をもつ集団の交通行動を記述し、しかも、その類似性は交通ゾーンを基本とするという意味で、伝統的交通需要モデルは個人あるいは集団の交通行動を予測する上で大きな予測誤差を伴なうことが指適されてきた。その上、個人の交通行動を説明する統一的な理論枠組をもたなかったため、交通選択の各段階に対応した交通モデルは、各々に独立に、異なる理論的背景の下で構築されており、全体として整合性のある交通需要モデルを構成しているとは云えない。

伝統的な四段階推定モデルのもつ欠点を解消すべく提案されてきたのが、いわゆる非集計交通行動モデルとよばれる個人の交通選択行動を記述したモデルである。これはランダム効用理論を基礎とし、現在のところ、個人の交通選択行動を記述するモデルとしては最も説明力の高いものである。ただ、交通ネットワークにおける径路選択の基本原理であるWardrop 均衡を内包するまでには至っていない。

ところで、従来の交通需要予測法がもつ各モデル間の文脈の不整合性という欠点を解消するために考えられてきたのが交通統合モデルである。交通統合モデルにはエントロピーモデルによるアプローチ[1,2]とベックマンモデルによるアプローチ[5]の両方があるがある条件下では両者は一致する。[4,5] エントロピータイプの交通統合モデルは実際の交通分析にかなり有効であると期待されるが、[4] 個人の行動理論に立脚してないとの批判がなされてきた。[3]

本研究の目的は、エントロピータイプの交通統合モデルがランダム効用理論を基礎として誘導しうること、いいかえれば、ランダム効用理論を基礎として誘導される期待最大効用関数とエントロピー最大化の目的関数の最適値関数は交通余剰という同一概念の異なる表現形式であり、それらの関数から誘導される交通選択公式は同一のものであることを明らかにすることである。類似の結論は著者によって以前から指適されていたが、[6]本研究ではその結果をさらに明確にしている。また、モデルのパラメータ推定問題としての非集計ロジットモデルとエントロピーモデルの等価性はAnasによって示されている。[7]

以上の考え方の応用として、分布・配分統合モデルが示され、また、Fisk の確率配分モデル[8]とDaganzo の確率配分モデル[9]は一見すると全く別物であるかのように見えるが、実は同一の意味をもつモデルであり両者は確率配分法とWardrop 均衡を内包したモデルであることが示される。

2. 確率選択の基礎公式と表記法

n次元確率変数ベクトルを $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n]$

+ 交通需要予測、非集計交通需要モデル、共役関数、エントロピー最大化

* Toshihiko MIYAGI、正会員　工博　岐阜大学講師　工学部建設工学科

** Akira KATOH、正会員　工博　岐阜大学教授　工学部建設工学科

と表わすとき、その確率分布関数は次式で示される。

$$F(\mathbf{x}) = \Pr[\ \tilde{\mathbf{x}} \le \mathbf{x}\ ] = \Pr[\ \tilde{x}_1 \le x_1,\ \tilde{x}_2 \le x_2, \cdots, \tilde{x}_n \le x_n\ ] \quad (1)$$

また、密度関数は、式(2)で与えられる。

$$\begin{aligned}&\Pr[\ \tilde{x}_1 \le x_1, \cdots, x_j < \tilde{x}_j \le x_j + dx_j, \cdots, \tilde{x}_n \le x_n\ ]\\ &= F(x_1, x_2, \cdots, x_j + dx_j, \cdots, x_n)\\ &\quad - F(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_n)\\ &= \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx_j \end{aligned} \quad (2)$$

$F_j(\mathbf{x}) = \partial F(\mathbf{x})/\partial x_j$ とおくと、

$$F_j(\mathbf{x}) dx_j = \Pr[\ x_j < \tilde{x}_j \le x_j + dx_j,\ \tilde{x}_k \le x_k,\ \forall k \ne j\ ] \quad (3)$$

ところで、極値の分布は

$$\Pr[\ \max_j \tilde{x}_j \le x\ ] = \Pr[\ \tilde{x}_1 \le x,\ \tilde{x}_2 \le x, \cdots, \tilde{x}_n \le x\ ] = F(x) \quad (4)$$

ここに、xはすべて同じ値をもつベクトルであるが、以降においては、スカラー量を表わす場合にも同じ表記法を用いる。

jを選択する確率は、選択肢集合$\mathbf{J} = [1, 2, \cdots, J]$の各々の選択肢の中で、$\tilde{x}_j$ が極値となる確率であると定義するならば、その確率は

$$\Pr[\ \tilde{x}_1 \le x, \cdots, x < \tilde{x}_j \le x + dx, \cdots, \tilde{x}_n \le x\ ] = \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} dx$$

であるから、

$$\Pr[\ \tilde{x}_j \ge \tilde{x}_k,\ \forall k\ ] = \int_{-\infty}^{\infty} F_j(x) dx \quad (5)$$

3. ランダム効用理論と多項ロジットモデル

3.1 加法的ランダム効用モデル

今、個人の選択肢 $j \in \mathbf{J}$ に対する効用を測定しうる効用 v_j とランダム効用 $\tilde{y}_j$ に分離可能なモデルを考える(以下の展開において個人を表わす記号を省略する)。すなわち、

$$\tilde{u}_j = v_j + \tilde{y}_j \quad (6)$$

このとき、$\tilde{\mathbf{u}} = [\ \tilde{u}_j\ ]$ の確率分布関数は、

$$\Pr[\ \tilde{\mathbf{u}} \le \mathbf{x}\ ] = \Pr[\ \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{y}} \le \mathbf{x}\ ] = \Pr[\ \tilde{\mathbf{y}} \le \mathbf{x} - \mathbf{v}\ ] = F(\mathbf{x} - \mathbf{v})$$

の極値分布は、式(4)より次式で与えられる。

$$\Pr[\ \max_j \tilde{u}_j \le x\ ] = F(x - \mathbf{v}) \quad (7)$$

その期待値は式(8)で与えられるが、本研究ではこの関数をDaganzoにならって満足度関数とよぶ。

$$S(\mathbf{v}) = E[\ \max_j \tilde{u}_j \le x\ ] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x - \mathbf{v}) \quad (8)$$

選択肢 $j \in \mathbf{J}$ の選択確率は、式(5)より

$$P_j = \Pr[\ \tilde{u}_j \ge \tilde{u}_k,\ \forall k\ ] = \int_{-\infty}^{\infty} F_j(x - \mathbf{v}) dx \quad (9)$$

ところで、 $S(\mathbf{v})$ はいくつかの興味ある性質をもつことが明らかにされている。[9,10,11,12] これらのうち、本研究に関連する部分だけを列挙すると以下のようである。

〔性質 1〕 (期待効用の一定増分に対する不変性)

$$S(\mathbf{v} + a) = S(\mathbf{v}) + a \quad (10)$$

〔性質 2〕 (選択確率との関係)

$$\frac{\partial S(\mathbf{v})}{\partial v_j} = P_j \quad (11)$$

〔性質 3〕 (凸性)

$S(\mathbf{v})$ は$\mathbf{v}$に関し凸関数である。

〔性質 4〕

$$E[\ \max_j \tilde{u}_j\ ] \ge \max E[\ \tilde{u}_j\ ] \quad (12)$$

3.2 ロジットモデル

今、ランダム効用$\tilde{y}$は、次式に示す分布関数に従う独立で同一に分布にする確率変量であると仮定する。

$$G(x) = \exp\{-e^{-\alpha(x + \frac{\beta}{\alpha})}\} \quad (13)$$

この分布は、ガンベル分布とよばれ、βは分布の原点を規定し、また、αは分散σ^2と関連し分布の形状を定めるパラメータである。すなわち、

$$\alpha = \{\pi^2/6\ \sigma^2\}^{1/2} \quad (14)$$

極値の分布は、独立性の仮定および式(7)より、

$$F(x - \mathbf{v}) = \exp\{-\exp[-\alpha x - \beta - \ln \omega(\mathbf{v})]\}$$

ここで、 $\omega(\mathbf{v}) = \Sigma_j \exp(\alpha v_j)$

このとき、満足度関数は式(8)より、

$$s(\mathbf{v}) = \frac{1}{\alpha}\ln\omega(\mathbf{v})+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}$$

ここに、γはオイラー定数である。

満足度関数の性質1、2より、定数項がゼロとなるようβを操作したとしても、選択確率の値を変えることはない。したがって、 $s(\mathbf{v})$ は次のように簡約化できる。

$$s(\mathbf{v}) = \frac{1}{\alpha}\ln\omega(\mathbf{v}) \tag{15}$$

$s(\mathbf{v})$が凸関数であることは容易に証明でき（付録A）、また、期待効用 v_j が個人や交通システムの属性ベクトル $\mathbf{z}_j$ およびパラメータベクトル $\theta = [\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n]$によって次のように表わされるとき、

$$v_j = \theta\,\mathbf{z}_j = \Sigma_i\,\theta_i z_{ij} \tag{16}$$

$s(\mathbf{v})$ は次のような性質をもつ。

〔性質　5〕

$$\frac{\partial s(\mathbf{v})}{\partial\theta_i} = \bar{z}_i,\ i=1,2,\cdots,K \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 s(\mathbf{v})}{\partial\theta_i^2} = \mathrm{var}\ (\mathbf{z}_i)\quad i=1,2,\cdots,K \tag{17'}$$

（証明）付録B

選択確率は〔性質2〕および式（15）を用いて容易に求められる。すなわち、

$$\frac{\partial s(\mathbf{v})}{\partial v_j} = P_j = \frac{\exp(\alpha v_j)}{\Sigma_j \exp(\alpha v_j)} \tag{18}$$

3．3　統合ロジットモデル

人の交通行動における選択問題、すなわち、起点目的地、モード（あるいは径路）選択を扱うための統合モデルについて考える。このため選択の次元を起点集合**I**、目的地集合**J**、モード（径路集合）**M**とし、選択肢集合を **I*J*M** と表記する。そして **I*J*M** からの選択の効用を次のように仮定する。

$$\tilde{u}_{ijm} = \tilde{u}_i + \tilde{u}_{j|i} + \tilde{u}_{m|ij} \tag{19}$$

$\tilde{u}_{ijm}$ = i j mからの組み合せ選択の効用

$\tilde{u}_i$ = j、mとは独立に i を選択する効用

$\tilde{u}_{j|i}$ = i が選択されたという条件のもとで、m とは独立に j を選択する効用

$\tilde{u}_{m|ij}$ = i と j が選択されたという条件のもとで m を選択する効用

分解された各々のランダム効用の期待値をそれぞれ $v_i, v_{j|i}, v_{m|ij}$ とするとき、選択確率および満足度関数は以下のように与えられる。[12]

$$P(m|ij) = \frac{\exp(\alpha_1 v_{m|ij})}{\Sigma_m \exp(\alpha_1 v_{m|ij})} \tag{20}$$

$$P(j|i) = \frac{\exp\{\alpha_2(v_{j|i}+s_{ij})\}}{\Sigma_j \exp\{\alpha_2(v_{j|i}+s_{ij})\}} \tag{21}$$

$$P(i) = \frac{\exp\{\alpha_3(v_i+s_i)\}}{\Sigma_i \exp\{\alpha_3(v_i+s_i)\}} \tag{22}$$

$$s_{ij} = \frac{1}{\alpha_1}\ln\ \Sigma_m \exp(\alpha_1 v_{m|ij}) \tag{23}$$

$$s_i = \frac{1}{\alpha_2}\ln\ \Sigma_j \exp\{\alpha_2(v_{j|i}+s_{ij})\} \tag{24}$$

$$s = \frac{1}{\alpha_3}\ln\ \Sigma_i \exp\{\alpha_3(v_i+s_i)\} \tag{25}$$

なお、参考文献（12）においては$\alpha_1=1$として誘導している。また、$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$ とおいた場合は結合ロジットモデル（Joint logit ）とよばれる。[13]

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$は式（14）と同様、各々の選択におけるランダム効用の分散に関係するパラメータで次のように書ける。

$$\alpha_1 = \{\pi^2/6\,\sigma_1^2\}^{1/2} \tag{26}$$

$$\alpha_2 = \pi/\sqrt{6}\,\{\sigma_2^2 + \pi^2/6\,\alpha_1^2\}^{-1/2} \tag{27}$$

$$\alpha_3 = \pi/\sqrt{6}\,\{\sigma_3^2 + \pi^2/6\,\alpha_2^2\}^{-1/2} \tag{28}$$

ここに、 $\sigma_1^2 = \mathrm{var}[\tilde{u}_{m|ij}]$、$\sigma_2^2 = \mathrm{var}[\tilde{u}_{j|i}]$、$\sigma_3^2 = \mathrm{var}[\tilde{u}_i]$

式（26）～式（28）より、

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \tag{29}$$

が成立する。

4. ロジットモデルとエントロピーモデルの等価性

4．1　共役関数の応用

前節および2節で導入された満足度関数の別の側面を考察するためその双対表現の研究を行なうことは選択行動理論の新しい展開に寄与すると思われる。共役関数の概念は、凸関数解析の双対表現において基礎的役割を演ずる。

まず、満足度関数 $S(\mathbf{v})$ のエピグラフ $[S,V]$ を次のように定義する。

$$< S,\mathbf{V} > = \{(z,\mathbf{v}): \mathbf{v}\in\mathbf{V},\ S(\mathbf{v})\le z\} \qquad (30)$$

このとき、凸集合 $\mathbf{V}$ 上で定義された満足度関数Sはその性質より閉真凸関数となる。ところで、$<S,\mathbf{V}>$ が閉凸集合のとき、その共役集合は

$$\mathbf{V}^* = [\ \mathbf{v}^*\varepsilon\mathbf{V}^*:\ \sup\{\mathbf{v}^*\mathbf{v}-S(\mathbf{v})<\infty\}\ ]$$

と定義され、sの共役関数 s^* は、$\mathbf{V}^*$ 上で

$$S^*(\mathbf{v}^*) = \sup_{\mathbf{V}}[\ \mathbf{v}^*\mathbf{v}-S(\mathbf{v})\ ] \qquad (31)$$

と定義される。[14,15] また、$<s^*,\mathbf{V}^*>$ を共役双対とよび $<s^*,\mathbf{V}^*>=D<s,\mathbf{V}>$ と表記する。[16]

Fenchel による次の定理は、ロジットモデルとエントロピーモデルの等価性を示すのに有用である。

〔定理〕[16]もし、$<s,\mathbf{V}>$ が閉じた凸集合ならばそのとき共役双対 $<s^*,\mathbf{V}^*>=D<s,\mathbf{V}>$ は $\mathbf{V}^*\ne\emptyset$ をもち、閉じた凸集合を構成する。さらに $D<s^*,\mathbf{V}^*>=<s,\mathbf{V}>$ が成立する。

ここで、式(8)で定義される満足度関数の共役関数を考えてみよう。

$$S^*(\mathbf{v}^*) = \sup_{\mathbf{V}}[\ \mathbf{v}^*\mathbf{v}-S(\mathbf{v})\ ]$$

このとき、共役変数 v_j^* は、次式で与えられる。

$$v_j^* = \frac{\partial}{\partial v_j}\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x-\mathbf{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,d\frac{\partial F}{\partial v_j}$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} xF_j(x-\mathbf{v}) \qquad (32)$$

部分積分を行なうことによって、

$$v_j^* = -[\ xF_j(x-\mathbf{v})\,\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} F_j(x-\mathbf{v})dx\ ]$$
$$= p_j(\mathbf{v}) + C \qquad (32')$$

また、$s(\mathbf{V}+a)$ を $\mathbf{V}$ のまわりでティラー展開しその一次項までをとると、〔性質1〕より

$$\Sigma_j \partial S(\mathbf{v})/\partial v_j = 1 \qquad (33)$$

よって、式(32')において $c=\emptyset$ であり、$\Sigma v_j^*=1$ が成立し、v_j^* は選択確率に対応していることが分る。

次に、式(15)で定義されるロジットモデルの満足度関数に対応した共役関数を求めてみよう。

$$S^*(\mathbf{v}^*) = \sup_{\mathbf{V}}\ [\mathbf{v}^*\mathbf{v} - \frac{1}{\alpha}\ln\omega(\mathbf{v})] \qquad (34)$$

であるから、v_j^* は v_j の極値解で表現でき、

$$v_j^* = p_j(\mathbf{v}) = \frac{\exp(\alpha v_j)}{\Sigma_j\exp(\alpha v_j)}$$

これより共役関数 $s^*(\mathbf{v}^*)=s^*(\mathbf{p})$ は、式(34)の最適値関数で表現されるので、次式のように表現でき、

$$S^*(\mathbf{p}) = \frac{1}{\alpha}\Sigma_j p_j \ln p_j \qquad (35)$$

$\Sigma p_j=1$ となる領域で定義される。

さらに、式(34)の共役関数を求めると、定理よりそれは満足度関数に一致することが分かり、また、次のように表現できる。

$$S(\mathbf{v}) = \max_{\mathbf{p}}\{\ \Sigma_j p_j p_j^* - \frac{1}{\alpha}\Sigma_j p_j \ln p_j:$$
$$\Sigma_j p_j = 1\ \} \qquad (36)$$

$p_j^*=v_j$ が成立することは容易に示すことができ、したがって、式(35)は次のように書き改められる。

$$S(\mathbf{v}) = \max_{\mathbf{p}}\{-\frac{1}{\alpha}\Sigma_j p_j \ln\frac{p_j}{q_j}:\ \Sigma_j p_j = 1\} \qquad (37)$$

ただし、 $q_j = \exp(\alpha v_j)$

上述の問題をエントロピー最大化問題とよびその解はラグランジェ未定乗数法を用いて次のように求められる。

$$L(\mathbf{p},\lambda) = \Sigma_j p_j v_j - \frac{1}{\alpha}\Sigma_j p_j \ln p_j + \lambda(1-\Sigma_j p_j)$$
$$\frac{\partial L}{\partial p_j} = v_j - \frac{1}{\alpha}(\ln p_j + 1) - \lambda = \emptyset$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \Sigma_j p_j = \emptyset$$

これより、

$$p_j = \exp(-1-\alpha\lambda)\exp(\alpha v_j)$$
$$\exp(-1-\alpha\lambda) = \Sigma_j\exp(\alpha v_j) \qquad (38)$$

式(38)から得られる p_j は式(19)と全く同じである。

4.2 共役関数の経済的意味

まず、満足度関数の共役関数のもつ意味から考察してみよう。再度、式(34)をとり上げ、$v_j^*=p_j$ ということを考慮して式を再掲すると、

$$s^*(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{p}}\{\ \Sigma_j p_j v_j - E[\ \max_j \tilde{u}_j\ ]\} \qquad (39)$$

$E[\tilde{u}_j]=v_j$ であることより、式(39)の右辺第1項はランダム効用 $\tilde{y}_j$ を全く考慮しない場合の選択

集合Jから得られる期待効用であり、第2項はランダム効用 $\tilde{y}_j$ を考慮して選択した場合に得られる総効用の最大値の期待値である。したがって、上式は負のランダム余剰の最大化問題を意味している。式(39)の右辺が常に非負であることは、満足度関数の性質4より明らかである。この問題に対応した最適値関数が式(35)であり、したがって、エントロピーに負符号をつけた値は負のランダム余剰を表わしている。また、〔性質4〕はランダム効用 $\tilde{y}_j$ の情報を得て効用最大化を行なう方が、ランダム効用がゼロという仮定のもとで効用最大化を行なうよりもより大きな効用を得ることを意味しており、したがって、情報の価値を表わしていると解釈できる。このことより、式(39)はこれら情報の価値の期待値に負符号をつけたものと解釈できる。

このように、 $\Sigma p_i \ln p_i$ を負のランダム余剰と考えると、式(37)で表わされる問題は総効用を表わすことになり、満足度関数がランダム余剰を考慮した総効用であるという始めの仮説とつじつまが合う。

上述の説明は、v_j を選択肢の測定しうる効用として定義したものであるが、これを余剰($v_j = a_j - c_j$: a_j, c_j はそれぞれ選択肢jの便益と費用)あるいは支払い費用($v_j = a - c_j$)として定義した場合には、式(39)は総効用に負符号をつけたものに等しく、その最適値関数である負のエントロピー(情報量)は負の総効用として定義される。逆に式(37)のエントロピー最大化問題は余剰最大化問題として定義され、その最適値関数である満足度関数はランダム余剰の最大値を意味することになる。このように、測定しうる効用 v_j をどのように定義するかによって満足度関数とその共役関数のもつ経済的意味は若干異なることになる。

4.3 統合ロジットモデルを基礎とした統合エントロピーモデルの定式化

ここで、4.1で誘導された統合ロジットモデルに対応したエントロピーモデルを満足度関数の共役関数を用いて定式化することを試みよう。

いま、トリップすること自体が個人の効用を形成する特殊の場合を除けば、モードmを選択することの効用 $v_{m|ij}$ は、所要費用の安さによって決るであろう。この場合、式(19)に対応したトリップの効用の期待値は、次式のような余剰モデルとなる。

$$v_{ijm} = v_i + v_{j|i} - c_{m|ij} \tag{40}$$

このとき、式(20)~(22)の選択確率は次のようになる。

モード(経路)選択確率:

$$p_{m|ij} = \frac{\exp(-\alpha_1 c_{m|ij})}{\Sigma_m \exp(-\alpha_1 c_{m|ij})} \tag{41}$$

目的地選択確率:

$$p_{j|i} = \frac{A_{j|i} \exp(-\alpha_2 c_{ij})}{\Sigma_j A_{j|i} \exp(-\alpha_2 c_{ij})} \tag{42}$$

ここに、$A_{j|i}$, c_{ij} は各々ゾーンjの魅力度、ゾーン ij 間の平均費用を表わし、次式で与えられる。

$$A_{j|i} = \exp(\alpha_2 v_{j|i})$$
$$c_{ij} = -s_{ij} = -\frac{1}{\alpha_1} \ln \Sigma_m \exp(-\alpha_1 c_{m|ij}) \tag{43}$$

発地選択確率:

$$p_i = \frac{A_i \exp(\alpha_3 s_i)}{\Sigma_i A_i \exp(\alpha_3 s_i)} \tag{44}$$

ここに、A_i はiゾーンの魅力度、s_i はiゾーンのアクセシビリティで各々次のように与えられる。

$$A_i = \exp(\alpha_3 v_i)$$
$$s_i = \ln \Sigma_j A_{j|i} \exp(-\alpha_2 c_{ij}) \tag{45}$$

このとき、トリップに伴なう満足度は、式(25)で与えられ、したがって、その共役関数は次の最大化問題の最適値関数として与えられる。

$$\max.\ \Sigma_i \Sigma_j \Sigma_m v_{ijm} v^*_{ijm} - \ln \Sigma_i (\alpha_3 v_i + \alpha_3 s_i)/\alpha_3 \tag{46}$$

このとき、v_{ijm} の共役変数 v^*_{ijm} は選択確率に対応しており、次式の関係が成立する。

$$v^*_{mij} = p_{m|ij}\, p_{j|i}\, p_i = p_{mji} \tag{47}$$

このとき、満足度関数sの共役関数 s^* は、次式となる(付録C)。

$$s^* = \frac{1}{\alpha_3}\Sigma_i p_i \ln p_i + \frac{1}{\alpha_2}\Sigma_i \Sigma_j p_{j|i} p_i \ln p_{j|i} + \frac{1}{\alpha_1}\Sigma_i \Sigma_j \Sigma_m p_{m|ij} p_{j|i} p_i \ln p_{m|ij} \tag{48}$$

共役関数の共役双対はもとの関数にもどることは、前に定理の形で示したが、式(48)に対応した共役双対は、次の最大化問題として与えられる。

$$S = \max.\ \Sigma_i\ \Sigma_j\ \Sigma_m p_{ijm}(\overset{*}{p}_i + \overset{*}{p}_{j|i} + \overset{*}{p}_{m|ij})$$
$$-\frac{1}{\alpha_3}\Sigma_i p_i \ln\ p_i - \frac{1}{\alpha_2}\Sigma_i\ \Sigma_j p_{j|i} p_i \ln\ p_{j|i}$$
$$-\frac{1}{\alpha_1}\Sigma_i\ \Sigma_j\ \Sigma_m p_{m|ij} p_{j|i} p_i \ln\ p_{m|ij}$$
$$\text{s.t. } \Sigma_m p_{m|ij} = 1,\ \Sigma_j p_{j|i} = 1,\ \Sigma_i p_i = 1 \tag{49}$$
$$\overset{*}{p}_i = v_i,\ \overset{*}{p}_{j|i} = v_{j|i},\ \overset{*}{p}_{m|ij} = -c_{m|ij}$$

が成立するので、上の問題は次のエントロピー最大化問題として書き改めることができる。

〔統合エントロピーモデル〕

$$\max.\ -\Sigma_i\Sigma_j\Sigma_m p_{ijm} c_{m|ij} - \frac{1}{\alpha_3}\Sigma_i p_i \ln\ (p_i/A_i)$$
$$-\frac{1}{\alpha_2}\Sigma_i\Sigma_j p_{j|i} p_i \ln\ (p_{j|i}/A_{j|i})$$
$$-\frac{1}{\alpha_1}\Sigma_i\Sigma_j\Sigma_m p_{m|ij} p_{j|i} p_i \ln\ p_{m|ij} \tag{50}$$

$$\text{s.t. } \Sigma_m p_{m|ij} = 1,\ \Sigma_j p_{j|i} = 1,\ \Sigma_i p_i = 1 \tag{51}$$

ここで、 $A_i = \exp(\alpha_3 v_i)$, $A_{j|i} = \exp(\alpha_2 v_{j|i})$ とおいている。 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ の場合には、1次元選択問題における式(15)と式(37)の関係を単に3次元選択問題に置き換えただけの問題となる。また、さらに、 $A_i = A_{j|i} = 1$ と簡略化すると、松井[(2)]のエントロピーモデルがえられる。

5. 需要・パフォーマンス均衡問題としての交通統合モデルの定式化

5.1 交通統合モデル

前節までの議論は、交通費用 $c_{m|ij}$ が与えられており、また、この値は変動しないものという仮定が暗に前提となっていた。しかし、混雑現象を含む交通システムでは、$c_{m|ij}$ はそのモードを利用する利用者数に応じて変化する。こうした、混雑費用も含む選択問題を需要・パフォーマンス均衡問題とよんでいる。[(5)]

混雑現象は本来が集計的現象である。そこで、本節ではT個のホモジニアスなトリップを考え、それらの満足度関数がすべて式(25)で記述できるような状況を考える。そのとき、系全体の満足度は Ts **(v)** で与えられ、式(50)、(51)に対応したエントロピーモデルは以下のようになる。

〔集計的統合エントロピーモデル〕

$$\max.\ -\frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_2\alpha_3}\Sigma_i T_i \ln T_i + \frac{1}{\alpha_3}\Sigma_i T_i \ln A_i$$
$$-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}\Sigma_i\Sigma_j T_{ij}\ln T_{ij} + \frac{1}{\alpha_2}\Sigma_i\Sigma_j T_{ij}\ln A_{j|i}$$
$$-\frac{1}{\alpha_1}\Sigma_i\Sigma_j\Sigma_m T^m_{ij}\ln T^m_{ij} - \Sigma_i\Sigma_j\Sigma_m T^m_{ij} c_{m|ij} \tag{52}$$
$$\text{s.t. } \Sigma_m T^m_{ij} = T_{ij},\ \Sigma_j T_{ij} = T_i,\ \Sigma_i T_i = T \tag{53}$$

ここに、T　：総トリップ数

T_i ：iゾーンでの発生トリップ数

T_{ij} ：ij ゾーン間分布トリップ数

T^m_{ij} ：ij ゾーン間手段別トリップ数

ここで、L個のリンクより構成されるネットワークシステムを考え、その1番目リンクのモードmのパフォーマンス関数を $p^m_l(f^m_l)$ で記述する。混雑効果を考慮する必要のないモードの場合、 p^m_l は利用量 f^m_l に関係なく一定値をとる。さて、利用量 f^m_l を利用者数に換算する係数を η^m とし、リンク1の所要費用を c^m_l とするとき、式(52)における最後の項であるネットワークの総費用Cは、

$$C = \Sigma_i\ \Sigma_j\ \Sigma_m T^m_{ij} c_{m|ij} = \Sigma_m\ \Sigma_l c^m_l \eta^m f^m_l$$

となり、

$$c^m_l = \frac{1}{f^m_l}\int_\emptyset^{f^m_l} p^m_l(y)dy^m_l \tag{54}$$

ならば

$$C = \Sigma_m\Sigma_l\eta^m\int_\emptyset^{f^m_l} p^m_l(y)dy^m_l \tag{55}$$

と書き改められる。

5.2 分布・配分統合モデル

いま、1つの例として1つのモードだけを考え、分布交通量と配分交通量を同時に求める問題を考える。このとき、式(52)において、 T_i は定数であり、また、 $T^m_{ij} = T_{ij}$ とおくと、結局、分布・配分統合モデルは以下の問題で与えられる。

$$\max.\ -\frac{1}{\alpha_2}\Sigma_i\ \Sigma_j T_{ij}\ln\frac{T_{ij}}{D_j} - \eta\,\Sigma_l\int_\emptyset^{f_l} p_l(y)dy_l \tag{56}$$

$$\text{s.t. } \Sigma_j T_{ij} = T_i,\ f_l = \Sigma_{ij}\ \Sigma_r \delta^{ij}_{l,r} x^{ij}_r$$
$$\Sigma_r x^{ij}_r = T_{ij} \tag{57}$$

上のモデルにおいて、 $A_{j|i} = D_j$ （集中量）とおいている。しかし、集中制約が満足されるようにはモデルは構成されていない。なお、 x^{ij}_r は ij 間の r 番

目径路を利用する交通量を表わし、$\delta_{l,r}^{ij}$ は径路行列の要素である。

5．3　確率配分モデル

発生量、分布量ともに与えられているものとし、径路mを利用する量を求める問題を考える。このとき、式(52)、(53)は次のように変形できる。

$$\max. -\frac{1}{\alpha_1}\Sigma_i \Sigma_j \Sigma_m T_{ij}^m \ln T_{ij}^m - \eta \Sigma_l \int_{\emptyset}^{f_l} p_l(y)dy_l \quad (58)$$

$$\text{s.t.} \quad \Sigma_m T_{ij}^m = T_{ij}, f_l = \Sigma_{ij} \Sigma_r \delta_{l,r}^{ij} T_{ij}^r \quad (59)$$

上述の問題はFiskの考えた確率配分モデルと等価である。ただ、本研究のモデルは確率選択概念と密接な関連をもち、α_1は前に見たように径路選択に伴う不確実さを反映している。すなわち、α_1が大きくなると、不確実さが減少するが、その結果、式(58)において第2項が優勢となり、上述の問題はWardrop均衡を表わすことになる。逆の場合には第1項が優勢となり、上述の問題は確率配分を表わすことになる。実際の状況はその中間にあると予想される。

ところで、式(58)の最適値関数は、式(58)に対応した満足度関数を与えるが、これはDaganzoの提案した確率配分モデルに等しい。(5) すなわちFiskのモデル、Daganzo のモデルは互いに共役双対な関係にある。

以上の定式化は配分問題を対象としたものであったが、上述の問題が機関分担・配分統合モデルとしても定式化できることは容易に理解できよう。

6. まとめ

本研究はランダム効用理論を基礎とすることによって同時確率選択モデルや同時エントロピーモデルが統一的に誘導できることを示した。いいかえれば交通需要予測理論において、ランダム効用理論は最も説明力のある統一的理論であるといえる。

本研究ではモデルパラメータの推定問題やデータとの関係については全く触れていない。特に本文中に現われた分散に関係するパラメータ α_1 α_2 α_3 の推定問題は、確率配分問題を解くときには最も重要な問題となる。この点については今後の課題としたい。

また、交通需要予測全体を統合した場合の具体的方法についても本研究では触れる余裕がなかったが、この点については別の機会に報告したい。

参　考　文　献

(1) Wilson, A. G. (1969) Entropy maximising models in the theory of trip distribution, mode split and route split. J. of Transport Economics and Policy 3, pp. 108 − 126.

(2) 松井　寛(1971) 交通量分布パターンの確率論的考察, JSCE, NO. 190, pp. 99 〜 109.

(3) Beckman, M. J. and T. F. Golob (1972) A critique of entropy and gravity in travel forecosting. Traffic Flow and Transportation (ed. G. F. Newell), American Elsevier, New York.

(4) 加藤　晃、宮城俊彦、吉田俊和(1982) 交通分布配分統合モデルとその実用性に関する研究、交通工学、Vol. 17, No. 6, pp. 3 〜 11.

(5) 宮城俊彦(1982) 交通ネットワーク均衡の理論と計算法に関する研究、京都大学博士論文

(6) 宮城俊彦(1982) 双対交通均衡モデル：交通モード均衡を例に、第4回土木計画学研究発表会講演集. pp. 403 〜 412.

(7) Anas, A. (1983) Discrete choice theory, information theory and the multinominal logit and gravity models. Transpn. Res. 17B, No. 1, pp. 13 〜 23.

(8) Fisk, C. (1980) Some developements in equilibrium traffic assignment methodology. Transpn Res. 14B, pp. 243 〜 255.

(9) Daganzo, C. F. (1979) Multinominal Probit The Theory and Its Application to Demand Forecasting, Academic Press, New York.

(10) Domencich, T. and McFadden D. (1975) Urban Travel Demand : A Behavioral Analysis, North-Holland, Amsterdam.

(11) Williams, HCWL (1977) On the formation of travel demand models and econ-

omic measures of user benefit.Environment and Planning A,Vol.9,pp. 285～344.

⑿ Ben-Akiva,M.and S.R.Lerman(1979) Disaggregate travel and mobility choice models and measures of accessibility.Behavioural Travel Modelling(D.A.Hensher and P.R.Stopher eds.),Croom Helm,London.

⒀ Ben-Akiva,M.E.(1974) Structure of passenger travel demand models.TRR No.526,pp.26～42.

⒁ Rockafellar,R.T.(1970) Convex Analysis,Princeton Univ.Press,New Jersey.

⒂ Lucnberger, D.G.(1969) Optimization by Vector Space Method. John Wiley & Sons, Inc,New York.

⒃ Fuss,M.and D.McFadden (eds.) (1978) Production Economies : A Dual Approach to Theory and Applications. Volumel, North-Holland,The Netherlands.

〔付録Ａ〕 満足度関数 $s(\mathbf{v})$ の凸性

$\lambda\epsilon(0,1)$ に対し、次式が成立するならば、$s(\mathbf{v})$ は凸関数となる。

$$\ln\Sigma_j\exp[\alpha\lambda v_j + (1-\lambda)\alpha v'_j\ ] \le$$
$$\lambda\ln\Sigma_j\exp(\alpha v_j) + (1-\lambda)\ln\Sigma_j\exp(\alpha v'_j) \quad \text{(A-1)}$$

式（Ａ－１）は次式が成立するならば、成立する。

$$\Sigma_j\exp(\alpha v_j)^{\lambda}\exp(\alpha v'_j)^{1-\lambda} \le$$
$$[\Sigma_j\exp(\alpha v_j)]^{\lambda}[\Sigma_j\exp(\alpha v_j)]^{1-\lambda} \quad \text{(A-2)}$$

（Ａ－２）が成立することは、次のHölderの不等式より明らかである。

$$\Sigma_j a_j b_j \le [\Sigma_j(a_j)^{1/\lambda}]^{\lambda}[\Sigma_j(b_j)^{1/(1-\lambda)}]^{1-\lambda}$$

ただし、 $a_j \ge 0,\ b_j \ge 0$

〔付録Ｂ〕 性質５の証明

$$\frac{\partial s(\mathbf{v})}{\partial\theta_i} = \Sigma_j\frac{\partial s(\mathbf{v})}{\partial v_j}\frac{\partial v_j}{\partial\theta_i} \quad \text{(B-1)}$$

また、性質２より、 $\partial s/\partial v_j = p_j$ 。よって、式（17）が成立する。（Ｂ－１）をさらに微分すると、

$$\frac{\partial^2 s}{\partial\theta_i^2} = \Sigma_j\frac{\partial p_j}{\partial\theta_i}z_{ij} \quad \text{(B-2)}$$

$\partial p_j/\partial\theta_i = \alpha(z_{ij}p_j - \bar{z}_i p_j)$ である。

よって、

$$\frac{\partial^2 s}{\partial\theta_i^2} = \alpha[\ \Sigma_j p_j z_{ij}^2 - \bar{z}_i\Sigma_j p_j z_{ij}\ ]$$
$$= \alpha\mathrm{var}[\ z_i\ ]$$

〔付録Ｃ〕 共役関数の誘導

式（46）の目的関数の v_{ijm} は、式（40）で表わされる。よって、式（46）の最大化問題は、v_i, $v_{j|i}$ $c_{m|ij}$ について解けばよい。最適解の条件式より、以下の式が成立する。

$$v^*_{mij} = p_{m|ij}p_{j|i}p_i,\ \Sigma_{mj}v_{mij}v^*_{mij} = p_i$$
$$\Sigma_m v^*_{mij} = p_{j|i}p_i$$

よって、式（46）の第１項は次のように書ける。

$$\Sigma_i p_i v_i + \Sigma_{ij}p_{j|i}p_i v_{j|i} - \Sigma_{ijm}p_{ijm}c_{m|ij} \quad \text{(C-1)}$$

ところで、

$$p_i = k_3\exp(\alpha_3 v_i + \alpha_3 s_i),\qquad \Sigma_i p_i = 1$$
$$p_{j|i} = k_2\exp(\alpha_2 v_{j|i} - \alpha_2 c_{ij}),\ \Sigma_j p_{j|i} = 1$$
$$p_{m|ij} = k_1\exp(-\alpha_1 c_{m|ij}),\qquad \Sigma_m p_{m|ij} = 1$$

とおけるので（ k_1～k_3 は正規化項を表わす）、v_i , $v_{j|i}$, $c_{m|ij}$ は p_i, $p_{j|i}$, $p_{m|ij}$ を用いて表わすことができ、これを（Ｃ－１）および、s に代入する。このとき、（Ｃ－１）の各項およびsは次のように表わされる。

$$\Sigma_i p_i v_i = \frac{1}{\alpha_3}\Sigma_i p_i\ln(p_i/k_3) - \Sigma_i p_i s_i$$
$$= \frac{1}{\alpha_3}\Sigma_i p_i\ln p_i + \frac{\ln k_3}{\alpha_3} + \frac{\ln k_2}{\alpha_2}$$

$$\Sigma_{ji}p_{j|i}p_i v_{j|i} = \frac{1}{\alpha_2}\Sigma_{ji}p_{j|i}p_i\ln(p_{j|i}/k_2)$$
$$+ \Sigma_{ji}p_{j|i}p_i c_{ij}$$
$$= \frac{1}{\alpha_2}\Sigma_{ji}p_{j|i}p_i\ln p_{j|i} - \frac{\ln k_2}{\alpha_2} + \frac{\ln k_1}{\alpha_1}$$

$$\Sigma_{ijm}p_{ijm}c_{m|ij} = \frac{1}{\alpha_1}\Sigma_{ijm}p_{m|ij}p_{j|i}p_i\ln\frac{p_{m|ij}}{k_1}$$
$$= \frac{1}{\alpha_1}\Sigma_{ijm}p_{m|ij}p_{j|i}p_i\ln p_{m|ij} - \frac{\ln k_1}{\alpha_1}$$

$$\frac{1}{\alpha_3}\ln\Sigma_i(\alpha_3 v_i + s_i) = \frac{\ln k_3}{\alpha_3}$$

よって、式（48）を得る。