単調なパスを利用した道路ネットワーク上の多地点到達確率の近似計算法について

小林　俊一[1]・中山　晶一朗[2]・中山　博文[3]

[1]正会員 金沢大学准教授 理工研究域地球社会基盤学系（〒920-1192 石川県金沢市角間町）
E-mail: koba@se.kanazawa-u.ac.jp（Corresponding Author）

[2]正会員 金沢大学教授 融合研究域融合科学系（〒920-1192 石川県金沢市角間町）
E-mail: nakayama@staff.kanazawa-u.ac.jp

[3]金沢大学 理工学域 地球社会基盤学類（〒920-1192 石川県金沢市角間町）
E-mail: tsh@stu.kanazawa-u.ac.jp

大規模災害時の道路ネットワークの役割として，迅速かつ円滑な初動対応を支援できることが求められる． このため，地域内の重要な拠点間について何らかの接続性を確保する必要があり，接続性の現況を定量的に把握する必要がある． 著者らは道路ネットワーク上の２地点間について，非閉路かつ有向な部分グラフを切り出す方法論を提案した． またこの部分グラフ上の２地点間を結ぶパスを単調なパスと定義し，単調なパスの総数計算や２点間の到達可能確率の近似計算について検討してきた． 本研究ではこの方法論を拡張し，道路ネットワーク上の複数地点について，全節点を部分集合に分割し，隣接する部分集合間の非閉路有向グラフに基づく，道路ネットワークの集約表現について議論する． またその集約表現に基づいて，多地点間到達確率の近似計算法を検討する．

Key Words: *Number of paths, Road Network, Connectivity, Tree structure, Monotonic path*

1. はじめに

著者らは大規模災害時に途絶しにくい交通ネットワークを検討するために，交通ネットワーク上の 2 ノードあるいは 2 エリア間の接続性を定量的に測る尺度について関心がある． 平常時には交通容量や旅行時間も接続性を検討する上で重要な要素であるが，大規模災害時には接続しているか否かが最優先であると考え，ネットワークの形の影響，つまりジオメトリやトポロジーが接続性に与える影響について検討を進めている．

接続性の定量的な指標として到達可能確率を利用する考え方がある． この到達可能確率を計算する具体的な方法としてモンテカルロ法が知られている.モンテカルロ法（MC 法）では乱数を利用した試行を繰り返し，統計的性質から確率を数値的に評価する． ネットワークの到達可能確率の計算におけるモンテカルロ法は以下の通りである． ネットワークを構成する各リンクの通行可能確率を独立事象であると仮定する． ある 1 回の試行において，リンク数の一様乱数を用意し，まず各リンクの通行可能確率との大小関係によって，各リンクの通行可能・不可能を決める．ついで与えられた OD 間が接続するかどうかを確認する． これを多数の試行回数で実施し，全試行回数に対する接続する試行回数から到達確率を評価する． モンテカルロ法は数値計算分野で多くの実績のあり手堅い方法と言えるが，計算効率が悪いことが課題として挙げられる． つまり精度を確保するためには十分な試行回数が必要であり，計算コストは必ずしも低くはない．

一方，経路数に基づいて接続性を評価する考え方もある． 互いに重複するリンクを許さない経路を完全独立経路と呼ぶ． 例えば，原田ら [1)]，瀬戸ら [2)]は完全独立経路数を用いて OD の接続強度を論じている． しかし，道路ネットワークでは 1 ノードに接続するリンク数は交差点の物理的な制約により高々数個であるため，OD の完全独立経路数もこの制約を受けることに注意が必要である． これに対して部分的なリンクの重複を許す経路（本論文では「非重複経路」と呼ぶことにする）を用いる考え方もある． ただ，非重複経路を全て数え上げる問題は組合せ爆発が起こることが知られ，単純な正方格子上の対角に位置するノード間の非重複経路計算ですら

困難である．湊ら[3]が考案した効率的なデータ構造に基づく超高速グラフ列挙アルゴリズム ZDD を駆使しても 26×26 の正方格子に対して，30CPU (XeonE7-8837)，メインメモリ 1400GB で 2 日間の計算が必要とされ[4],計算した全ての結果を取り出すのに，3 週間を要すると報告されている[5]．このため，実際の道路ネットワークに対して，非重複経路を全て数え上げることは実質的に不可能と考えてよい．

著者らは OD 間の非重複経路数を簡便に評価する方法として，非閉路有向グラフ化することで OD をつなぐパスの中である種の単調性を課した「単調パス」を定義し，それらの経路数を計算する手法を提案した[6]．さらにあるノードへの到達可能性について，エッジの通行可能性と上流側ノードへの到達可能性だけに依存する，ある種のマルコフ性を仮定し，OD 間の到達可能確率を評価する方法を提案した[7]．

本論文では従前の提案手法に加えて，OD 間の到達可能確率の上限値と下限値を求め，真値の範囲を限定する近似解法を提案する．また提案手法の妥当性を数値実験で検討する．

2. 定式化

(1) ネットワーク情報の表記

参考文献[8]に従い，本論文で取り扱うネットワーク情報の表記法について簡単に整理する．ノードはある地点の位置を表し，隣接する 2 ノードをつなぐ道路のことをエッジと呼ぶ．ノードの属性としては位置情報を，エッジの属性としては始点ノード，終点ノードおよびエッジコストを考える．エッジコストとして，本研究では物理的な距離であるエッジ長さを利用する．この他にエッジコストとして，旅行時間など正の値を持つ量を用いることも可能である．

全ノード数を n とするとき，ネットワークのトポロジーは配列寸法 $n \times n$ の隣接行列 $\boldsymbol{A}$ で表現できる．隣接行列の $(i,\ j)$ 成分 Aij は，ノード i からノード j に向うエッジの接続関係を表し，直接接続する場合は 1，そうでなければ 0 をとる．

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) \text{ is directly connected} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

無向グラフの場合，全てのエッジは両方向に通行可能であるので，隣接行列は対称行列となる．一方，有向グラフの場合は一方通行となるエッジが存在するため隣接行列は非対称となる．

あるノードから出発し，いくつかのエッジを経由して出発ノードに戻れる場合，この経路をループと呼ぶ．無向グラフであれば，出発ノードから隣接ノードに向かい，そこから出発ノードに戻る経路が許されるため，必ずループが存在する．ループが存在しないグラフのことを「森」という．その中で全てのノードが連結している場合が「木」である．グラフが「森」や「木」である場合は，適当にノード番号の入れ替えを行えば，隣接行列 $\boldsymbol{A}$ は必ず上三角行列として表せ，対角項以下の全ての成分がゼロとなる．

隣接行列の冪乗の成分 A_{ij}^{m} は，ノード i から m 個のエッジを経由してノード j に到達する経路数となる．したがってノード i からノード j に到達する経路の総数 N_{ij} は，行列の冪乗の総和を取ればよい．

$$N_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} A_{ij}^{m} \quad (2)$$

もしネットワーク上にループが存在しなければ，隣接行列は上三角行列で表せるので，隣接行列の冪乗はたかだか n 乗でゼロ行列となる．このとき，ノード i からノード j に到達する経路の総数 Nij は有限項の和として以下で表せる．

$$N_{ij} = \sum_{m=1}^{n} A_{ij}^{m} \quad (3)$$

(2) 単調なパスの考え方と，OD 間を接続する単調パスの抽出方法

既往文献[6]に従って，非閉路有向グラフ化と単調パスの抽出方法についてその概要を簡単に説明する．まずネットワークが「木」を構成する例を考えてみよう．力学的なアナロジーとして管路網のポテンシャル流に着目すると，これは「木」を構成する．なぜなら管路網の流れは，必ず全水頭の高い方から低い方に流れるので，ループとなる経路は存在しない．また経路に沿って必ず全水頭は減少するので，経路上のノード属性は単調性を示す．このアイディアを距離に応用する．簡単のため全ノードが連結した状態，つまり任意のノードから任意のノードに到達可能な状態を仮定する．ある始点ノードから各ノードへの最短距離を計算する．これはダイクストラ法[9]で簡単に計算できる．得られた各ノードへの最短距離を用いて，単調性を示すように各エッジの通行可能方向を定義すればループは存在しえないので，このネットワークは「木」を構成する．

さらに OD の接続性を検討するために，「木」を構成するネットワークの作り方を拡張する．ダイクストラ法により始点ノードおよび終点ノードの両方からの各ノードへの最短距離を計算する．得られた最短距離に基づき，ノードの集合 V を始点ノード側の部分集合 Vo と終点ノード側の部分集合 Vt の 2 つに分離する．

$$Vo \cup Vt = V,\ Vo \cap Vt = \emptyset \quad (4)$$

その上で全てのエッジについて有向化操作を行う．こ

の際，エッジ始点とエッジ終点が属する部分集合によって，エッジの有向化操作は３つのパターンに分類できる．

- エッジ始点ノードとエッジ終点ノードの両方が始点側部分集合 Vo に属している場合:最短距離が増加する方向に有向化する．

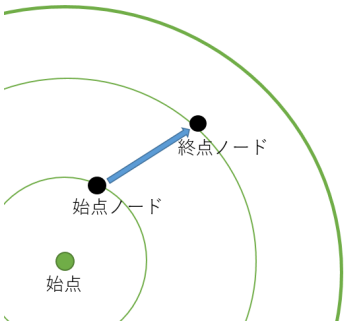


図-1　始点側ノード集合における有向化

- エッジ始点ノードとエッジ終点ノードの両方が終点部分集合 Vt に属している場合: 最短距離が減少する方向に有向化する．

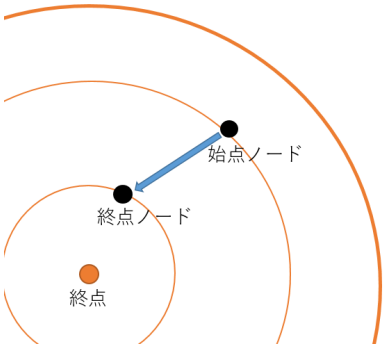


図-2　終点側ノード集合における有向化

- エッジ始点ノードとエッジ終点ノードで属する部分集合が異なる場合: 始点側部分集合のノードから終点側部分集合のノードへ有向化する．

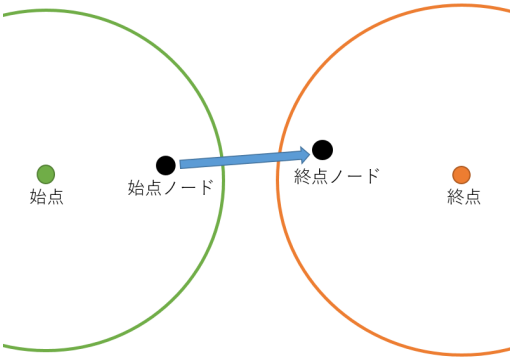


図-3　始点側と終点側の境界における有向化

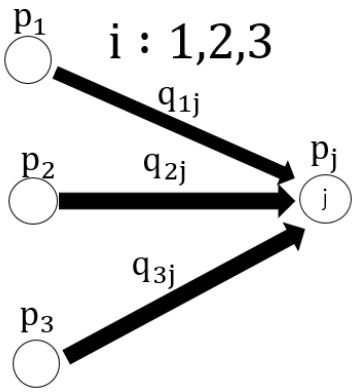


図-4　ノード j とその直上ノード

この結果，OD を接続する経路にはある種の単調性が確保されており，ループは存在しない．この経路のことを「単調なパス」と呼ぶことにする．本方法による「単調パス化」は，OD の両方から木を構成するネットワークを作り始め，両者の界面で２つの木を接続したもの，と見ることも可能である．本方法のバリエーションとして，OD を単一のノードではなくエリアで定義することや，木を作る際に最短距離の上限を設けることで極端に遠回りをする経路を排除することなども可能である．なお OD 間に単調なパスを作る方法自体は任意であるので，エッジ長のような距離のほかにも，工学的な意味付けのある重みを導入して適切な方法を選べばよい．

(3)　OD 到達可能確率の近似評価法（方法 A:上界値）

既往文献 [7] に従って，「単調パス」の性質とリンクの通行可能確率を組合わせた折衷的なアプローチで，OD の到達可能確率を近似的に評価する方法について説明する。単調パス化したあるネットワークを考える．始点ノード O からあるノード j への到達可能確率を p_j とする．ノード j へ到達可能な状況とは，その上流ノード i に到達可能かつ i から j への有向エッジが通行可能な状況である．上流側に複数のノードが存在する場合は，いずれか 1 つのエッジを経由して到達できれば良い．

ここで，もし上流側ノード $i \in V_j$ に到達可能な確率 p_i が独立事象であるならば，ノード j に到達できない確率 $\bar{p}_j$ は上流側のノード $i \in V_j$ のいずれからも到達できないことを意味する．これは余事象（記号*）を考えれば，以下の式で簡単に表現できる．

$$\bar{p}_j = \prod_{i \in V_j} \left(\bar{p}_i + p_i (1 - q_{ij}) \right) = \prod_{i \in V_j} (1 - p_i q_{ij}) \quad (5)$$

ここに集合 V_j はノード j の上流側ノードの集合，また q_{ij} はノード i から j へのエッジの通行可能確率である．一般的に，ネットワークの単調パス化を図っても，任意のノード i に到達可能な確率 p_i は独立事象にはならない．これは単調パス化の際に用いる「木」が，あるノードに

複数のエッジが流入することを許すことからも理解できる．したがって式-(5)はあくまでも近似評価法であり,危険側, すなわち到達確率を大きめに評価する可能性がある.

しかし，現在の状態が直前の状態だけで決定できるマルコフ過程のように，あるノードの到達可能確率が，上流側直上のノードの到達可能確率とそれを結ぶエッジの通行可能確率のみで式-(5)の形で決定論的に計算できれば，到達可能確率の上界値が求められる． この方法はMC法と比較して， 計算コストの大幅な削減が期待できる点は魅力的である.

各ノードへの到達可能確率は繰返し計算による収束計算を行う． 初期解として, 始点ノードの到達可能確率を1.0で固定し, 残りのノードへの到達可能確率については前進計算を行い, 適当な緩和係数を用いて解を更新する. このプロセスを繰返すことで数値解の収束を図る． 解の収束性や数値解の安定性について，予備的な解析をしたところ, 特に問題がないことを確認している.

(4) OD 到達可能確率の近似評価法 (方法 B:下界値)

また近似解法の精度を把握するためには，真値に対する下界値も分かる方が望ましい． そこで本研究では，O側，D 側の部分集合で単調なパスに基づく有向で非ループネットワークを構成する代わりに，最短経路のみを用いた有向で非ループなネットワークを構成する． 具体的には，O側部分集合のノードからD側部分集合のノードへ直接接続するエッジ集合Xのみに着目し，XのO側のノード集合 A と XのD側のノード集合 B を考える. O 側，D 側の部分領域でそれぞれ最短経路からなる有向グラフを用いれば，始点ノード O から集合 A のノードへの到達確率は独立となる． 終点ノード D から集合 B のノードへの到達確率も同様に独立となる． この条件で，ノード集合Aへの到達確率，ノード集合Bへの到達確率と X のリンクの通行可能確率を用いれば，OD 接続確率が評価できる.

この手法では O 側，D 側それぞれの部分集合で到達可能確率が積の形で正しく評価できる． したがって，単調なパスに基づく有向グラフ化したネットワークにMC法を適用するよりも使用可能なエッジの数が少ないため, MC法よりも安全側, つまりOD間の到達可能確率を低めに見積もることが予想される.

エッジの通行可能確率q_{ij}に関しては, エッジ長Lに応じて指数的に通行可能確率が減少するモデル

$$q(L) = \exp(-\alpha L), \alpha > 0 \qquad (6)$$

を採用した．このモデルを用いると中間ノードの有無によらず同じ通行可能確率が得られる． すなわち，ある 2 点間(i,j)に中間ノードkを追加し, 3点間(i,k,j)を直列に繋いだ場合, $q_{ij} = q_{ik} \times q_{kj}$を満たす.

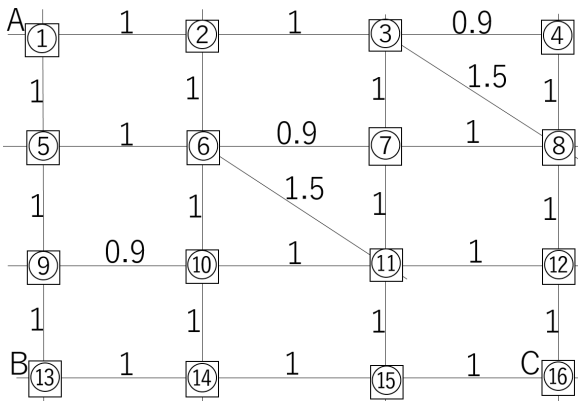


図-5　設定した経路

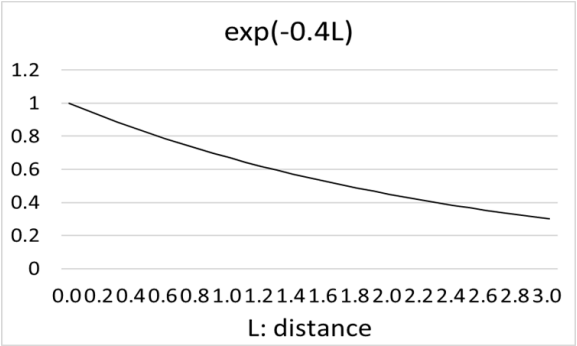


図-6　指数関数を用いたリンク通行可能確率

またパラメータαの大きさについては, 災害の規模, 地盤や地形的な特徴, 周辺環境などに依存すると思われるが, 統計的なデータは整理されておらず, 指標となる資料も見当たらない． 本研究ではネットワークの形状やトポロジーに着目して到達可能性を論じることが目的であるため, パラメータαについては場所によらず適当な一定値を仮定した.

3. 数値実験結果とその解釈

ここでは提案する 2 つの近似評価法，方法 A と方法 B および，単調パスによって有向化したネットワークにMC 法を直接適用した場合の到達可能確率を比較する数値実験を実施し，提案手法の特徴について議論する． 使用するネットワークを図-5 に示す． 3 × 3 の等辺長矩形グリッドに対して一部のマスに斜めのエッジを加えたもの（ノード数 16）を考える． ノードの枠内にノード番号を記した． ノード A(1)，B(13)，C(16)を始点，あるいは終点として場合に応じて扱う． エッジの側面に記載している数字は距離を表す． エッジ数は 26 である． また各エッジの通行可能確率は関数，exp(-αL)において，α=0.4 の場合を考えて各経路ごとに独立して確率を設定した．通行可能確率とエッジ距離の関係を図-6 に示す.

今回の例題では，A，B，Cの 3 ノードを拠点として考

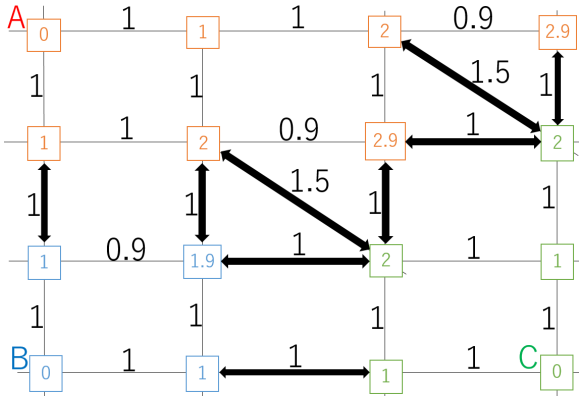


図-7　各始点側集合とその境界エッジ

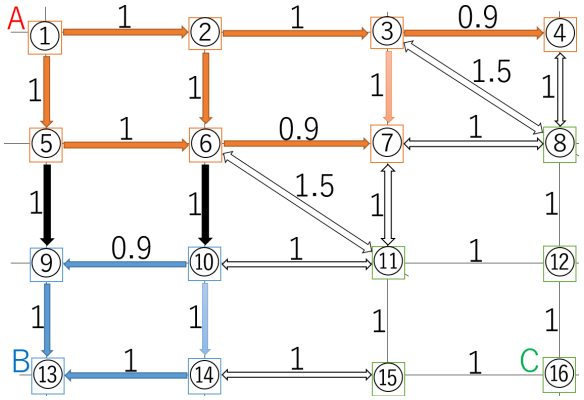


図-8　AB 間の単調パスと有向グラフ

え，互いの接続性を到達可能確率で評価することを考える．まず,全ノードについて，A, B, C3 点のうち距離が最も短くなる点を求め，それに従って全ノードを A, B, C のいずれかに属する部分集合に分類する．一般の複雑なネットワークであってもダイクストラ法を利用すれば多項式時間で計算可能である．分類した結果を図-7に示す．

始点 A 側の部分集合に属するノードはオレンジ，B 側部分集合はブルー，C 側部分集合はグリーンに色分けした．枠内の数字は各始点からの最短距離を示す．部分集合の境界，すなわち，エッジ始点ノードとエッジ終点ノードで属する部分集合が異なるエッジに関しては，3 点のうちどの点を始点終点にするかで方向が決定されるので，どちら側にもなりうるという意味で黒矢印を付与した．この状態から 2 点間の到達可能確率を検討するわけだが，元のネットワークは無向グラフであり，2 点間の到達可能確率を計算するために，本手法では便宜上 OD を定めているので，2 点のいずれを O（始点）あるいは D（終点）に設定しても，計算結果は同じである．具体例として，始点を A，終点を B とした場合について考える．先ほど定義した有向化操作に従って，2 点間について単調なパスを形成していく．その結果が図-8のようになる．

この単調なパスについて式-(5)を始点 A の到達確率を 1 として，下流側へ漸化式的に決定していく．2 つの部分集合の境界のエッジについては，始点 A の集合に属するノードと終点 B の集合に属するノードを接続するエッジのみ考え，有向化した．方法 A については，この単調パスに式 5 を適用し，A から B への接続可能確率を評価する．

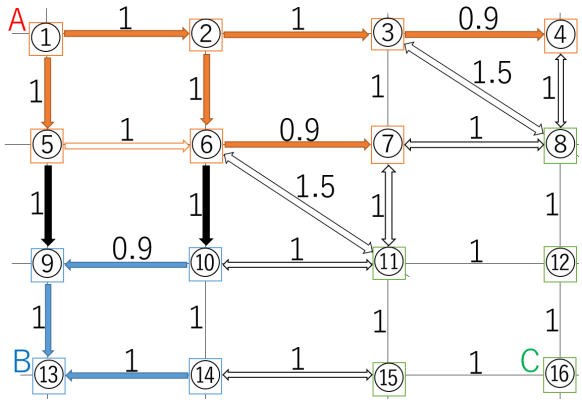


図-9　方法 B に基づく有向グラフ（OD は A から B）

MC 法については，図 4 の有向グラフに対して，各試行ごとにエッジの個数だけ一様乱数を発生させ，それぞれのエッジに関する通行の可否を判断する．この状況において，OD 間が各単調パスの通行可否を調査し，あらゆる単調パスが通行不能の場合に限り，OD は非接続と判定する．このような試行を十分な回数行い，OD 間の接続可能確率を統計的に評価する．

この例題については，有向なエッジが 14 本あるので，各エッジに対して 14 個の一様乱数を発生させる．次に，OD 間の考えられる接続の組み合わせを数え上げ，接続経路を構成するすべてのエッジが通行可能であれば，その経路について通行可であることになる．そうでない場合は通行不可となる．これをすべての経路について適用する．A→B においては，

①→⑤→⑨→⑬
①→②→⑥→⑩→⑭→⑬
①→②→⑥→⑩→⑨→⑬
①→⑤→⑥→⑩→⑭→⑬
①→⑤→⑥→⑩→⑨→⑬

の 5 通りが存在するので，これらの経路の通行可能性を調査する．

方法 B による接続の確率の計算に関しては，図-9 に示すように O 側，D 側の部分集合で最短経路を用いる．始点 A に対して最短距離が同じ値となるものに関しては，どちらか一方を選択して考える．今回は，②→⑥と⑤→⑥のうち，②→⑥を選択した．このため，最短経路を考えるとき，O 側，D 側のそれぞれの経路については木構造のグラフとなる.そのため, O 側, D 側それぞれの界面に位置するノードまでの接続可能確率は，始点 O や終点 D のノードの到達可能確率を 1 として，経由するエッジの通行可能確率の積として計算できる．

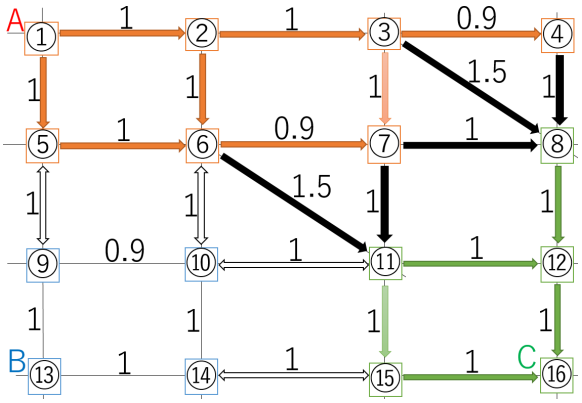


図-10　AC 間の単調パスと有向グラフ

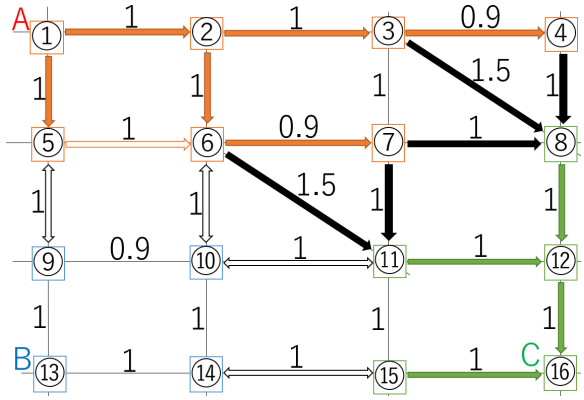


図-11　方法 B に基づく有向グラフ（OD は A から C）

同様にして，A-C，B-C についても，A→C，B→C として 3 通りの手法で確率を計算していった． 以下，残りの 2 つの OD の組合せ，ノード AC 間，ノード BC 間についても同様の手順で到達可能確率を計算した． 各ケースで使用した有向グラフを図-10 ～図-13 に示す．

表-1 は MC 法を用いて評価した OD 接続可能確率と試行回数の関係を示す． 試行回数は $n=10^3$ 回，$n=10^4$ 回，$n=10^5$ 回，$n=10^6$ 回の 4 パターンを実施した．

MC 法における適切な試行回数については，事前に試行回数を推定できる方法は特にない． すなわち実際に計算した複数の結果に基づき，解析者が設定した計算精度を満足するような回数を試行錯誤で決めるしか無い．

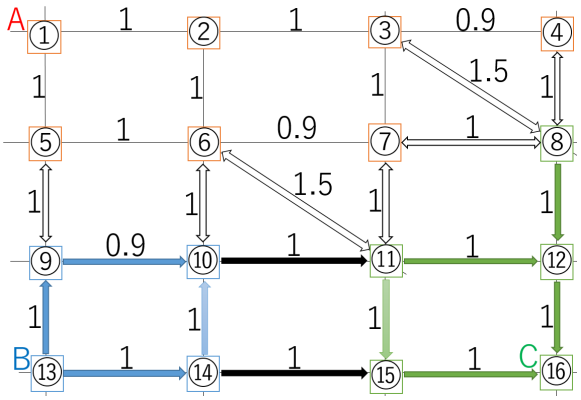


図-12　BC 間の単調パスと有向グラフ

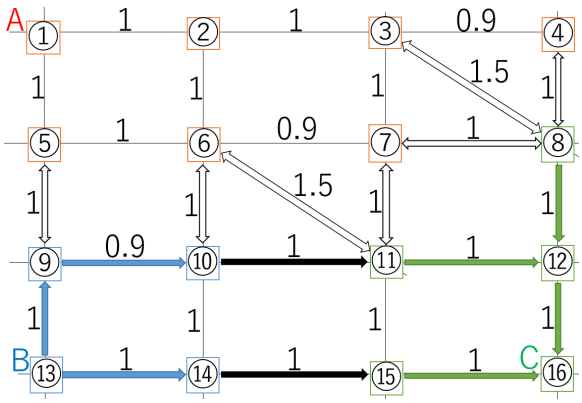


図-13　方法 B に基づく有向グラフ（OD は B から C）

今回の数値実験では，MC 法で試行回数 $n=10^6$ 回程度で小数以下第 3 位程度の精度が得られたため，この結果を用いて数値実験結果を検討する．

3 つの手法による評価結果の比較を表-2 に示す。まず方法 A に基づく方法，つまり単調パスとマルコフ性を仮定した接続可能確率の近似評価方法では，MC 法による真値の数値解に比べて，いずれも大きめの値が得られた．これは方法 A が到達可能確率の上界値を与えていることを意味する．一方，方法 B に基づく計算結果，つまり O 側 D 側の部分集合で最短経路のみを利用した接続可能確率の近似評価法では，MC 法による真値の数値解に比べて，常に控えめな値が得られた． これは方法 B が到達可能確率の下界値を与えていることを意味する． 単調パス化した経路においては，経路数を数え上げることは難しくない．しかし，経路数の絶対値だけでは，OD 連結性の強度を定量的に測ることは難しい．

今回提案した手法は，単調パスの概念を利用したネットワークの非ループ有向グラフ化とある種のマルコフ性を仮定することで，OD の到達可能確率の上界値や下界値を決定論的に評価できる近似手法で，MC 法の代替とな

表-1　MC 法による単調パスを経由した 2 ノード間の到達可能確率

OD	MC $n=10^3$	MC $n=10^4$	MC $n=10^5$	MC $n=10^6$
A-B	0.4590	0.5040	0.4903	0.4934
A-C	0.4750	0.4964	0.4975	0.4984
B-C	0.4620	0.4973	0.4929	0.4911

表-2　3 手法による各始点間の到達可能確率

OD	方法B	MC $n=10^6$	方法A
A-B	0.3788	0.4934	0.5429
A-C	0.3554	0.4984	0.6164
B-C	0.3996	0.4911	0.5422

りうる近似手法であると著者は考える．また例題で示したように, 特定のノードに着目することで, 複雑なネットワーク構造を粗視化・簡略化する手法としても活用可能である.

4. おわりに

本論文では，ネットワーク情報を単純化するため，OD を接続する経路にある種の単調性を課した単調なパスで構成されるネットワークを対象に，各ノードへの到達可能確率の計算法について論じた．各ノードへの到達可能確率が独立事象であると仮定し，ノードへの到達能確率を近似的に評価する決定論的方法を議論した.

矩形グリッドに斜めの接続を考慮した経路を対象とした小規模な数値実験を実施したところ，単調パスを利用した近似解法は MC 法による到達可能確率を常に上回ることを確認した．また，最短経路を利用した近似解法による到達可能確率は，MC 法に依る到達可能確率を常に下回ることを確認した．以上より，それぞれの評価手法について，上界値，下界値を評価する手法としての活用が期待でき，これにより，確率の精度を把握することもできる.

ただし本論文の提案手法には仮定も多く，交通工学的な意味で有用性を確認するための課題が残されている．また今回は矩形グリッドという特殊な条件での数値実験であるため，ネットワークのトポロジー・ジオメトリがより複雑な実ネットワークを用いた数値実験も実施し，数値解の特性を更に詳しく把握する必要がある.

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 21H01451 の助成を受けたものである．ここに記して謝意を表する.

REFERENCES

1) 原田剛志，倉内文孝，高木朗義: リダンダンシーを考慮したアクセシビリティに基づく道路ネットワークの接続脆弱性評価，土木学会論文集 D3，Vol．70，No. 1，pp．76-87, 2014. [Harada, T., Kurauchi, F. and Takagi, A.: Connectivity vulnerability evaluation based on potential accessibility considering a redundancy of road network, *Journal of JSCE, Ser. D3*, Vol. 70, Issuer 1, pp. 76087, 2014.]
2) 瀬戸裕美子，宇野伸宏，塩見康博: 非重複経路数を考慮したアクセシビリティ指標に基づく医療施設配置計画，土木学会論文集 D3，Vol．67，No．5，pp．57-68， 2011. []Seto, Y., Uno, N. and Shiomi, Y.: A medical facilities location model based on distinct-path-based accessibility index, *Journal of JSCE, Ser. D3*, Vol. 67 Issue 5, pp. I_57-I_68, 2011.]
3) 湊真一: BDD/ZDD を用いたグラフ列挙索引化技法，オペレーションズ・リサーチ，Vol．57，No．11，pp. 597-602, 2012. [Minato, S.: Indexing of graph enumeration based on BDD/ZDD, Operations Research, Vol. 57, No. 11, pp. 597-602, The operations research society of Japan, 2011.]
4) Iwashita，H.，Nakazawa，Y.，Kawahara，J.，Uno，T. and Minato，S.: Efficient Computation of the Number of Paths in a Grid Graph with Minimal Perfect Hash Functions, *TCSTechnical Report*，TCS-TR-A-13-64，Hokkaido University, 2013.
5) OEIS Foundation Inc.: Number of non-intersecting (or selfavoiding) rook paths joining opposite corners of an n × n grid，The On-Line Encyclopedia of Intefer Sequences, https://oeis.org/A007764，2021.
6) 北倉大地，小林俊一，中山晶一朗，山口裕通：単調なパスを仮定した 2 ノード間の総経路数の計算手法について，土木学会論文集 D3，Vol．77，No．5，pp．I_107-I_115，2021.［Kitakura，D.，Kobayashi，S.，Nakayama，S. and Yamaguchi，H.：Monotonic path on network and its application to the calculation of total number of paths between two nodes, Journal of JSCE，Ser．D3，Volume 77，Issue 5，pp．I_107-I_115，2021.］
7) 小林俊一，中山晶一朗，山口裕通：パスの単調性を仮定したネットワークの到達可能確率の近似計算について，第 65 回 土木計画学研究発表会, 土木計画学・研究講演集 Vol.65(CD-ROM), 2022. [Kobayashi, S., Nakayama, S. and Yamaguchi, H.: Approximate calculation method of accessibility between two nodes based on monotonic paths, Abstracts of 65th Biannual conference on Infrastructure Planning and Management, JSCE, 2022.]
8) Estrada，E and Knight，P.A.: A First Course in Network Theory, Oxford University Press，2015.
9) Dijkstra，E.W.: A note on two problems in connexion withgraphs，Numerische Mathematik，Vol．1，pp．269-271，1959.

(Received October 4, 2023)
(Accepted October 13, 2023)