# データ欠損によるバイアス補正と劣化異質性を考慮した下水道取付管の状態評価

上津 直 [1]・新 雄成 [2]・笹井 晃太郎 [3]・貝戸 清之 [4]

[1]学生会員　大阪大学大学院 工学研究科地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: s.kamitsu@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[2]学生会員　大阪大学大学院 工学研究科地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: y.nii@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[3]正会員　大阪大学特任研究員 大学院工学研究科地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: k.sasai@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[4]正会員　大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

我が国では下水道管渠の団塊的な老朽化が進行しており，各地で管渠の老朽化に起因した問題が顕在化している．その中でも特に道路陥没は交通機能や，人身事故にも繋がる重要な問題である．また，下水道管渠の維持管理を実施する上で，下水道担当職員の減少と高齢化の進行による執行体制の脆弱化が懸念されている．このような下水道管理を取り巻く現状の中，効率的な事業運営が求められている．下水道管渠に起因する道路陥没の発生を抑制するためには，下水道管渠の劣化状態に応じた適切な調査・更新が重要である．しかしながら，下水道管渠は埋設構造物であることから，高頻度な点検が困難であり，調査データは十分でない場合が少なくない．そこで本研究では，潜在変数を用いてデータ欠損に起因するバイアスの補正を行い，点検データが限られている場合にも適用可能な下水道管渠の劣化予測手法を提案する．

***Key Words :*** *sewege pipe line, missing data, mixed Markov hazard model, asset management*

## 1. はじめに

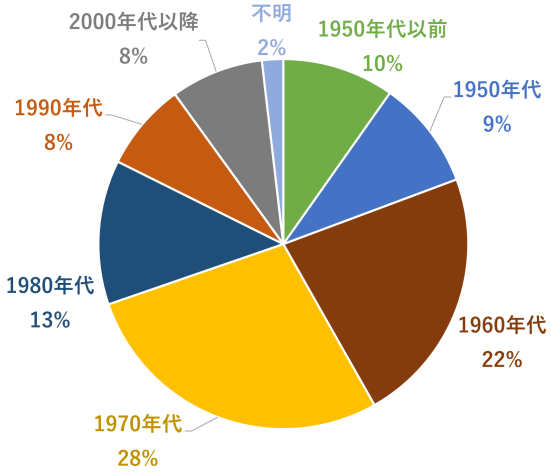
近年，我が国では下水道管渠の団塊的な老朽化が進行している [1]．今後 20 年で下水道管渠の標準耐用年数である 50 年を経過した管渠の割合は急速に増加する [2] と見込まれている．また，各地で管渠の老朽化に起因する問題が顕在化している．特に管渠の老朽化によって発生する問題の中でも，道路陥没は流下機能だけではなく，交通機能にも繋がる重要な問題である．建設後 40 年を経過した管渠において道路陥没の件数・割合が共に急増する [3] ことから，今後適切な点検・更新が実施することが求められる．

また，下水道の維持管理を実施する上で，職員の減少や高齢化による執行体制の脆弱化が懸念されている．このような現状の中，下水道管理者は様々な制約の中で，効率的な事業運営が求められており，アセットマネジメントの必要性が高まりつつある．

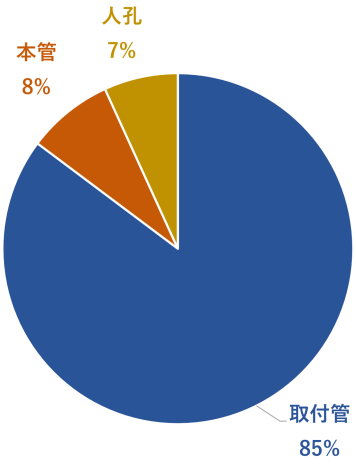
下水道の効率的な維持管理を実施するためには，施設情報や維持管理情報，改築情報などを管理・蓄積することが重要である．その一方で，下水道管渠は埋設構造物であることや，資産量が膨大であることから，高頻度な点検やこまめな補修が困難である．更に維持管理情報を含んだ施設情報のデータベース化が未実施である場合も多く，点検データの蓄積やその活用が十分に進んでいない地方公共団体も多い [2]．

これまで，マルコフ劣化ハザードモデル [4] など，点検データを基に社会基盤構造物の劣化過程や期待寿命を推定する手法が数多く提案されている [4),5),6)]．マルコフ劣化ハザードモデルを推定するためには，2 回の点検データを 1 サンプルとしてデータセットを作成する必要がある．施設の更新に関する履歴情報が記録されておらず欠損が生じている場合には，本手法により作成したデータセットを用いると寿命が過大評価される問題が生じる．そのため，二宮ら [7] はこのバイアスを補正した統計的劣化予測手法を提案している．本手法においては，説明変数として施設の特徴を考慮している．しかし，本手法を下水道管渠の劣化予測に用いた場合，管渠の劣化は環境条件や使用条件に多様に変化すると考えられる．これら全てを説明変数により表現した場合，各説明変数の説明力が低下することが懸念される．また，より効率的な維持管理を目的とする場合，個々の施設の劣化に影響する不可観測な要因を考慮した上で劣化速度に関する評価を行う必要がある．

以上の問題意識のもと，本研究では，過去に実施された更新に関するデータが存在しない管渠の点検データを用いてバイアスおよび管渠毎の劣化速度の差異を




図–1 取付管（陶管）の施工年代別延長割合（令和 3 年度末時点）




図–2 原因施設別道路陥没発生件数の割合（平成 26 年度～平成 30 年度）

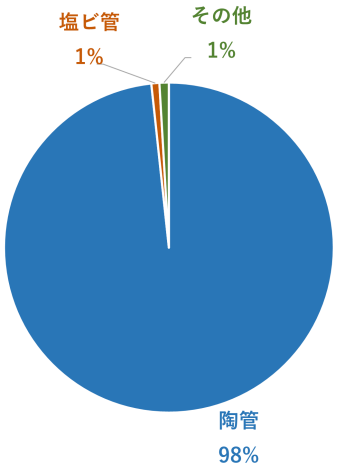
考慮可能な劣化予測モデルの提案を行う．具体的には，個々の下水道管渠の更新時点及び更新回数を確率変数として捉え，管渠の劣化過程を混合マルコフ劣化ハザードモデル [8] で表現する．以下，**2.** で本研究の基本的な考え方を述べる．**3.** では更新履歴の欠損を考慮した統計的劣化予測モデルの定式化と推定手法を説明する．

## 2. 本研究の基本的な考え方

### (1) 下水道管渠に起因する道路陥没

下水道管理者が管理する下水道管渠には道路の下に埋設されており，道路縦断方向に伸びている本管と，住宅などから排水された汚水をためる公共ますと本管を接続している取付管の 2 種類がある．本研究で対象とする A 市が管理する管渠の本数は本管が約 21 万本，取付管が約 63 万本である．図–1 に A 市の取付管（陶管）の施工年度別施工延長を示す．施工から 50 年経過した管渠が多く存在し，今後も更新の需要が増大することが読み取れる．

管渠の老朽化に伴って発生する問題の 1 つに下水道管渠に起因した道路陥没（以下，道路陥没と略記）が挙げられる．全国では年間約 3,000 件の道路陥没が発生している．本研究の分析対象である A 市の道路陥没の現状を述べる．A 市では年間 200 件前後の陥没が発生しており，近年は減少傾向にあるものの依然として多くの道路陥没の発生が確認されている．さらに図–2 に平成 26 年度～平成 30 年度までに発生した道路陥没の原因施設別発生件数を示す．本管や人孔に比べて取付管に起因した道路陥没が突出して多いことが読み取れる．この取付管に起因した道路陥没のうち，管種別の陥没発生件数を図–3 に示す．ほぼ全ての陥没が陶管によるものであることがわかる．以上から A 市における道路陥没はその 8 割以上が取付管起因であり，特に陶管での発生が多いことがわかる．よって本研究は取付管（陶管）を対象とした分析を行う．




図–3 取付管の管種別道路陥没発生件数の割合（平成 26 年度～平成 30 年度）

### (2) 下水道管渠の点検記録

近年，我が国では社会基盤施設の団塊的な老朽化に伴う補修・更新費の増加が見込まれており，アセットマネジメントの必要性が高まりつつある．そのような中，蓄積された点検データを用いて，社会基盤施設の劣化過程をモデル化する統計的劣化予測モデルが発展してきた．劣化予測モデルを作成する場合，点検データなどの維持管理情報，施設情報などを管理・蓄積することが重要である．各施設管理者で点検データの蓄積は進みつつあるものの，点検履歴や点検結果，改築履歴な

どをデータベースによって管理している都市は全国で37%に留まり，特に規模の小さい自治体においてデータベースの蓄積が進んでいないのが現状である．このように全ての管理者において施設情報や維持管理情報の蓄積が進んでいないのが現状である [2]．本研究の分析対象である A 市では TV カメラを用いて年間 30,000～40,000 箇所の取付管を対象にした調査を実施し，継手のズレや破損がないかを調査している．また，A 市では調査結果のデータベース化が行われており，データの蓄積が進められている，しかし，一部の点検結果，例えば取付管の調査結果は同一箇所の以前の調査記録に上書きする形で記録されており最新の調査以前の履歴が把握できない．

### (3) 既往研究のレビュー

下水道管渠を対象にしたアセットマネジメントは，近年研究が蓄積している [10),11)]．しかしこれらの研究では施工から点検まで一度も更新がなされていない管渠への適用を想定しており，管渠の更新履歴情報が欠損しているデータに適用した場合，推計結果にバイアスが生じる．二宮ら [7)] は過去に実施された点検や更新に関するデータが存在しない道路照明柱に注目し，個々の照明柱の更新時点及び更新回数を潜在的な確率変数と捉えた上で，照明柱の劣化更新過程を予測する手法を提案している．本研究では二宮らの手法を援用して，取付管の更新時点及び更新回数を潜在変数として捉え，データ欠損に起因するバイアスを補正する．

## 3. モデルの定式化

### (1) モデル化の前提条件

対象とする施設の健全性を $I$ 個の健全度 $i$ $(i = 1,\ldots,I)$ で表現する．$i$ の値が大きくなるほど，劣化が進展していることを表現する．また時刻 $\tau$ における健全度が $i$ であることを $h(\tau) = i$ と表記する．$z > 0$ として，2 つの時刻間 $\tau_A, \tau_B (= \tau_A + z)$ における健全度の推移確率について考える．$\tau_A$，$\tau_B$ の両時刻において健全度が記録されるとする．マルコフ推移確率は時点 $\tau_A$ における健全度 $h(\tau_A) = i$ を与件とし，時点 $\tau_B$ における健全度 $h(\tau_B) = j$ $(j \geq i)$ が生起する条件付確率として定義され，マルコフ推移確率 $\pi_{ij}(z)$ は

$$\pi_{ij}(z) = \mathrm{Prob}[h(\tau_B) = j | h(\tau_A) = i] \tag{1}$$

と与えられる．このようなマルコフ推移確率は所与の 2 つの時刻 $\tau_A$，$\tau_B$ の間において生じる健全度間の推移確率を示したものであり，当然のことながら，対象とする点検間隔が異なれば推移確率の値は異なる．補修がない限り常に劣化が進行するので，$\pi_{ij} = 0$ $(i > j)$ が成立する．また，推移確率の定義より $\sum_{j=i}^{I} \pi_{ij} = 1$ が成立する．すなわち，マルコフ推移確率に関して，

$$\left.\begin{array}{l} \pi_{ij} \geq 0,\ \sum_{j=i}^{I} \pi_{ij} = 1 \\ \pi_{ij} = 0\ (i > j \text{ のとき}) \end{array}\right\} \tag{2}$$

が成立しなければならない．健全度 $I$ は，補修のない限りマルコフ連鎖における吸収状態であり，$\pi_{II} = 1$ が成立する．なお，マルコフ推移確率は過去の劣化履歴には依存しない．マルコフ連鎖モデルでは，健全度が $i-1$ から $i$ に推移した時点に拘わらず，時刻 $t_A$ から時刻 $t_B$ の間に推移する確率は時刻 $\tau_A$ における健全度のみに依存するという性質（マルコフ性）を満足する [12)]．

### (2) 混合マルコフ劣化ハザードモデルの定式化

分析対象とする取付管を $K$ 個のグループに分割する．$K$ 個のグループのそれぞれは，**2.(3)** で言及したメッシュ（領域）に対応する．グループ $k$ $(k = 1,\ldots,K)$ は，合計 $L_k$ 個の取付管で構成され，各取付管単位で目視点検が実施される．グループ $k$ に固有なハザード率の異質性を表すパラメータ $\varepsilon^k$ を導入する．このとき，グループ $k$ の取付管 $l_k$ $(l_k = 1,\ldots,L_k)$ の健全度 $i$ $(i = 1,\ldots,I-1)$ のハザード率を，個別ハザード率

$$\theta_i^{l_k} = \tilde{\theta}_i^{l_k} \varepsilon^k \tag{3}$$
$$(i = 1,\ldots,I-1; k = 1,\ldots,K; l_k = 1,\ldots,L_k)$$

を用いて表す．ここに，$\tilde{\theta}_i^{l_k}$ は，グループ $k$ の取付管 $l_k$ が有する健全度 $i$ の平均的なハザード率（以下，標準ハザード率）である．異質性パラメータ $\varepsilon^k$ は，グループ $k$ の標準ハザード率 $\tilde{\theta}_i^{l_k}$ からの乖離の程度を表す確率変数であり，$\varepsilon^k \geq 0$ が成立すると仮定する．異質性パラメータ $\varepsilon^k > 1$ であり，かつ $\varepsilon^k$ の値が大きくなるほど，当該グループ $k$ に含まれる全ての取付管の劣化速度が，標準ハザード率に対して大きいことを表す．式 (3) において，全ての健全度のハザード率に，同一の確率変数 $\varepsilon^k$ が含まれることに留意してほしい．これにより，ある健全度において劣化速度が大きい場合，他の健全度の劣化速度も相対的に大きくなることを表すことができる．いま，異質性パラメータ $\varepsilon^k$ がガンマ分布 $\mathcal{G}(\alpha,\gamma)$

$$\bar{g}(\varepsilon^k \mid \alpha,\gamma) = \frac{1}{\gamma^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\varepsilon^k\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\varepsilon^k}{\gamma}\right) \tag{4}$$

から抽出された確率標本であると考える．ガンマ分布 $\mathcal{G}(\alpha,\gamma)$ の平均は $\alpha\gamma$ で，分散は $\alpha\gamma^2$ である．また，$\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である．さらに，平均 1，分散 $1/\phi$ のガンマ分布の確率密度関数 $\bar{g}(\varepsilon^k \mid \phi)$ は，

$$\bar{g}(\varepsilon^k \mid \phi) = \frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)} (\varepsilon^k)^{\phi-1} \exp(-\phi\varepsilon^k) \tag{5}$$

と表される．

ここで，グループ $k$ $(k=1,\ldots,K)$ の異質性パラメータ $\varepsilon^k$ の値を $\bar{\varepsilon}^k$ に固定する．このとき，グループ $k$ のある取付管 $l_k$ の健全度 $i$ の寿命が $y_i^{l_k}$ 以上となる確率 $\tilde{F}_i(y_i^{l_k})$ は，式 (3) に示す指数ハザード率を用いて

$$\tilde{F}_i(y_i^{l_k}) = \exp(-\tilde{\theta}_i^{l_k}\bar{\varepsilon}^k y_i^{l_k}) \tag{6}$$

と書き換えることができる．さらに，グループ $k$ の取付管 $l_k$ の第 1 回目の点検時点 $\tau_A^{l_k}$ において健全度が $i$ と判定され，次の点検時点 $\tau_B^{l_k}=\tau_A^{l_k}+z^{l_k}$ においても健全度が $i$ と判定される確率 $\pi_{ii}(z^{l_k}\mid\bar{\varepsilon}^k)$ は，

$$\pi_{ii}(z^{l_k}\mid\bar{\varepsilon}^k) = \exp(-\tilde{\theta}_i^{l_k}\bar{\varepsilon}^k z^{l_k}) \tag{7}$$

となる．また，点検時点 $\tau_A^{l_k}$ と $\tau_B^{l_k}=\tau_A^{l_k}+z^{l_k}$ の間で健全度が $i$ から $j$ $(>i)$ に推移するマルコフ推移確率 $\pi_{ij}(z^{l_k}\mid\bar{\varepsilon}^k)$ は，式 (3) より，

$$\pi_{ij}(z^{l_k}\mid\bar{\varepsilon}^k) = \sum_{s=i}^{j}\psi_{ij}^s(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{l_k})\exp(-\tilde{\theta}_s^{l_k}\bar{\varepsilon}^k z^{l_k}) \tag{8}$$

$$(i=1,\ldots,I-1;\ j=i+1,\ldots,I;\ k=1,\ldots,K)$$

と表すことができる．ただし，$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{l_k}=(\tilde{\theta}_1^{l_k},\ldots,\tilde{\theta}_{I-1}^{l_k})$ である．また，$\psi_{ij}^s(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{l_k})$ は

$$\psi_{ij}^s(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{l_k}) = \prod_{m=i}^{s-1}\frac{\tilde{\theta}_m^{l_k}}{\tilde{\theta}_m^{l_k}-\tilde{\theta}_s^{l_k}}\prod_{m=s}^{j-1}\frac{\tilde{\theta}_m^{l_k}}{\tilde{\theta}_{m+1}^{l_k}-\tilde{\theta}_s^{l_k}} \tag{9}$$

となり，標準ハザード率のみの関数で表される．また，$\pi_{iI}(z^{l_k}\mid\bar{\varepsilon}^k)$ に関しては，

$$\pi_{iI}(z^{l_k}\mid\bar{\varepsilon}^k) = 1-\sum_{j=i}^{I-1}\pi_{ij}(z^{l_k}\mid\bar{\varepsilon}^k) \tag{10}$$

と表すことができる．つぎに，パラメータ $\varepsilon^k$ が，式 (5) で示したガンマ分布に従って分布する場合を考える．まず，健全度 $i$ の寿命が $y_i^{l_k}$ 以上となる確率は，式 (7) を用いて

$$\tilde{\pi}_{ii}(z^{l_k}) = \int_0^\infty \pi_{ii}(z^{l_k}\mid\varepsilon^k)\bar{g}(\varepsilon^k|\phi)d\varepsilon^k \tag{11}$$

と表すことができる．マルコフ推移確率 $\tilde{\pi}_{ii}(z^{l_k})$ はハザード率の確率分布を考慮した点検間隔 $z^{l_k}$ の平均的なマルコフ推移確率を表している．同様に点検間隔 $z^{l_k}$ の下で健全度 $i$ から健全度 $j$ へ推移する平均マルコフ推移確率は，

$$\tilde{\pi}_{ij}(z^{l_k}) = \int_0^\infty \pi_{ij}(z^{l_k}\mid\varepsilon^k)\bar{g}(\varepsilon^k|\phi)d\varepsilon^k \tag{12}$$

と表される．

### (3) ハザード率と期待劣化パス

グループ $k$ $(k=1,\ldots,K)$ に属する取付管 $l_k$ $(l_k=1,\ldots,L_k)$ に関して 1 回の点検が実施されたと考える．点検が実施されたカレンダー時刻を $\tau_A^{l_k}$ と表す．グループ $k$ に含まれる取付管 $l_k$ の点検サンプルには，供用開始から点検が実施された時刻までの期間長 $\bar{z}^{l_k}$ と，点検で観測された取付管の健全度 $\bar{h}(\tau_A^{l_k})$ に関する情報が記載されている．記号「 ¯ 」は，実測値であることを意味している．点検時点における健全度に基づいて，ダミー変数 $\bar{\delta}_j^{l_k}$ $(j=1,\ldots,I;\ k=1,\ldots,K;\ l_k=1,\ldots,L_k)$ を

$$\bar{\delta}_j^{l_k} = \begin{cases} 1 & \bar{h}(\tau_A^{l_k})=j \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases} \tag{13}$$

と定義する．さらに，ダミー変数ベクトルを $\bar{\boldsymbol{\delta}}^{l_k}=(\bar{\delta}_1^{l_k},\ldots,\bar{\delta}_I^{l_k})$, 取付管の劣化速度に影響を及ぼす構造条件や環境条件を表す特性行ベクトルを $\bar{\boldsymbol{x}}^{l_k}=(\bar{x}_1^{l_k},\ldots,\bar{x}_M^{l_k})$ と表す．ただし，$\bar{x}_m^{l_k}$ $(m=1,\ldots,M)$ はグループ $k$，取付管 $l_k$ の点検サンプルの $m$ 番目の説明変数を表す．また, 第 1 番目の説明変数は定数項に該当する変数であり，恒等的に $x_1^{l_k}=1$ である．グループ $k$ に属する取付管 $l_k$ の点検サンプルが有する情報を $\boldsymbol{\xi}^{l_k}=(\bar{\boldsymbol{\delta}}^{l_k},\bar{z}^{l_k},\bar{\boldsymbol{x}}^{l_k})$ と表す．また，目視点検データ全体を $\boldsymbol{\Xi}$ と表す．

さらに，取付管 $l_k$ の点検サンプルの劣化過程を個別ハザード率 $\theta_i^{l_k}=\tilde{\theta}_i^{l_k}\varepsilon^k$ $(i=1,\ldots,I-1)$ を用いて表現する．健全度 $I$ はマルコフ連鎖の吸収状態であり，$\pi_{II}=1$ が成立するために標準ハザード率 $\tilde{\theta}_I^{l_k}$ は必然的に $\tilde{\theta}_I^{l_k}=0$ となる．取付管の劣化過程を特徴づける標準ハザード率 $\tilde{\theta}_i^{l_k}$ $(i=1,\ldots,I-1;\ k=1,\ldots,K)$ は道路区間の特性ベクトルに依存して変化すると考え，標準ハザード率 $\tilde{\theta}_i^{l_k}$ を特性ベクトル $\boldsymbol{x}^{l_k}$ を用いて，

$$\tilde{\theta}_i^{l_k} = \exp\left[\boldsymbol{\beta}_i(\boldsymbol{x}^{l_k})'\right] \tag{14}$$

と表す．ただし，$\boldsymbol{\beta}_i=(\beta_{i,1},\ldots,\beta_{i,M})$ は未知パラメータ $\beta_{i,m}$ $(m=1,\ldots,M)$ による行ベクトル，記号「$'$」は転置操作を表す．また，$x_1^{l_k}=1$ より，$\beta_{i,1}$ は定数項を表す．また本研究では，未知パラメータ $(\boldsymbol{\beta},\phi,\boldsymbol{\varepsilon})$ の推定に階層ベイズ推計を用いるが，具体的な方法論については参考文献 [15] を参照されたい．

さらに，グループ $k$ を構成する取付管 $l_k$ ごとの推計結果を平均化した標準ハザード率 $\tilde{\theta}_i^k$ $(i=1,\ldots,I-1)$ を

$$\tilde{\theta}_i^k = \exp\left[\boldsymbol{\beta}_i(\boldsymbol{x}^k)'\right] \tag{15}$$

$$\text{ただし}\quad \boldsymbol{x}^k = \left(\boldsymbol{x}_1^k,\ldots,\boldsymbol{x}_M^k\right) = \left(\sum_{l_k=1}^{L_k}\frac{x_1^{l_k}}{L_k},\ldots,\sum_{l_k=1}^{L_k}\frac{x_M^{l_k}}{L_k}\right)$$

と定義する．このとき，グループ $k$ の平均的ハザード率は $\theta_i^k=\tilde{\theta}_i^k\varepsilon^k$ と表される．

### (4) 劣化・更新モデル

取付管の劣化・更新過程をマルコフ推移確率を用いてモデル化する．$S$ 本の取付管を分析対象とし，個々の取付管に ID として $s$ を付与する．また取付管 $s$ のマルコフ推移確率を $\pi_{s,ij}(z)$ と表現する．取付管 $s$ $(s=1,\ldots,S)$

に対して，その供用開始時刻を起点とする離散的時間軸

$$\tau_{s,w+1} = \tau_{s,w} + z \ (w = 0, \ldots, W_s) \tag{16}$$

を導入する．式 (16) の離散的時間軸上の個々の点を時点と呼ぶ．$\tau_{s,W_s}$ は点検結果（健全度観測結果）が利用可能な時点，$\tau_{s,0}$ が供用開始時点，$\tau_{s,1}, \ldots, \tau_{s,W_s-1}$ が点検結果は利用不可能であるが，健全度 $I$（更新を要する状態）となった取付管を検出することは可能な時点，にそれぞれ相当する．また，$z$ は個々の隣接する時点の単位時間間隔であり，全ての取付管に対して同一の値であるとする．供用開始時点 $\tau_{s,0}$ において取付管 $s$ の健全度は 1 であるとする．また，時点 $\tau_{s,W_s}$ の取付管の健全度を $i_s$ $(i_s = 1, \ldots, I)$ と表す．取付管 $s$ のこれまでの更新回数を $R_s$ とし，過去の更新時点を $\tau_{s,a_{s,1}}, \tau_{s,a_{s,2}}, \ldots, \tau_{s,a_{s,R_s}}$ と定義する．更新時点の時点番号集合を $\boldsymbol{a}_s = (a_{s,1}, \ldots, a_{s,R_s})$ と定義する．なお，$a_{s,r} < a_{s,r+1}$ が成立し，$a_{s,1} \geq 1$，$a_{s,R_s} < W_s$ であるとする．供用開始後，劣化が進展して健全度 $I$ に到達した取付管が更新されると考える．一方で，健全度が $I-1$ 以下の取付管には更新が行われないと考える．このことを，更新時点 $\tau_{s,a_{s,r}}$ での更新に関して，供用開始時点あるいは前回の更新時点で健全度が 1 であった状態から，劣化により期間 $[\tau_{s,a_{s,r-1}}, \tau_{s,a_{s,r}})$ 内に健全度が $I$ まで進展し，時点 $\tau_{s,a_{s,r}}$ で更新により健全度が 1 まで即座に回復する過程としてモデル化する．このとき，取付管 $s$ において，時点 $\tau_{s,0}$ で健全度が 1 であるという条件のもとで，各更新時点に更新が行われ，時点 $\tau_{s,W_s}$ で健全度が $i_s$ となることの同時確率 $\xi_s(\boldsymbol{a}_s, i_s)$ は

$$\xi_s(\boldsymbol{a}_s, i_s) = \left\{ \prod_{r=1}^{R_s} \pi_{s,1I}\big[(a_{s,r} - a_{s,r-1})z\big] \right\} \cdot \pi_{s,1i_s}\big[(W_s - a_{s,R_s})z\big] \tag{17}$$

と表せる．なお，$a_{s,0} = 0$ とする．

### (5) 更新本数を考慮した劣化・更新モデル

これまでの定式化では，更新時点に関する情報 $\boldsymbol{a}$ を既知としてモデル化したが，本研究で利用する情報は，各行政区ごとの更新本数のみである．以下では，分析対象の取付管群における個々の行政区での更新が実施され，各取付管の健全度 $i_s$ が生起することの同時確率を導出する．一般性を失うことなく，取付管 1 の供用開始時点がカレンダー時間軸において最も古いと考える．$\tau_{1,0}$ を起点 $t_0$ とした離散的時間軸

$$t_{u+1} = t_u + z \ (u = 0, 1, 2, \ldots, U) \tag{18}$$

を定義する．時点 $\tau_{1,u}$ は時点 $t_u$ に対応する．また，取付管 $2, \ldots, S$ の個々の時点 $\tau_{s,r}$ に関しては，カレンダー時間軸を介して離散的時間軸 $t_0, \ldots, t_U$ のいずれかの点に一意に対応している．時点 $t_U$ は，全ての取付管の中で $\tau_{s,W_s}$ に相当するカレンダー時間が最も新しい取付管の $\tau_{s,W_s}$ に対応して決定される．時点 $\tau_{s,r}$ と時点 $t_u$ の対応関係は時点番号の変換関数 $r = \iota(s,u)$ により表現され，時点 $t_u$ は時点 $\tau_{s,\iota(s,u)}$ に対応する．なお，時点 $t_u$ において，取付管 $s$ が供用開始前，あるいは，点検時点 $\tau_{s,W_s}$ を迎えている場合には，$\iota(s,u) = 0$ となるとする．

ここで分析対象のエリアを行政区に分割する．行政区 $v$ $(v = 1, \ldots, V)$ 内に存在する取付管の ID の集合を $\boldsymbol{R}_v$ とする．全ての取付管はいずれかの行政区 $v = 1, \ldots, V$ 内に存在するものとする．また，過去に行政区 $v$ 内での更新が行われた取付管の本数を $G_v$ とする．行政区 $v$ において，供用開始後かつ点検時点 $\tau_{s,W_s}$ を迎えていない取付管及びその時点集合を当該行政区での更新候補集合として $\boldsymbol{B}_v$ とする．すなわち，

$$\boldsymbol{B}_v = \{(s,u) \mid \iota(s,u) \neq 0, \ s \in \boldsymbol{R}_v\} \tag{19}$$

である．$\boldsymbol{B}_v$ の冪集合を $\mathfrak{P}(\boldsymbol{B}_v) = \{\boldsymbol{\gamma} \mid \boldsymbol{\gamma} \subseteq \boldsymbol{B}_v\}$ と表す．$\mathfrak{P}$ の元の中で，要素数が $G_v$ である元の集合 $\boldsymbol{F}_v$ を，

$$\boldsymbol{F}_v = \big\{ \boldsymbol{f} \,\big|\, |\boldsymbol{f}| = G_v, \ \boldsymbol{f} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{B}_v) \big\} \tag{20}$$

と定義する．$\boldsymbol{F}_v$ の個々の元は，行政区 $v$ で生じ得る取付管の更新パターンを表しており，当該更新パターンにて更新される取付管の ID の集合である．$\boldsymbol{F}_v$ の直積集合として集合 $\boldsymbol{N}$ を，

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{F}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{F}_V \tag{21}$$

と定義する．ここで，$|\boldsymbol{N}| = H$ とし，$\boldsymbol{N}$ の $h$ $(h = 1, \ldots, H)$ 番目の元を $\boldsymbol{n}_h$ と表す．$\boldsymbol{n}_h$ は，個々の行政区の更新本数 $G_1, \ldots, G_V$ を全て満足するような，全ての行政区での更新パターンのある組合せを表している．更新パターン $h$ において，ある取付管 $s$ が更新される時点番号集合 $\boldsymbol{c}_{h,s}$ を

$$\boldsymbol{c}_{h,s} = \{\iota(s,u) \mid (s,u) \in \boldsymbol{n}_h, \forall\, u\} \tag{22}$$

と表す．$\boldsymbol{c}_{h,s}$ は，**(4)** の $\boldsymbol{a}_s$ に相当し，$\boldsymbol{c}_{h,s}$ の個々の要素を $c_{h,s,1}, c_{h,s,2}, \ldots$ とすると，更新パターン $h$ において，取付管 $s$ が時点 $\tau_{s,c_{h,s,1}}, \tau_{s,c_{h,s,2}}, \ldots$ にそれぞれ更新されることを意味する．

このとき，更新パターン $h$ を経て，各取付管の健全度 $i_s$ が生起する同時確率 $\xi(\boldsymbol{c}_h, \boldsymbol{i})$ は，

$$\xi(\boldsymbol{c}_h, \boldsymbol{i}) = \prod_{s=1}^{S} \xi_s(\boldsymbol{c}_{h,s}, i_s) \tag{23}$$

で与えられる．なお，$\boldsymbol{c}_h = (\boldsymbol{c}_{h,1}, \ldots, \boldsymbol{c}_{h,S})$，$\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_S)$ である．以上より，個々の行政区 $v$ で更新本数が $G_v$ となり，各取付管の健全度 $i_s$ が生起する同時確率 $\chi(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{i})$ は，

$$\chi(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{i}) = \sum_{h=1}^{H} \xi(\boldsymbol{c}_h, \boldsymbol{i}) \tag{24}$$

と定式化できる．ただし，$\boldsymbol{G} = (G_1, G_2, \ldots, G_V)$ である．

### (6) 尤度関数

式 (24) の同時確率 $\chi(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{i})$ に含まれるパラメータ $\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{I-1}, \phi, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^K)$ を推定するための尤度関数を定式化する．パラメータ推定のために観測できる情報は，各時点での更新数上限値 $\bar{G}_u\,(u = 1, \ldots, U)$，および点検データ $\boldsymbol{\Xi}$ である．記号「¯」は，観測情報であることを表す．$\bar{\boldsymbol{G}} = (\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_U)$，$\bar{\boldsymbol{\Omega}} = (\bar{\boldsymbol{G}}, \boldsymbol{\Xi})$ と観測情報を整理する．観測情報 $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ の個々の要素の同時生起確率は，式 (24) で $\chi(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{i})$ としてすでに与えられているため，尤度関数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}})$ は，

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}}) = \chi(\bar{\boldsymbol{G}}, \bar{\boldsymbol{i}}) \tag{25}$$

と定式化できる．

各行政区での更新本数 $\bar{G}_v$ が大きい場合，更新本数 $\bar{\boldsymbol{G}}$ の制約のもとで取り得る更新パターンの数 $\bar{H}$ が極めて膨大となり，式 (25) の尤度関数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}})$ の計算が現実的な時間内に収まらない可能性がある．そこで，本研究では，計算負荷低減のために，更新パターン $h$，すなわち，個々の行政区でどの取付管がどの時点において更新されたかが既知であるとして尤度関数を再定義する．このような操作は完備化操作 [16] と呼ばれ，それにより定義された尤度関数を完備化尤度関数と呼ぶ．完備化尤度関数は，式 (25) の尤度関数と比べ大幅に簡略化されることとなるが，完備化尤度関数に含まれる更新パターン $h$ は，本来，観測できない変数である．そこで，更新パターンを確率変数（潜在変数）として取り扱い，モデルを推定する．具体的には，完備化尤度関数と潜在変数の全条件付生起確率に基づき，パラメータと潜在変数をマルコフ連鎖モンテカルロ法（MCMC 法）[17),18)] により同時サンプリングしてモデル推定を行う．このような手順により，完備化尤度関数を用いて求めたパラメータのベイズ推定値が，式 (25) の尤度関数を用いて求めたパラメータの最尤推定値に収束することが証明されている [19]．

### (7) 完備化尤度関数

式 (25) の尤度関数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}})$ において，更新パターン $h$ を所与とした場合の尤度関数（完備化尤度関数）を定式化する．ここでは，推定アルゴリズムの都合上，更新時点の集合 $\boldsymbol{c}_{h,s}$ ではなく，各取付管の個々の時点での更新の有無を表す 0-1 変数 $\eta_{s,u}$ を考える．時点 $t_u$ で，取付管 $s$ が更新される場合，$\eta_{s,u} = 1$ とする．一方，時点 $t_u$ で，取付管 $s$ の更新が行われない，あるいは，取付管 $s$ が供用開始前もしくは $\tau_{s,W_s}$ 以降である場合，$\eta_{s,u} = 0$ とする．$\boldsymbol{\eta}_s = (\eta_{s,1}, \ldots, \eta_{s,U})$ は，ある更新パターン $h$ に相当し，$\boldsymbol{\eta}_s$ が定まると $\boldsymbol{c}_{h,s}$ が，

$$\boldsymbol{c}_{h,s} = \{\iota(s,u) \mid \eta_{s,u} = 1, \forall\, u\} \tag{26}$$

と一意に定まる．以下では，$\boldsymbol{c}_{h,s}$ および $h$ が $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_S)$ より一意に決定されることを明示するために $\boldsymbol{c}_h$ を $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\eta})$ と書き改める．

$\boldsymbol{\eta}$ を潜在変数として取扱い，$\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ と表記する．記号「˜」は潜在変数であることを意味する．$\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ は観測できない情報であるが，ひとまず，所与であると考える．所与とした $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ は，更新本数 $\bar{\boldsymbol{G}}$ の制約条件を満足している．すなわち

$$\sum_{s \in \boldsymbol{R}_v} \sum_{u} \tilde{\eta}_{s,u} = \bar{G}_v \,\forall\, v \tag{27}$$

が成立すると考える．このとき，尤度関数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}})$ は，

$$\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \xi(\boldsymbol{c}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}), \bar{\boldsymbol{i}}) \tag{28}$$

となる．以上の操作は完備化操作と呼ばれ，式 (28) が完備化尤度関数で表すことを示すために，$\mathcal{L}(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}})$ ではなく，$\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}})$ と表記している．完備化尤度関数 $\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}})$ には，式 (24) に含まれていた $h$ に関する総和が含まれておらず，$\mathcal{L}(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}})$ と比べ $\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}})$ が大幅に簡略化されていることがわかる．

### (8) 推定方法

式 (28) の完備化尤度関数 $\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}})$ に基づきパラメータ $\boldsymbol{\nu}$ を推定する．完備化尤度関数 $\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}})$ に含まれる潜在変数 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ は観測できない変数であるため，確率変数として取り扱い，MCMC 法によりパラメータと同時にサンプリングする．具体的には，メトロポリス・ヘイスティングス法 (MH 法)[20] を用いて，以下で定式化するパラメータの事後確率密度，潜在変数の全条件付生起確率から，パラメータと潜在変数を同時サンプリングする．

#### a) パラメータの事後確率密度

$\boldsymbol{\nu}$ が事前分布 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\nu})$ に従うと仮定する．$\bar{\boldsymbol{\Omega}}$，$\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ が与件であるときに，未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\nu}$ の同時事後確率密度 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}})$ はベイズの定理より，

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \propto \mathcal{L}^*(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\nu}) \tag{29}$$

と近似できる．さらに，事前確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\nu})$ を，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\nu}) &= \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}, \phi, \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\varepsilon} \mid \phi) \boldsymbol{\pi}(\phi) \\ &= \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{k=1}^{K} \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{i}}) \boldsymbol{\pi}(\varepsilon^k \mid \phi) \boldsymbol{\pi}(\phi) \end{aligned} \tag{30}$$

と展開する．混合マルコフ劣化ハザードモデルの異質性パラメータ $\varepsilon$ の確率分布とその確率分布のパラメータ $\phi$ の事前分布が階層構造になっている．階層ベイズ推計では未知パラメータ $\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\beta}, \phi, \boldsymbol{\varepsilon})$ の事前分布を設

定し，各パラメータの条件付事後確率密度関数を算出する．階層ベイズモデルに対しては代表的な MCMC 法であるギブスサンプリング法や MH 法を組み合わせて事後分布を算出する階層ベイズ推計が提案されている．

また，式 (30) の未知パラメータ $\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{I-1}, \phi, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^K)$ の事前確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\nu})$ をそれぞれ以下のように設定する．まず，$\boldsymbol{\beta}_i$ の事前確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}_i)$ として多次元正規分布を用いる．すなわち $\boldsymbol{\beta}_i \sim \mathcal{N}_M(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$ である．ただし，$\mathcal{N}_M(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$ は期待値ベクトルを $\boldsymbol{\mu}_i$，分散共分散行列を $\boldsymbol{\Sigma}_i$ とした $M$ 次元正規分布である．$\varepsilon^k$ の事前確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\varepsilon^k \mid \phi)$ はガンマ分布 (5) としてすでに与えられている．さらに，式 (5) のガンマ分布の制御パラメータ $\phi$ の事前確率密度関数 $\boldsymbol{\pi}(\phi)$ としてガンマ分布 $\mathcal{G}(\alpha, \gamma)$ を設定する．すなわち，$\varepsilon^k \sim \mathcal{G}(\phi, 1/\phi)$，$\phi \sim \mathcal{G}(\alpha, \gamma)$ である．

したがって，同時事後確率密度関数は，

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \\
&\propto \mathcal{L}^*(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{k=1}^{K} \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta_i}) \boldsymbol{\pi}(\varepsilon^k \mid \phi) \boldsymbol{\pi}(\phi) \\
&\propto \mathcal{L}^*(\boldsymbol{\nu} \mid \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \prod_{i=1}^{I-1} \exp\left[ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\mu}_i) \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\mu}_i)' \right] \\
&\cdot \prod_{k=1}^{K} \frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)} (\varepsilon^k)^{\phi-1} \exp(-\phi \varepsilon^k) \cdot \frac{1}{\gamma^\alpha \Gamma(\alpha)} \phi^{\alpha-1} \exp\left( -\frac{\phi}{\gamma} \right)
\end{aligned}
\tag{31}
$$

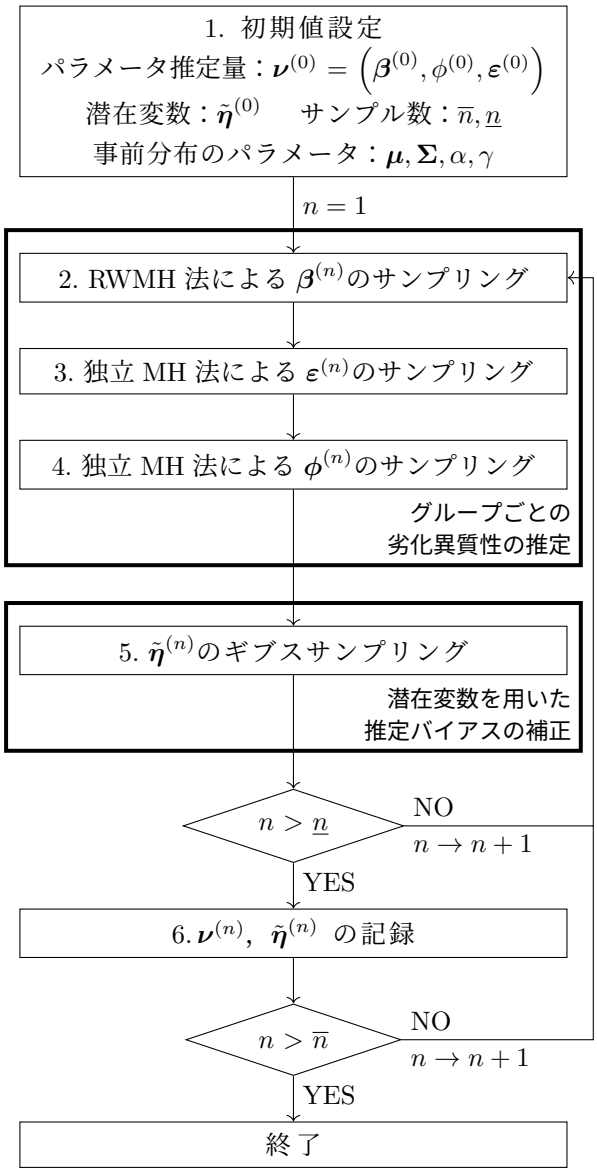
のように定式化することができる．$\boldsymbol{\beta}$ の個々の要素を同時サンプリングすることによる次元の呪いを緩和するために，ギブスサンプリングにより個々の $\beta_{i,m}$ の条件付事後確率密度からのサンプリングを行う．$\beta_{i,m}$ の条件付事後確率密度は解析的に求めることができないために，MH 法により事後分布からの標本をサンプリングする．

**b)　潜在変数の全条件付生起確率**

潜在変数 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ の全条件付生起確率 $\zeta(\tilde{\boldsymbol{\eta}} \mid \boldsymbol{\nu}, \bar{\boldsymbol{\Omega}})$ は，

$$
\begin{aligned}
&\zeta(\tilde{\boldsymbol{\eta}} \mid \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\Omega}) \\
&\propto \begin{cases} \xi(c(\tilde{\boldsymbol{\eta}}), \bar{\boldsymbol{i}}) & \left(\sum_{s \in \boldsymbol{R}_v} \sum_u \tilde{\eta}_{s,u} = \bar{G}_v \, \forall v \text{ のとき}\right) \\ 0 & \left(\sum_{s \in \boldsymbol{R}_v} \sum_u \tilde{\eta}_{s,u} \neq \bar{G}_v \, \exists v \text{ のとき}\right) \end{cases}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

で与えられる．式 (32) の全条件付生起確率 $\zeta(\tilde{\boldsymbol{\eta}} \mid \boldsymbol{\beta}, \bar{\boldsymbol{\Omega}})$ には，パラメータ $\boldsymbol{\nu}$ が含まれるため，潜在変数の全条件付生起確率を先験的に求めることはできない．そのため，MCMC 法において，全条件付生起確率 $\xi(c(\tilde{\boldsymbol{\eta}}), \bar{\boldsymbol{i}})$ により潜在変数 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ をパラメータ $\boldsymbol{\nu}$ と同時に反復的にランダム発生させる．潜在変数 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ に関しても，全条件付生起確率 $\xi(c(\tilde{\boldsymbol{\eta}}), \bar{\boldsymbol{i}})$ から，$\tilde{\boldsymbol{\eta}}^v = \{\tilde{\eta}_{s,u} \mid s \in \boldsymbol{R}_v, \forall s\}$ の条件付生起確率を求め，ギブスサンプリングにより個々の $\tilde{\boldsymbol{\eta}}^v$ をサンプリングする．その際，個々のサンプリングには，MH 法を用いる．具体的な推計方法を図–4 にまとめる．




図–4　推計のフローチャート

## 4.　おわりに

本研究では，利用可能な点検履歴が 1 回のみである点検データに対して，劣化予測を実施した際に寿命が過大推計される問題と，劣化速度の異質性を同時に考慮可能な劣化予測モデルを開発した．具体的には混合マルコフ劣化ハザードモデルの推定において，取付管が供用期間中に更新されている可能性を考慮し，潜在変数を導入した上で劣化更新過程を推定することにより，点検履歴の欠損と劣化速度の異質性を同時に考慮可能なモデルを提案した．なお，本研究で提案した方法論を用いて，A 市下水道管渠を対象とした実証分析を行っており，その結果及び考察に関しては研究発表

会にて提示する．

## 参考文献


1) 国土交通省：国土交通白書，p.156，2016.
2) 国土交通省水管理・国土保全局下水道部：下水道事業の現状と課題，2019.
3) 国土交通省水管理・国土保全局下水道部下水道事業課事業マネジメント推進室：ストックマネジメントについて，2019.
4) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73, pp.69-82, 2005.
5) 青木一也，山本浩司，小林潔司：劣化予測のためのハザードモデルの推計，土木学会論文集，No.791/VI-67，pp.111-124，2005.
6) 水谷大二郎，小林潔司，風戸崇之，貝戸清之，松島格也：連続量を用いた劣化ハザードモデル：舗装耐荷力への適用，土木学会論文集 D3（土木計画学），Vol.72，No.2，pp.191-210．2016.
7) 二宮陽平，水谷大二郎，貝戸清之：更新履歴情報の欠損を考慮した道路照明柱の劣化予測手法，土木学会論文集 F4，Vol.78，No.1，pp.118-132，2022.
8) 小濱健吾，岡田貢一，貝戸清之，小林潔司：劣化ハザード率評価とベンチマーキング，土木学会論文集 A，Vol.64，No.4，pp.857-874，2008.
9) 横田敏宏，深谷渉，宮本豊尚：下水道管路施設に起因する道路陥没の現状（2006 − 2009 年度），国土技術政策総合研究所資料，第 668 号，2012.
10) 貝戸清之，篠崎秀太，鎌田敏郎，前川波奈江，山中明彦：下水道管渠の空間的劣化異質性に着目した重点管理区域スクリーニングと改築更新施策，土木学会論文集 F4，Vol.77，No.1，pp.115-134，2021.
11) 貝戸清之，松本圭史，鎌田敏郎，北野陽一郎，山中明彦：空間マッピングを用いた下水道管渠の健全度シミュレーションと改築更新区域の抽出，土木学会論文集，Vol.79，No.1，22-00111，2023.
12) 森村英典，高橋幸雄：マルコフ解析，日科技連，1979.
13) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
14) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
15) 貝戸清之，小林潔司，青木一也，松岡弘大：混合マルコフ劣化ハザードモデルの階層ベイズ推定，土木学会論文集 D3，Vol.68，No.4，pp.255-271，2012.
16) Dempster, A. P., Laird, N. M. and Rubin, D. B.: Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm, *Journal of the Royal Statical Society: Series B*, Vol.39, pp.1-38, 1977.
17) 和合肇：ベイズ計量経済分析，マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用，東洋経済新聞社，2005.
18) 伊庭幸人，種村正美，大森裕浩，和合肇，佐藤整尚，高橋明彦：計算統計Ⅱマルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺，岩波書店，2005.
19) Diebolt, J and Robert, C. P.: Estimation of Finite Mixture Distributions through Bayesian Sampling, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, Vol.56, pp.363-375, 1994.
20) Hastings, W. K.: Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications, *Biometrika*, Vol.57, Issue 1, pp.97-109,1970.
21) Geweke, J.: Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments, *Bayesian Statistics*, Vol.4, pp.169-193, Oxford University Press, 1996.