層別修繕効果の評価に向けた修繕履歴による劣化過程の異質性分析

新 雄成 [1]・笹井 晃太郎 [2]・貝戸 清之 [3]・小林 潔司 [4]・神谷 恵三 [5]

[1]学生会員　大阪大学大学院 工学研究科 地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: y.nii@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[2]正会員　大阪大学大学院 工学研究科 地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: k.sasai@civil.eng.osaka-u.ac.jp
[3]正会員　大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp
[4]フェロー会員　京都大学経営管理大学院特任教授（〒 606-8501 京都市左京区吉田本町）
E-mail: kobayashi.kiyoshi.6n@kyoto-u.jp
[5]正会員　中日本高速道路株式会社 高度技術推進部（〒 460-0003 名古屋市中区錦 2-18-19）
E-mail: k.kamiya.ab@c-nexco.co.jp

我が国の高速道路アスファルト舗装では，表層材料が密粒度舗装から高機能舗装へと推移したことと，経年に伴う構造耐荷力の低下が相まって，損傷部位の深層化が生じている．この状況を受け，舗装維持管理の実務では損傷状態に応じた層別修繕が実施され，耐荷力指標となる FWD 調査記録と修繕履歴のデータ化が進められてきた．舗装維持管理の効率化に繋げていくためには，取得されたデータをもとに舗装構造の劣化予測と層別修繕効果の評価を行い，戦略的な修繕計画を策定する必要がある．そこで本研究では，従来の劣化予測手法を拡張し，層別修繕効果を評価するための方法論を提案する．具体的には，修繕の実施による劣化過程の異質性を確率変数で表現し，修繕前後の劣化速度の差異を推定する．これにより，層別修繕後の劣化速度低減効果を評価することが可能となる．さらに，実際の高速道路で取得されたデータをもとに実証分析を行い，分析結果について考察する．

Key Words : *stratified repair, falling weight deflectometer, deterioration heterogeneity, repair effect*

1. はじめに

アスファルト舗装は道路表面から順に，表層，基層，上層路盤，下層路盤により構成される [1]．表層は密粒度舗装と高機能（排水性）舗装に大別され，近年では高機能舗装が標準的に採用されている．その理由は，雨天時の交通事故低減や車両騒音の吸音等の付加機能を高機能舗装が有する点にある．これらの機能はポーラス構造により発揮されるものの，表層から基層上面へ雨水を通水させることとなり，損傷は基層以下の深層において発生しやすい．加えて，高速道路舗装は経年劣化の進行により構造耐荷力が低下していることもあり，基層のみならず上層路盤まで打ち替える修繕が増えつつある．しかし，深層を対象とした修繕は費用や工事期間が嵩むこととなり，予算の制約等からその修繕延長は減少する．今後は，傷んでから直すという対処的措置から戦略的な修繕計画の策定を図る必要がある．そのためには，対象層別の修繕効果を定量的に評価することが重要である．

社会基盤施設の統計的劣化予測手法には，マルコフ劣化ハザードモデル [2] を基幹モデルとして開発された拡張モデルが数多く存在する．特に舗装構造の修繕効果を定量的に評価するために，貝戸等 [3] は，構造耐荷力の経年による低下に加えて，修繕時の向上を表現できるモデルを提案した．具体的には，構造耐荷力を離散的なランクに区分し，ランクが推移する様子を，1) 経年により低下する劣化過程と 2) 修繕時に向上する回復過程との複合過程として記述した．更に，劣化・回復過程における推移確率を推定するために，修繕直前・直後のランクを潜在変数と捉えてモデル化し，耐荷力調査データと修繕履歴データをもとにした推定手法を提案した．これにより，修繕時に耐荷力がどの程度回復したかを，推移確率として定量化することが可能となった．しかし，同モデルでは修繕前後の劣化速度の差異を考慮できていない点が課題として残されている．修繕対象層より下層に損傷が蓄積する箇所では，その後の劣化速度にも影響することが想定される．ゆえに，層別修繕が修繕後の劣化速度に与える影響の違いを，修繕前後の劣化速度の差異として考慮する必要がある．本研究では，そのための方法論を提案する．具体的には，まず，FWD 調査が実施される直前の修繕履歴により高速道路の各地点・時点をグルーピングする．次に，グ

ループごとの劣化速度の差異が異質性パラメータ ε に表れると考え，これを推定する．更に，推定された異質性パラメータの相対比較により，修繕による耐荷力低下速度の低減効果を評価する．以下，**2.** で本研究の基本的な考え方を説明する．**3.** では劣化・回復過程を考慮した上で，修繕前後の劣化速度の差異を表現する混合マルコフ劣化ハザードモデルを定式化する．**4.** では提案モデルを推定するための方法論を提案する．

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 損傷部位の深層化

アスファルト舗装の舗装構造は，道路表面から順に表層，基層，上層路盤，下層路盤という複数の層で構成される多層構造を有している．路面は自動車利用による摩耗や繰り返し荷重，天候・気象等の直接的な影響により劣化が進展する．加えて深層における損傷の発生が路面にも影響し，表層におけるひび割れやわだち掘れ，平坦性の低下等の現象が発生する．一方で，基層や上層路盤，下層路盤も雨水や地下水の浸透，繰り返し荷重の作用等により劣化が進展する．表層は，密粒度舗装と高機能舗装に大別される．表層に密粒度舗装が用いられていた昭和 40 年から平成 10 年にかけては表層におけるひび割れやわだち掘れ等の損傷が見られることが多く，それに対する修繕として主に表層の切削オーバーレイが実施されていた．平成 10 年以降表層に高機能舗装が用いられるようになると，表層において損傷が顕在化する前に基層の方が先に損傷するケースが増加した．すなわち，基層や路盤においてアスファルトの剥離や土砂化，疲労ひび割れの発生，脆弱化等が起きた後，それに起因するポンピング現象やポットホール等の損傷が表層において見られるようになった．これは，高機能舗装が表面の水を基層へ通水させるという構造上の特徴を有しているためである．このような状況に応じて，基層を含めた 2 層の打ち換えが標準的な修繕工法になりつつある．基層以下の層を打ち換える場合，その層より上部に位置する層の全てを打ち換えることになる．つまり，基層修繕は表層修繕を，上層路盤修繕は基層修繕を，さらに極小事例である下層路盤修繕は上層路盤修繕を，それぞれ包含している．したがって，より深層を対象に修繕が実施されると，舗装構造の健全度はより大きく回復することに加えて，修繕後の劣化速度がより大きく低減されることも見込まれる．その一方で，修繕費用や工事期間は増大し，予算や規制時間の制約等から修繕延長を伸ばすことは難しくなる．今後は，傷んでから直すという対処的措置から戦略的な修繕計画の策定を図る必要がある．そのためには，対象層別の修繕効果を定量的に評価することが重要である．そこで本研究では，従来の劣化予測手法を拡張することにより，層別修繕効果を評価するための方法論を提案する．

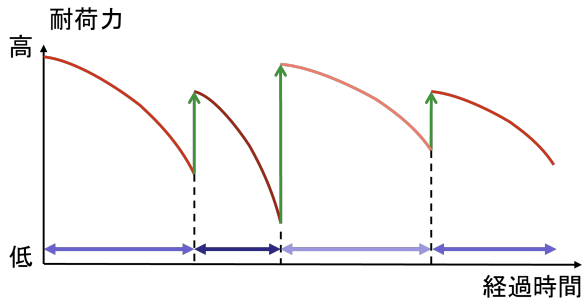
(2) 既往研究の概要（修繕効果の評価方法）

社会基盤施設を対象とした劣化予測手法であるマルコフ劣化ハザードモデルの開発以降，マルコフ劣化ハザードモデルを応用したモデルが数多く開発されている．貝戸等 [3] は，マルコフ劣化ハザードモデルを拡張し，高速道路の舗装構造を対象に層別修繕効果の評価を行うための方法論を提案した．具体的には，舗装構造の耐荷力推移を劣化・回復の複合過程として記述し，それぞれの推移確率を算出するために，修繕直前・直後の耐荷力ランクを潜在変数と捉えモデル化し，2 時点間の調査データと修繕履歴をもとにした推定手法を提案した．これにより，調査時点間に修繕履歴の存在するデータをもとにした舗装構造の劣化予測に加え，修繕時の回復を推移確率として定量化することが可能となった．しかしながら，確定的なただ 1 つの劣化速度を考え劣化過程を表現している（すなわち，平均的な 1 つの劣化過程とその周りにおける劣化過程の誤差分布を表現している）ために，システム的要因（修繕施工時の状態や修繕対象層以深における損傷の蓄積等）によって層別修繕の前後における劣化過程が異なることを考慮できていない点が課題として残されている．

システム的要因による劣化過程の差異に関して，小濱等 [4] は，対象施設群を複数の施設グループに分割しグループごとの劣化過程の差異を不可観測要因による異質性として捉え，施設グループ単位での劣化ハザード率を推定するための混合マルコフ劣化ハザードモデルを開発した．また，水谷等 [5] は，混合マルコフ劣化ハザードモデルを用いることにより，補修前と補修後の劣化過程の異質性に関して相対比較を行い補修効果を定量化することが可能であることを示した．ただし，補修効果が異質性の支配的要素となるように，異質性の評価単位を適切に設定することが重要であると言及している．同モデルを高速道路舗装の層別修繕効果の評価に応用する際には，後に **2.(3)** にて示すように，修繕工事区間ごとを異質性の評価単位とすることが適切であると考えられる．

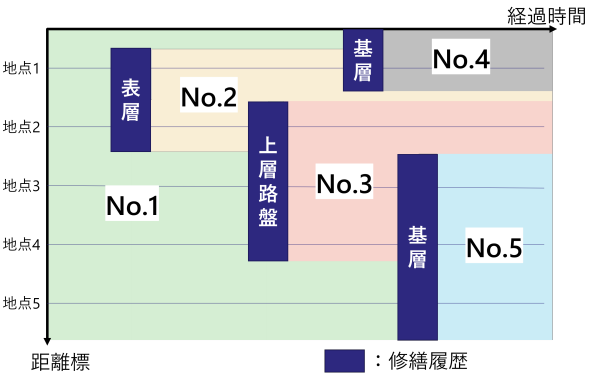
(3) 異質性を考慮した劣化・回復の複合過程モデル

舗装の構造耐荷力の推移を，1) 経年により耐荷力が低下する劣化過程と，2) 修繕時に耐荷力が向上する回復過程の複合過程として記述する．その概念図を**図–1** に示す．耐荷力が低下と不確実な回復を繰り返しながら推移する様子が見て取れる．図中の赤線で表される劣化過程の差異は，構造条件，環境条件，使用条件の



注）緑色の矢印は大規模修繕による耐荷力の回復量を示す．舗装耐荷力のような性能指標は，実施タイミングや工法によって回復量が異なることが想定される．また，青色の両矢印は修繕タームを示す．深層における損傷の蓄積によって，修繕タームごとに耐荷力の低下速度が異なる場合がある．

図–1 耐荷力の推移



注）同一グループを色分けして示している．なお青帯は修繕が実施されたことを表すが，各青帯に記載した層を対象に修繕が実施されたことを想定している．

図–2 グルーピングのイメージ

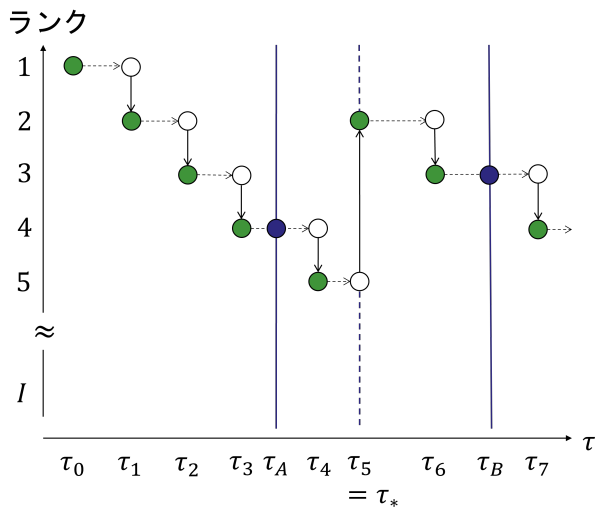
不確実性により生じる．図中の緑矢印で表される回復過程の推移の差異は，層別の修繕による不確実性（修繕工法，タイミング，施工の品質）が大きいと考えられる．さらに，修繕ターム（供用開始または修繕直後から次の修繕直前までの期間，図中の青両矢印）ごとに劣化過程は異なることが想定される．これは，層別の修繕により，修繕層より下層（例えば，基層修繕が実施された場合の上層路盤・下層路盤・路床）には損傷の蓄積が進む場合も考えられるためである．すなわち，損傷の蓄積が進んでいる層よりも上層の修繕に留めてしまった場合，修繕前よりも修繕後の方が低下速度は速まると考えられる．あるいは，損傷の蓄積が進んでいる層を適切に選定して修繕が実施された場合，荷重を下層へと伝える上層部分が一新されるため，修繕後の低下速度は遅くなることも考えられる．以上を踏まえ，1）層別修繕による構造耐荷力の回復量と，2）層別修繕後の耐荷力低下速度の低減効果を定量的に評価可能である点に本研究の新規性と独自性がある．

混合マルコフ劣化ハザードモデル [4] では，劣化過程に介在する異質性を確率変数で表現する．すなわち，評価単位とする施設グループに特有のシステム的要因に基づく劣化速度の違いが，異質性を表すパラメータ（以下，異質性パラメータ）に表れると考える．評価単位の設定に関しては，分析者の目的により変化する．例えば，宮崎等 [6] は，高速道路舗装の重点管理路線の抽出を目的に，評価単位を個々の路線に設定した分析を行った．森等 [7] は，国道のある路線に着目し，当該路線における重点管理区間の抽出を目的に，道路構造物である橋梁，トンネル，交差点をもとに道路区間を区分し，これを評価単位とした分析を行った．本研究においては，層別修繕後における耐荷力低下速度の低減効果を評価することを目的としているため，FWD 調査が実施された個々の地点別に**図–1** に示すような修繕タームを設けた上で，修繕タームごとの劣化速度の差異を異質性パラメータにより表現することを試みる．しかし，調査地点×修繕タームによる評価単位を設定すると，個々の施設グループに属する調査ペアが極少数となってしまう懸念がある．そこで，本研究では，修繕タームが同一の修繕工事（修繕履歴データ上において同一時点に同一層かつ連続した区間を対象に実施された修繕工事）によって定義される区間を同一グループと見なし，これを評価単位とする．そのイメージを**図–2** に示すとともに，**図–2** を用いて以下に具体的なグルーピングの手順を記す．まず，供用開始以後の全区間（**図–2** における地点 1〜5）をグループ No.1 とする．次に，修繕工事が行われた場合，それ以後の修繕対象区間（地点 1,2）をグループ No.2 に更新する．同様の操作により，グループ No.3（地点 2〜4），グループ No.4（地点 1），グループ No.5（地点 3〜5）を順次更新していく．さらに，各修繕がどの層を対象に実施されていたかによって，グループを分類し，層別修繕効果を評価する．

3. モデル

(1) モデル化の前提条件

本研究においては，舗装構造の耐荷力が推移する過程を耐荷力が経年的に低下するマルコフ推移確率と修繕時に耐荷力が向上するマルコフ推移確率を用いた複合的確率過程として表現する．舗装構造の耐荷力の状態を I 個の離散的なランクを表す状態変数 $i\,(i=1,2,\cdots,I)$ を用いて表現する．耐荷力が最も高い状態を $i=1$ で表し，耐荷力が低下するほど状態変数 i の値は大きくなる．ある道路区間の耐荷力ランクに関する履歴が**図–3** に示すように与えられたとする．図中，時点 τ はカレンダー上の実時点を表す．時点 τ_0 で道路の供用が開始された直後から耐荷力の低下が始まる．図中の時点



注）時点 τ_A と τ_B において FWD 調査が実施され，耐荷力ランクがそれぞれ 4 と 3 であることが観測される．本図で直接観測可能な情報はこの 2 時点の耐荷力ランクだけであり，修繕実施時点 τ_5 において，修繕直前の耐荷力ランクが 5 であること，修繕直後の耐荷力ランクが 2 であることは実際には観測されない．

図–3 耐荷力ランクの推移

$\tau_n\,(n=1,2,\cdots)$ において，ランクが経年によって 1 段階低下，あるいは修繕によって多段階上昇している．耐荷力は同図における 2 つの時点 τ_A,τ_B で観測される．劣化過程において観測者が獲得できる情報は調査時点 τ_A,τ_B におけるランクのみであり，ランクが推移した時点 $\tau_n\,(n=1,2,\cdots)$ に関する情報は得られない．一方で，修繕が行われた時点 τ_* は判明しているため回復過程においてランクが推移した時点と修繕層 $b\,(b=1,\cdots,B)$ に関する情報は得られるが，そのときのランクについては判明しない．修繕が行われる直前の時点を τ_*^1，直後の時点を τ_*^2 とする．

(2) マルコフ推移確率モデル

本研究では，舗装耐荷力の低下過程をマルコフ推移確率モデルを用いて表現する．時点 τ_A におけるランクを状態変数 $h(\tau_A)$ を用いて表す．マルコフ推移確率は，時点 τ_A におけるランク $h(\tau_A)=i\ (i=1,\cdots,I)$ を与件とし，将来時点（例えば τ_B）において $h(\tau_B)=j$ が生起する条件付き推移確率として

$$\mathrm{Prob}\left[h(\tau_B)=j \mid h(\tau_A)=i\right]=\pi_{ij} \tag{1}$$

と定義される．当然のことながら，対象とする点検間隔が異なれば推移確率の値は異なる．修繕が実施されない限り常に劣化は進行するので，$\pi_{ij}=0\ (i>j)$ が成立する．また，推移確率の定義より $\sum_{j=i}^{I}\pi_{ij}=1$ が成立する．すなわち，マルコフ推移確率に関して，

$$\begin{cases}\pi_{ij}\geq 0 & (i\leq j)\\ \pi_{ij}=0 & (i>j)\\ \displaystyle\sum_{j=i}^{I}\pi_{ij}=1\end{cases} \tag{2}$$

が成立しなければならない．ランク I は，修繕のない限りマルコフ連鎖における吸収状態であり，$\pi_{II}=1$ が成立する．このような推移確率をランクペア (i,j) に対して求めれば，劣化過程のマルコフ推移確率行列

$$\boldsymbol{\Pi}=\begin{pmatrix}\pi_{11} & \cdots & \pi_{1I}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \pi_{II}\end{pmatrix} \tag{3}$$

を定義できる．なお，マルコフ推移確率は過去の劣化履歴には依存しない．マルコフ推移確率モデルではランクが $i-1$ から i に推移した時点に関わらず，時点 τ_A から時点 τ_B の間に推移する確率は時点 τ_A におけるランクにのみ依存するというマルコフ性 [8] を満足する．

次に，回復過程に関してもマルコフ推移確率モデルを用いて表現する．本来，回復前後の耐荷力は確定しているが，修繕時点において耐荷力が観測されないため修繕後に実現する耐荷力を確率変数で表す．時点 τ_* における修繕層を $l(\tau_*)$ を用いて表す．時点 τ_* において，$l(\tau_*)=b$ の修繕が行われ，修繕直前のランク $h(\tau_*^1)$ と修繕直後のランク $h(\tau_*^2)$ が仮に $h(\tau_*^1)=i$，$h(\tau_*^2)=j$ と与えられたとすると，マルコフ推移確率は $h(\tau_*^1)$，$l(\tau_*)$ を与件とし，$h(\tau_*^2)$ が生起する条件付き推移確率として定義される．すなわち，

$$\mathrm{Prob}\left[h(\tau_*^2)=j \mid h(\tau_*^1)=i, l(\tau_*)=b\right]=r_{ij}^b \tag{4}$$

と表せる．ただし，修繕により耐荷力が低下することはないため $r_{ij}^b=0\ (i<j)$ が成立する．また，推移確率の定義より $\sum_{j=1}^{i}r_{ij}^b=1$ が成立する．すなわち，回復過程のマルコフ推移確率に関して，

$$\begin{cases}r_{ij}^b\geq 0 & (i\geq j)\\ r_{ij}^b=0 & (i<j)\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{i}r_{ij}^b=1\end{cases} \tag{5}$$

が成り立つ．このような推移確率をランクペア (i,j) に対して求めれば，回復過程のマルコフ推移確率行列

$$\boldsymbol{R}^b=\begin{pmatrix}r_{11}^b & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{I1}^b & \cdots & r_{II}^b\end{pmatrix} \tag{6}$$

を定義できる．なお，回復過程に関しても，推移確率は過去の劣化履歴には依存しない．

(3) 劣化過程のマルコフ推移確率

劣化過程のマルコフ推移確率は混合マルコフ劣化ハザードモデルを用いて推定できる．同モデルの詳細は参考文献[4]に詳しいが，ここではモデルの概要を説明しておく．いま，分析対象とする高速道路区間から調査が実施された P 個の地点を抽出し，地点 $p\,(p=1,\cdots,P)$ における過去の修繕回数を o^p とする．さらに，各地点における修繕直後（供用開始直後を含む）から次の修繕直前までを 1 つの修繕タームとして定義し，地点 p の時点 τ における修繕タームを $\eta_\tau^p\,(\eta_\tau^p=0,\cdots,o^p)$ と表す．これら $\sum_{p=1}^{P}(o^p+1)$ 個の修繕タームを，修繕履歴に基づいて K 個のグループに分類する．グループ $k\,(k=1,\cdots,K)$ には，合計 L_k 個の修繕タームが含まれるとし，グループ k に含まれる任意の修繕タームを $l^k\,(l^k=1,\cdots,L^k)$ と表記する．$\sum_{p=1}^{P}(o^p+1)$ 個の修繕タームは，K 個のグループの内，いずれか 1 つのグループに必ず含まれる．

いま，グループ k に固有なハザード関数の異質性を表すパラメータ ε^k を導入する．この時，グループ k に含まれる修繕ターム $l^k\,(l^k=1,\cdots,L^k)$ のランク $i\,(i=1,\cdots,I-1)$ のハザード関数を，個別ハザード関数

$$\theta_i^{l_k}=\tilde{\theta}_i^{l_k}\varepsilon^k \quad (i=1,\cdots,I-1;k=1,\cdots,K;l_k=1,\cdots,L_k) \tag{7}$$

を用いて表す．ここに，$\tilde{\theta}_i^{l_k}$ はグループ k に含まれる修繕ターム l_k が有するランク i の平均的ハザード関数（以下，標準ハザード関数）である．異質性パラメータ ε^k は，グループ k の標準ハザード関数 $\tilde{\theta}_i^{l_k}$ からの乖離の程度を表す確率変数であり，$\varepsilon^k\geq 0$ が成立すると仮定する．異質性パラメータ ε^k の値が大きくなるほど，当該グループ k に含まれる全ての修繕タームにおける劣化速度が，標準ハザード関数に対して速いことを表す．式 (7) において，全てのランクのハザード率に同一の確率変数 ε^k が含まれることに留意されたい．これにより，あるランクにおいて劣化速度が速い場合，他のランクの劣化速度も相対的に大きくなることを表すことができる．いま，異質性パラメータ ε^k がガンマ分布 $f(\varepsilon^k\mid\gamma_1,\gamma_2)$

$$f\left(\varepsilon^k\mid\gamma_1,\gamma_2\right)=\frac{1}{\gamma_2^{\gamma_1}\Gamma(\gamma_1)}\left(\varepsilon^k\right)^{\gamma_1-1}\exp\left(-\frac{\varepsilon^k}{\gamma_2}\right) \tag{8}$$

から抽出された確率標本であると考える．ガンマ分布 $f(\varepsilon^k\mid\gamma_1,\gamma_2)$ の平均は $\gamma_1\gamma_2$ で，分散は $\gamma_1\gamma_2^2$ である．また，$\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である．さらに，平均 1，分散 $1/\phi$ のガンマ分布の確率密度関数 $\bar{f}(\varepsilon^k\mid\phi)$ は，

$$\bar{f}\left(\varepsilon^k\mid\phi\right)=\frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)}\left(\varepsilon^k\right)^{\phi-1}\exp\left(-\phi\varepsilon^k\right) \tag{9}$$

と表される．

ここで，グループ $k\,(k=1,\cdots,K)$ の異質性パラメータ ε^k を $\bar{\varepsilon}^k$ に固定する．このとき，グループ k に含まれる修繕ターム l_k におけるランク i の寿命が $y_i^{l_k}$ 以上になる確率 $\tilde{F}_i(y_i^{l_k})$ は，個別ハザード関数 (7) を用いて

$$\tilde{F}_i(y_i^{l_k})=\exp(-\tilde{\theta}_i^{l_k}\bar{\varepsilon}^k y_i^{l_k}) \tag{10}$$

と表すことができる．さらに，グループ k に含まれる修繕ターム l_k の調査時点 $\tau_A^{l_k}$ においてランクが i と判定され，次の調査時点 $\tau_B^{l_k}=\tau_A^{l_k}+z$ においてもランクが i と判定される確率 $\pi_{ii}(z\mid\bar{\varepsilon}^k)$ は，

$$\pi_{ii}(z\mid\bar{\varepsilon}^k)=\exp(-\tilde{\theta}_i^{l_k}\bar{\varepsilon}^k z) \tag{11}$$

となる．また，調査時点 $\tau_A^{l_k}$ と $\tau_B^{l_k}=\tau_A^{l_k}+z$ との間でランクが i から $j\,(>i)$ に推移するマルコフ推移確率 $\pi_{ij}(z\mid\bar{\varepsilon}^k)$ は，

$$\begin{aligned}&\pi_{ij}(z\mid\bar{\varepsilon}^k)\\&=\sum_{s=i}^{j}\prod_{m=i}^{s-1}\frac{\tilde{\theta}_m^{l_k}}{\tilde{\theta}_m^{l_k}-\tilde{\theta}_s^{l_k}}\prod_{m=s}^{j-1}\frac{\tilde{\theta}_m^{l_k}}{\tilde{\theta}_{m+1}^{l_k}-\tilde{\theta}_s^{l_k}}\exp(-\tilde{\theta}_s^{l_k}\bar{\varepsilon}^k z)\\&(i=1,\cdots,I-1;j=i+1,\cdots,I;k=1,\cdots,K)\end{aligned} \tag{12}$$

と表すことができる．ただし，表記上の規則として，

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{m=i}^{s-1}\frac{\tilde{\theta}_m^{l_k}}{\tilde{\theta}_m^{l_k}-\tilde{\theta}_s^{l_k}}=0 & (s=i\text{ の時})\\ \displaystyle\sum_{m=s}^{j-1}\frac{\tilde{\theta}_m^{l_k}}{\tilde{\theta}_{m+1}^{l_k}-\tilde{\theta}_s^{l_k}}=0 & (s=j\text{ の時})\end{cases} \tag{13}$$

が成立すると考える．さらに，表記の便宜上，

$$\begin{aligned}&\prod_{m=i}^{j-1}\frac{\tilde{\theta}_m^{l_k}}{\tilde{\theta}_m^{l_k}-\tilde{\theta}_s^{l_k}}\exp(-\tilde{\theta}_s^{l_k}\bar{\varepsilon}^k z)\\&=\prod_{m=i}^{s-1}\frac{\tilde{\theta}_m^{l_k}}{\tilde{\theta}_m^{l_k}-\tilde{\theta}_s^{l_k}}\prod_{m=s}^{j-1}\frac{\tilde{\theta}_m^{l_k}}{\tilde{\theta}_{m+1}^{l_k}-\tilde{\theta}_s^{l_k}}\exp(-\tilde{\theta}_s^{l_k}\bar{\varepsilon}^k z)\end{aligned} \tag{14}$$

と簡略化する．また，$\pi_{iI}(z\mid\bar{\varepsilon}^k)$ に関しては，マルコフ推移確率の条件より，

$$\begin{aligned}&\pi_{iI}(z\mid\bar{\varepsilon}^k)=1-\sum_{j=i}^{I-1}\pi_{ij}(z\mid\bar{\varepsilon}^k)\\&(i=1,\cdots,I-1)\end{aligned} \tag{15}$$

と表すことができる．次に，パラメータ ε^k がガンマ分布 (9) に従って分布する場合を考える．まず，ランク i の寿命が $y_i^{l^k}$ 以上となる確率は，式 (11) を用いて，

$$\tilde{\pi}_{ii}(z)=\int_0^\infty\pi_{ii}(z\mid\varepsilon^k)\bar{f}(\varepsilon^k\mid\phi)d\varepsilon^k \tag{16}$$

と表すことができる．マルコフ推移確率 $\tilde{\pi}_{ii}(z)$ はハザード関数の確率分布を考慮した点検間隔 z の平均的なマルコフ推移確率を表している．同様に点検間隔 z の下でランク i からランク j へと推移する平均マルコフ推

移確率は，

$$\tilde{\pi}_{ij}(z) = \int_0^\infty \pi_{ij}(z \mid \varepsilon^k)\bar{f}(\varepsilon^k \mid \phi)d\varepsilon^k \tag{17}$$

と表される．

ここで，標準ハザード関数 $\tilde{\theta}_i^{l_k}\,(i = 1, \cdots, I-1; k = 1, \cdots, K)$ が舗装の観測可能な構造条件，環境条件（舗装構成や交通量，降雨・積雪量）に依存して変化すると考える．具体的な標準ハザード関数を

$$\tilde{\theta}_i^{l_k} = \exp(\boldsymbol{x}^{l_k}\boldsymbol{\beta}_i') \tag{18}$$

と表す．ここに，$\boldsymbol{x}^{l_k} = (x_1^{l_k}, \cdots, x_D^{l_k})$ は，耐荷力の低下要因を表す説明変数ベクトルを表し，$\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{i1}, \cdots, \beta_{iD})$ は未知パラメータの行ベクトルを表す．また，記号「′」は転置操作を表す．式 (18) により，未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{I-1})$ の関数としてマルコフ推移確率を表現することができ，施設の構造条件，環境条件が劣化過程に及ぼす影響を定量化できる．

(4) 回復過程のマルコフ推移確率

回復過程のマルコフ推移確率 r_{ij}^b は，層 b を対象とする修繕が実施された際，修繕直前のランクが i のときに，修繕直後のランクが j に推移する確率を表す．本研究では r_{ij}^b をノンパラメトリックな離散的確率分布で表現する．すなわち，マルコフ推移確率 $r_{ij}^b\,(i = 1, \cdots, I;\, j = 1 \cdots, I;\, b = 1, \cdots, B)$ は，

$$r_{ij}^b = \begin{cases} \alpha_{ij}^b & (i \geq j \text{ のとき}) \\ 0 & (i < j \text{ のとき}) \end{cases} \tag{19}$$

と表される．ただし，α_{ij}^b は定数であり，

$$0 \leq \alpha_{ij}^b \leq 1 \tag{20a}$$

$$\sum_{j=1}^{i} \alpha_{ij}^b = 1 \tag{20b}$$

を満足する．以下，$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}^1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}^B)$ とし，$\boldsymbol{\alpha}^b = (\boldsymbol{\alpha}_1^b, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_I^b)\,(b = 1, \cdots, B)$，$\boldsymbol{\alpha}_i^b = (\alpha_{i1}^b, \cdots, \alpha_{ii}^b)\,(i = 1, \cdots, I)$ とする．

(5) 尤度関数の定式化

FWD 調査を実施すれば，その時点の耐荷力を観測することができる．一般に，路面性状調査等の結果に基づいて舗装の修繕計画等が策定される．舗装の修繕工事の直前と直後において FWD 調査が実施される機会はほとんど皆無である（特に FWD 調査は修繕層を決定することを主目的として実施されるため，修繕直後の調査データは存在しない）．したがって，FWD 調査が実施された 2 時点間において実施された修繕前後における耐荷力の推移を直接観測することは不可能である．このような観測の不可能性を考慮して，本研究では耐荷力の経年的変化過程を混合マルコフ劣化ハザードモデルの拡張により表現する．

いま，時点 τ_0 と τ_T において FWD 調査が行われ，その間の時点 $\tau_0 < \tau_t < \tau_T\,(t = 1, \cdots, T-1)$ において修繕が実施されたとする．ただし，$T = 1$ の場合，調査時点間に修繕が実施されなかったことを意味する．時点 τ_0 に観測された耐荷力ランクを $h(\tau_0) = \bar{i}_0$，時点 τ_T に観測された耐荷力ランクを $h(\tau_T) = \bar{i}_T$ と表し，時点 $\tau_t\,(t = 1, \cdots, T-1)$ における修繕層を $l(\tau_t) = b_t$ と表す．さらに，調査・修繕間隔を $z_t = \tau_t - \tau_{t-1}\,(t = 1, \cdots, T)$ とする．また，時点 τ_t における修繕ターム η_{τ_t} が属するグループを $k_t\,(t = 1, \cdots, T)$ とする．ただし，このとき，$t = T$ の場合を除き，τ_t は修繕が行われる直前の時点を指す．修繕層ベクトル $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_{T-1})$，調査・修繕間隔ベクトル $\boldsymbol{z} = (z_1, \cdots, z_T)$，グループベクトル $\boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_T)$ を与件とし，耐荷力ランク $\{\bar{i}_0, \bar{i}_T\}$ が観測される尤度関数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varepsilon}, \phi, \bar{i}_0, \bar{i}_T, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{k})$ は，再帰的に

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varepsilon}, \phi, \bar{i}_0, \bar{i}_T, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{k}) = \ell_{\bar{i}_0}^r(0) \tag{21a}$$

$$\ell_h^r(t-1) = \sum_{w=h}^{I} \pi_{hw}(z_t \mid \varepsilon^{k_t})\ell_w^\pi(t) \qquad 1 \leq t \leq T-1 \tag{21b}$$

$$\ell_w^\pi(t) = \sum_{h=1}^{h} r_{wh}^{b_t}\ell_h^r(t) \qquad 1 \leq t \leq T-1 \tag{21c}$$

$$\ell_h^r(T-1) = \pi_{h\bar{i}_T}(z_T \mid \varepsilon^{k_T}) \qquad t = T \tag{21d}$$

と定義される．ただし，$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^K)$ である．

小濱等 [4] は，混合マルコフ劣化ハザードモデルを最尤法を用いて推定する手法を提案している．しかし，尤度関数 (21a)-(21d) は単峰性の条件を満足しないなど，最尤法に適さない性質を持っていることが知られている [11]．最尤法の代わりにベイズ推定法を用いた場合にも，尤度関数 (21a)-(21d) は極めて多くの項を含んでおり，計算量が膨大になってしまう欠点がある [12)−15)]．このため，尤度関数の完備化操作が必要となる．

(6) 完備化操作

着目する道路地点において，時点 τ_0 と τ_T に FWD 調査が行われ，時点 $\tau_0 < \tau_t < \tau_T\,(t = 1, \cdots, T-1)$ において修繕が実施されたとする．このとき，耐荷力ランク $\{\bar{i}_0, \bar{i}_T\}$ と修繕層ベクトル $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_{T-1})$，調査・修繕間隔ベクトル $\boldsymbol{z} = (z_1, \cdots, z_T)$，グループベクトル $\boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_T)$ が獲得できたと考える．ここで，混合マルコフ劣化ハザードモデルを推定するために修繕直後の耐荷力ランクを示す潜在変数ベクトル $\boldsymbol{u} = (u_0, \cdots, u_{T-1})$，修繕直前の耐荷力ランクを示す潜

在変数ベクトル $\boldsymbol{d}=(d_1,\cdots,d_T)$ を導入する．ただし，$u_0=\bar{i}_0$，$d_T=\bar{i}_T$ である．潜在変数 $(u_1,\cdots,u_{T-1})$，$(d_1,\cdots,d_{T-1})$ は観測不可能な変数であるが，ひとまず潜在変数が観測できたと考える．潜在変数ベクトルを与件とした尤度関数は，

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi,\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{z},\boldsymbol{k})\\&=\prod_{t=1}^{T-1}r_{d_tu_t}^{b_t}\cdot\prod_{t=1}^{T}\pi_{u_{t-1}d_t}(z_t\mid\varepsilon^{k_t})\\&=\prod_{t=1}^{T-1}\alpha_{d_tu_t}^{b_t}\cdot\prod_{t=1}^{T}\sum_{s=u_{t-1}}^{d_t}\\&\qquad\prod_{m=u_{t-1},\neq s}^{d_t-1}\frac{\tilde{\theta}_m}{\tilde{\theta}_m-\tilde{\theta}_s}exp(-\tilde{\theta}_s\varepsilon^{k_t}z_t)\end{aligned}\tag{22}$$

と表現できる．ただし，表記上の規則として，$T=1$ のとき，

$$\prod_{t=1}^{T-1}r_{d_tu_t}^{b_t}=\prod_{t=1}^{T-1}\alpha_{d_tu_t}^{b_t}=1\tag{23}$$

が成立すると考える．以上の操作を完備化という．完備化された尤度関数 (22)（以下，完備化尤度関数と呼ぶ）は通常の尤度関数 (21a)-(21d) より大幅に簡略化されていることが理解できる．ただし，尤度関数の中に含まれる潜在変数 $(u_1,\cdots,u_{T-1})$，$(d_1,\cdots,d_{T-1})$ は観測できない変数である．そこで完備化尤度関数を用いて，潜在変数の確率分布を推定することを考える．完備化尤度関数を展開すれば，潜在変数 $(u_1,\cdots,u_{T-1})$，$(d_1,\cdots,d_{T-1})$ に関する条件付事後確率分布を導出できる．ここで，$\boldsymbol{u}_{-t}=(u_0,\cdots,u_{t-1},u_{t+1},\cdots,u_{T-1})$，$\boldsymbol{u}_{-t}^{i}=(u_0,\cdots,u_{t-1},i,u_{t+1},\cdots,u_{T-1})$ とすれば，$u_t=i\,(t=1,\cdots,T-1)$ の全条件付き事後確率は，ベイズの法則より

$$\begin{aligned}&\mathrm{Prob}\left[u_t=i\mid\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi,\boldsymbol{u}_{-t},\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{z},\boldsymbol{k}\right]\\&=\frac{\tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi,\boldsymbol{u}_{-t}^{i},\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{z},\boldsymbol{k})}{\sum_{j=1}^{I}\tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi,\boldsymbol{u}_{-t}^{j},\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{z},\boldsymbol{k})}\\&=\frac{\omega_{it}^{u}}{\sum_{j=1}^{I}\omega_{jt}^{u}}\end{aligned}\tag{24}$$

と表される．ただし，

$$\omega_{it}^{u}=\begin{cases}r_{d_ti}^{b_t}\pi_{id_{t+1}}(z_{t+1}\mid\varepsilon^{k_{t+1}}) & (1\le t\le T-2)\\ r_{d_{T-1}i}^{b_{T-1}}\pi_{i\bar{i}_T}(z_T\mid\varepsilon^{k_T}) & (t=T-1)\end{cases}\tag{25}$$

である．また，$\boldsymbol{d}_{-t}=(d_1,\cdots,d_{t-1},d_{t+1},\cdots,d_T)$，$\boldsymbol{d}_{-t}^{i}=(d_1,\cdots,d_{t-1},i,d_{t+1},\cdots,d_T)$ とすれば，$d_t=i\,(t=1,\cdots,T-1)$ の全条件付き事後確率は，ベイズの法則より

$$\begin{aligned}&\mathrm{Prob}\left[d_t=i\mid\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi\boldsymbol{u},\boldsymbol{d}_{-t},\boldsymbol{b},\boldsymbol{z},\boldsymbol{k}\right]\\&=\frac{\tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi,\boldsymbol{u},\boldsymbol{d}_{-t}^{i},\boldsymbol{b},\boldsymbol{z},\boldsymbol{k})}{\sum_{j=1}^{I}\tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi,\boldsymbol{u},\boldsymbol{d}_{-t}^{j},\boldsymbol{b},\boldsymbol{z},\boldsymbol{k})}\\&=\frac{\omega_{it}^{d}}{\sum_{j=1}^{I}\omega_{jt}^{d}}\end{aligned}\tag{26}$$

と表される．ただし，

$$\omega_{it}^{d}=\begin{cases}\pi_{\bar{i}_0i}(z_1\mid\varepsilon^{k_1})r_{iu_1}^{b_1} & (t=1)\\ \pi_{u_{t-1}i}(z_t\mid\varepsilon^{k_t})r_{iu_t}^{b_t} & (2\le t\le T-1)\end{cases}\tag{27}$$

である．すなわち，劣化過程の推移確率 $\pi_{ij}(z\mid\varepsilon^{k})\,(i=1,\cdots,I;\,j=i,\cdots,I;\,k=1,\cdots,K)$ と回復過程の推移確率 $r_{ij}^{b}\,(i=1,\cdots,I;\,j=1,\cdots,i;\,b=1,\cdots,B)$ が求まれば，$\boldsymbol{u}_{-t}$，$\boldsymbol{d}$ を与件とした時点 τ_t の修繕直後ランク u_t，及び $\boldsymbol{d}_{-t}$，$\boldsymbol{u}$ を与件とした時点 τ_t の修繕直前ランク d_t の全条件付き事後確率を求めることができる．

完備化尤度関数 (22) では，潜在変数 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{d}$ は確定的である．ただし，劣化過程・回復過程の推移確率には未知パラメータ $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$，ϕ が含まれており，潜在変数に関する全条件付き事後確率を先験的に求めることができない．全条件付き事後確率 (24),(26) を用いた MCMC（Markov Chain Monte Carlo）法を用いて，反復的に潜在変数 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{d}$ をランダム発生させ，パラメータ $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$，ϕ をベイズ推定する．このような手続きにより，完備化尤度関数を用いて求めたパラメータのベイズ推定値が，真の尤度関数を用いて求めたパラメータの最尤推定値に収束することが証明されている [16]．

4. 推定方法

(1) MCMC 法

本研究で提案するモデルの推定では尤度関数が特殊な形をしており，通常の最尤法やベイズ推定法を用いることが困難である [11),12)]．そのため，混合分布モデルの推定方法として，通常の尤度関数ではなく完備化尤度関数を定義し，MCMC 法を用いて推定する方法が提案されている [11),17),18)]．小林等 [19)] は，隠れマルコフ劣化モデルを推定するための MCMC アルゴリズムの中に，マルコフ推移確率のベイズ推定アルゴリズムを内包した MCMC アルゴリズムを開発している．本研究では，小林等が開発した MCMC 法を参考に，修繕の直前と直後の耐荷力の観測不可能性を考慮した複合過程モデルをベイズ推定する方法論を提案する．

(2) 完備化事後確率密度関数の定式化

同一の道路地点において，異なる 2 つの時点で FWD 調査が実施され，2 時点のデータをペアとしたサンプルを定義する．このようなペアのサンプルが Q 個得られた

とする．獲得されたサンプルデータを $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\xi}^1,\cdots,\boldsymbol{\xi}^Q)$ と表す．ただし，$\boldsymbol{\xi}^q=(T^q,\bar{i}_0^q,\bar{i}_{T^q}^q,\boldsymbol{b}^q,\boldsymbol{z}^q,\boldsymbol{k}^q,\boldsymbol{x}^q)$ である．T^q-1 はペア q のサンプルデータが対象とする期間において修繕が行われた回数を表す．すなわち，時点 $\tau_t^q\,(t=1,\cdots,T^q-1)$ に修繕が，時点 $\tau_0^q,\tau_{T^q}^q$ に FWD 調査が行われたことを表す．$\bar{i}_0^q,\bar{i}_{T^q}^k$ は時点 $\tau_0^q,\tau_{T^q}^q$ における耐荷力ランク，$\boldsymbol{b}^q=(b_1^q,\cdots,b_{T^q-1}^q)$ は時点 τ_t^q における修繕が行われた層を示す修繕層ベクトル，$\boldsymbol{z}^q$ は調査・修繕の間隔を示す間隔ベクトル，$\boldsymbol{k}^q=(k_1^q,\cdots,k_{T^q-1}^q)$ は時点 τ_t^q 以降の修繕タームが属するグループベクトル，$\boldsymbol{x}^q$ はペア q の説明変数ベクトルである．このとき，提案モデルの完備化尤度関数は，Q 個のサンプルデータの完備化同時生起確率

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi,\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\xi})\\
&=\prod_{q=1}^{Q}\left\{\prod_{t=1}^{T^q-1} r_{d_t^q u_t^q}^{b_t^q}\prod_{t=1}^{T^q}\pi_{u_{t-1}^q d_t^q}(z_t^q\mid\varepsilon^{k_t^q})\right\}\\
&=\prod_{q=1}^{Q}\left\{\prod_{t=1}^{T^q-1}\alpha_{d_t^q u_t^q}^{b_t^q}\cdot\prod_{t=1}^{T^q}\sum_{s=u_{t-1}^q}^{d_t^q}\right.\\
&\qquad\left.\prod_{m=u_{t-1}^q,\neq s}^{d_t^q-1}\frac{\tilde{\theta}_m^q}{\tilde{\theta}_m^q-\tilde{\theta}_s^q}\exp(-\tilde{\theta}_s^q\varepsilon^{k_t^q}z_t^q)\right\}
\end{aligned}\tag{28}$$

で表される．ただし，ペアサンプル q に対して，標準ハザード関数 $\theta_i^q\,(i=1,\ldots,I-1)$ は，

$$\tilde{\theta}_i^q=\exp\left(\boldsymbol{x}^q\boldsymbol{\beta}_i'\right)\tag{29}$$

と表される．また，ペアサンプル q に対する潜在変数ベクトルを $\boldsymbol{u}^q=(u_0^q,\cdots,u_{T^q-1}^q)$，$\boldsymbol{d}^q=(d_1^q,\cdots,d_{T^q}^q)$ とし，$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}^1,\cdots,\boldsymbol{u}^q)$，$\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{d}^1,\cdots,\boldsymbol{d}^q)$ とする．

(3) ベイズ推定法

一般にベイズ推定法は，1) 事前の経験情報などに基づいて，パラメータ $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ の事前確率密度関数を設定する，2) 獲得したデータ $\boldsymbol{\xi}$ と潜在変数 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{d}$ に基づいて尤度関数 $\tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi,\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\xi})$ を定義する，さらに，3) ベイズの定理に基づいて事前確率密度関数を修正し，パラメータ $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$，ϕ に関する事後確率密度 $\rho(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi|\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\xi})$ を得る，という手順を採用する．最尤法と異なり，未知パラメータ $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$，ϕ の確率分布が，事後分布として求まる点にベイズ推定法の特徴がある．ハザードモデルでは，共役事前確率密度関数を見出すことは不可能 [20] であり，事前確率密度関数は，非共役事前確率密度関数を採用せざるを得ない．事前確率密度設定には，任意性が介在せざるを得ないが，サンプル数の増加につれて事前確率密度の特定化の影響は次第に低下する．

まず，回復過程のマルコフ推移確率に含まれるパラメータ $\boldsymbol{\alpha}_i^b=(\alpha_{i1}^b,\cdots,\alpha_{ii}^b)$ は，式 (20a)，(20b) を満足する定数である．これらの定数の事前確率密度関数として，ディリクレ分布を仮定する．すなわち，パラメータ $\boldsymbol{\alpha}_i^b\,(i=1,\cdots,I-1)$ の事前確率密度関数を

$$\eta_i(\boldsymbol{\alpha}_i^b|\boldsymbol{\nu}_i^b)=\Psi_i(\boldsymbol{\nu}_i^b)\prod_{m=1}^{i}(\alpha_{im}^b)^{\nu_{im}^b-1}\tag{30a}$$

$$\Psi_i(\boldsymbol{\nu}_i^b)=\frac{\Gamma(\nu_{i1}^b+\cdots+\nu_{ii}^b)}{\Gamma(\nu_{i1}^b)\cdots\Gamma(\nu_{ii}^b)}\tag{30b}$$

$$\sum_{m=1}^{i}\alpha_{im}^b=1\tag{30c}$$

と表現する．ただし，$\boldsymbol{\nu}_i^b=(\nu_{i1}^b,\cdots,\nu_{ii}^b)$ は，定数パラメータベクトルである．次に，$\boldsymbol{\beta}_i$ の事前確率密度関数が，標準的な事前確率密度関数として用いられる多次元正規分布に従うと仮定する．すなわち，$\boldsymbol{\beta}_i\sim\mathcal{N}_M(\boldsymbol{\zeta}_i,\boldsymbol{\Sigma}_i)$ である．ただし，$\boldsymbol{\zeta}_i$ は $\mathcal{N}_M(\boldsymbol{\zeta}_i,\boldsymbol{\Sigma}_i)$ の事前期待値ベクトル，$\boldsymbol{\Sigma}_i$ は事前分散共分散行列である．ε^k の事前確率密度関数は，ガンマ分布 (9) として既に与えられている．さらに，式 (9) のガンマ分布の制御パラメータ ϕ の事前確率密度関数としてガンマ分布を設定する．すなわち，$\varepsilon^k\sim\mathcal{G}(\phi,1/\phi)$，$\phi\sim\mathcal{G}(\gamma_{1^0},\gamma_{2^0})$ である．このとき，完備化事後確率密度関数 $\rho(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi|\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\xi})$ は，

$$\begin{aligned}
&\rho(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi|\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\xi})\\
&\propto\prod_{q=1}^{Q}\left\{\prod_{t=1}^{T^q-1}\alpha_{d_t^q u_t^q}^{b_t^q}\prod_{t=1}^{T^q}\sum_{s=u_{t-1}^q}^{d_t^q}\right.\\
&\qquad\left.\prod_{m=u_{t-1}^q,\neq s}^{d_t^q-1}\frac{\tilde{\theta}_m^q}{\tilde{\theta}_m^q-\tilde{\theta}_s^q}\exp(-\tilde{\theta}_s^q\varepsilon^{k_t^q}z_t^q)\right\}\\
&\cdot\prod_{i=1}^{I-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_i-\boldsymbol{\zeta}_i)\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}(\boldsymbol{\beta}_i-\boldsymbol{\zeta}_i)'\right\}\\
&\cdot\prod_{k=1}^{K}\frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)}\left(\varepsilon^k\right)^{\phi-1}\exp\left(-\phi\varepsilon^k\right)\\
&\cdot\frac{1}{\gamma_{2^0}^{\gamma_{1^0}}\Gamma(\gamma_{1^0})}\phi^{\gamma_{1^0}-1}\exp\left(-\frac{\phi}{\gamma_{2^0}}\right)\\
&\cdot\prod_{b=1}^{B}\prod_{i=1}^{I}\prod_{m=1}^{i}(\alpha_{im}^b)^{\nu_{im}^b-1}
\end{aligned}\tag{31}$$

と表すことができる．

(4) 推定フロー

潜在変数を導入したマルコフ劣化ハザードモデルでは，事後確率密度関数 $\rho(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi|\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\xi})$ を直接，解析的に求めることができない．そこで，代表的な MCMC 法であるギブスサンプリング法 [21] を用いて，パラメータ $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$，ϕ の標本サンプルを事後確率密度関数から抽出する．式 (31) において，$\boldsymbol{\alpha}$，$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi)$ は互いに独立であり，これらのパラメータに対する完備化条件

付事後確率密度関数 $\rho(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\xi})$，$\rho(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi|\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\xi})$ は，

$$\rho(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\xi}) \propto \left(\prod_{q=1}^{Q}\prod_{t=1}^{T^q-1}\alpha_{d_t^q u_t^q}^{b_t^q}\right) \cdot\left\{\prod_{b=1}^{B}\prod_{i=1}^{I}\prod_{m=1}^{i}(\alpha_{im}^b)^{\nu_{im}^b-1}\right\} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\varepsilon},\phi|\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\xi}) \propto &\left\{\prod_{q=1}^{Q}\prod_{t=1}^{T^q}\sum_{s=u_{t-1}^q}^{d_t^q}\right. \\ &\left.\prod_{m=u_{t-1}^q,\neq s}^{d_t^q-1}\frac{\tilde{\theta}_m^q}{\tilde{\theta}_m^q-\tilde{\theta}_s^q}\exp(-\tilde{\theta}_s^q\varepsilon^{k_t^q}z_t^q)\right\} \\ &\cdot\prod_{i=1}^{I-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_i-\boldsymbol{\zeta}_i)\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}(\boldsymbol{\beta}_i-\boldsymbol{\zeta}_i)'\right\} \\ &\cdot\prod_{k=1}^{K}\frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)}\left(\varepsilon^k\right)^{\phi-1}\exp\left(-\phi\varepsilon^k\right) \\ &\cdot\frac{1}{\gamma_{2^0}^{\gamma_{1^0}}\Gamma(\gamma_{1^0})}\phi^{\gamma_{1^0}-1}\exp\left(-\frac{\phi}{\gamma_{2^0}}\right) \end{aligned} \quad (33)$$

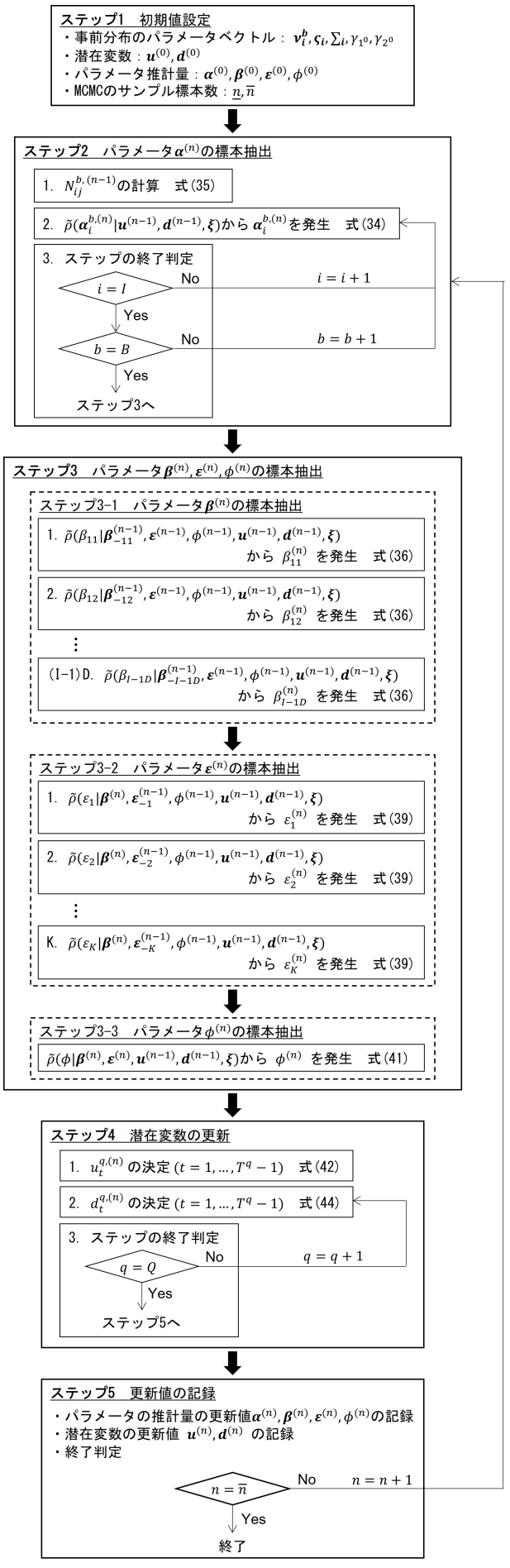
と表すことができる．また，潜在変数 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{d}$ の全条件付事後分布は，式 (24)，(26) で表される．以上のギブスサンプラーを用いた MCMC 法により，提案モデルをベイズ推定することが可能となる．なお，ギブスサンプリングにおける各パラメータの条件付事後確率密度関数の算出に際しても，事後分布から直接サンプリングすることは困難であるために，それぞれに対して MH 法を用いる必要がある．**図–4** に，提案モデルをベイズ推定するための具体的手順（ステップ 1 からステップ 5）を整理している．さらに，読者の便宜を図るために，同図中には推定手法の詳細を説明する節番号や式番号を明記している．以下では，**図–4** の各ステップの内容を，より詳細に説明する．

ステップ 1　初期値設定

事前分布のパラメータベクトル（行列）$\boldsymbol{\nu}_i^b$，$\boldsymbol{\zeta}_i$，$\boldsymbol{\Sigma}_i$，γ_{1^0}，γ_{2^0} の値を任意に設定する．さらに，潜在変数の初期値 $\boldsymbol{u}^{(0)} = (\boldsymbol{u}^{1,(0)},\cdots,\boldsymbol{u}^{Q,(0)})$，$\boldsymbol{d}^{(0)} = (\boldsymbol{d}^{1,(0)},\cdots,\boldsymbol{d}^{Q,(0)})$ を設定する．ただし，$\boldsymbol{u}^{q,(0)} = (u_0^{q,(0)},\cdots,u_{T^q-1}^{q,(0)})$，$\boldsymbol{d}^{q,(0)} = (d_1^{q,(0)},\cdots,d_{T^q}^{q,(0)})$ である．さらに，パラメータ推定量の初期値 $\boldsymbol{\alpha}^{(0)}$，$\boldsymbol{\beta}^{(0)}$，$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$，$\phi^{(0)}$ を任意に設定する．これらの初期値の影響は，MCMC 法によるシミュレーション回数が蓄積されるにつれ，次第に薄れていく．MCMC のサンプル標本回数 n を $n=1$ とする．さらに，MCMC のバーンインとするサンプル標本回数 $\underline{n}$，アルゴリズムの終了回数 $\overline{n}$ をそれぞれ設定する．

ステップ 2　パラメータ $\boldsymbol{\alpha}^n$ の標本抽出

ステップ 2 では，潜在変数 $\boldsymbol{u}^{(n-1)}$，$\boldsymbol{d}^{(n-1)}$ を与件とし，回復過程マルコフ推移確率のパラメータ $\boldsymbol{\alpha}^{b,(n)} = (\boldsymbol{\alpha}_1^{b,(n)},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_I^{b,(n)})\,(b=1,\cdots,B)$ に関するパラメータ



図–4　推定フロー

の標本を獲得する．ただし，$\boldsymbol{\alpha}_i^{b,(n)} = (\alpha_{im}^{b,(n)} : m = 1,\cdots,i)$ と表記する．ステップ 2 で用いるギブスサンプラーは式 (32) で表される完備化条件付事後確率密度関数 $\rho(\boldsymbol{\alpha}^{(n)}|\boldsymbol{u}^{(n-1)},\boldsymbol{d}^{(n-1)},\boldsymbol{\xi})$ で与えられる．潜在的な修繕直前・直後のランク $\boldsymbol{u}^{(n-1)}$，$\boldsymbol{d}^{(n-1)}$ と観測データ $\boldsymbol{\xi}$ を与件としたとき，完備化された $\boldsymbol{\alpha}_i^{b,(n)}$ に関するギブスサンプラーを，

$$\begin{aligned}
&\tilde{\rho}(\boldsymbol{\alpha}_i^{b,(n)}|\boldsymbol{u}^{(n-1)},\boldsymbol{d}^{(n-1)},\boldsymbol{\xi})\\
&\propto\left\{\prod_{q=1}^{Q}\prod_{t=1}^{T^q-1}\alpha_{d_t^{q,(n-1)}u_t^{q,(n-1)}}^{b_t^q(n)}\right\}\\
&\cdot\left\{\prod_{m=1}^{i}(\alpha_{im}^{b,(n)})^{\nu_{im}^b-1}\right\}\\
&=\prod_{m=1}^{i}(\alpha_{im}^{b,(n)})^{\nu_{im}^b+N_{im}^{b,(n-1)}-1}
\end{aligned}\tag{34}$$

と表すことができる．ただし，$N_{im}^{b,(n-1)}$ は潜在変数 $\boldsymbol{u}^{(n-1)}$，$\boldsymbol{d}^{(n-1)}$ を与件としたとき，

$$N_{im}^{b,(n-1)} = \#\left\{u_t^{q,(n-1)} = m \cap d_t^{q,(n-1)} = i\right\}\tag{35}$$

と定義される．なお，$\#\{\}$ は，括弧 $\{\}$ 内に含まれる定義式が成立するような観測サンプル数を表す．式 (35) は，パラメータ $\nu_{im}^b + N_{im}^{b,(n-1)} - 1$ を有するディリクレ分布に他ならない．更新されたディリクレ分布 (35) を用いて，ギブスサンプリングによりパラメータ標本 $\boldsymbol{\alpha}_i^{b,(n)}$ を標本抽出する．全ての $b\,(b=1,\cdots,B)$，$i\,(i=1,\cdots,I)$ に対してパラメータ標本 $\boldsymbol{\alpha}_i^{b,(n)}$ を求める．

ステップ 3　パラメータ $\boldsymbol{\beta}^{(n)}$，$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$，$\boldsymbol{\phi}^{(n)}$ の標本抽出

ステップ 3 では，潜在的な修繕直前・直後のランクで定義される混合マルコフ劣化ハザードモデルのパラメータ標本を抽出する．ステップ 3 のアルゴリズムを説明するために，未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}$ から要素 $\beta_{e_1m}(e_1 = 1,\cdots,I-1; m = 1,\cdots,D)$ を除いた未知パラメータベクトルを $\boldsymbol{\beta}_{-e_1m}$ と表す．同様に，未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ から要素 $\varepsilon_{e_2}\,(e_2 = 1,\cdots,K)$ を除いた未知パラメータベクトルを $\boldsymbol{\varepsilon}_{-e_2}$ と表す．このとき式 (33) より，$\boldsymbol{\beta}_{-e_1m}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\phi$ を既知としたときの β_{e_1m} の条件付事後確率密度関数 $\tilde{\rho}(\beta_{e_1m}|\boldsymbol{\beta}_{-e_1m},\boldsymbol{\varepsilon},\phi,\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\xi})$ は

$$\begin{aligned}
&\tilde{\rho}(\beta_{e_1m}|\boldsymbol{\beta}_{-e_1m},\boldsymbol{\varepsilon},\phi,\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\xi})\\
&\propto\prod_{i=1}^{e_1}\prod_{j=e_1}^{I}\prod_{q=1}^{Q}\prod_{t=1}^{T^q}\left\{\prod_{l=i}^{j-1}(\tilde{\theta}_l^q)^{\delta_{ij}^{tq}-\delta_{ie}^{tq}}\right.\\
&\left.\cdot\sum_{h=i}^{j}\prod_{l=i,\neq h}^{h-1}\frac{1}{\tilde{\theta}_l^q-\tilde{\theta}_h^q}\exp(-\tilde{\theta}_h^q\varepsilon^{k_t^q}z_t^q)\right\}^{\delta_{ij}^{tq}}\\
&\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_{e_1}-\boldsymbol{\zeta}_{e_1})\boldsymbol{\Sigma}_{e_1}^{-1}(\boldsymbol{\beta}_{e_1}-\boldsymbol{\zeta}_{e_1})'\right\}
\end{aligned}\tag{36}$$

と表すことができる．ただし，$\delta_{ie_1}^{tq}$，δ_{ij}^{tq} は

$$\delta_{ie_1}^{tq} = \begin{cases}1 & u_{t-1}^q = i = e_1\text{の時}\\ 0 & \text{それ以外の時}\end{cases}\tag{37}$$

$$\delta_{ij}^{tq} = \begin{cases}1 & u_{t-1}^q = i,\, u_t^q = j\text{ の時}\\ 0 & \text{それ以外の時}\end{cases}\tag{38}$$

となるダミー変数である．また，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_{-e_2}$，$\phi$ を既知としたときの ε_{e_2} の条件付事後確率密度関数 $\tilde{\rho}(\varepsilon_{-e_2}|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon}_{e_2},\phi,\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\xi})$ は，

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(\varepsilon_{-e_2}\mid\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon}_{e_2},\phi,\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\xi}) &\propto\prod_{q=1}^{Q}\prod_{t=1}^{T^q}\left\{\sum_{s=u_{t-1}^q}^{d_t^q}\right.\\
&\left.\prod_{m=u_{t-1}^q,\neq s}^{d_t^q-1}\frac{\tilde{\theta}_m^q}{\tilde{\theta}_m^q-\tilde{\theta}_s^q}\exp(-\tilde{\theta}_s^q\varepsilon^{k_t^q}z_t^q)\right\}^{\delta_{e_2}^{tq}}\\
&\cdot(\varepsilon_{e_2})^{\phi-1}\exp(-\phi\varepsilon_{e_2})
\end{aligned}\tag{39}$$

と表せる．ただし，$\delta_{e_2}^{tq}$ は，

$$\delta_{e_2}^{tq} = \begin{cases}1 & k_t^q = e_2\text{の時}\\ 0 & \text{それ以外の時}\end{cases}\tag{40}$$

となるダミー変数である．さらに，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$ を既知としたときの ϕ の条件付事後確率密度関数 $\tilde{\rho}(\phi|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\xi})$ は，

$$\begin{aligned}
&\tilde{\rho}\ (\phi|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\xi})\\
&\propto\prod_{k=1}^{K}\frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)}(\varepsilon^k)^{\phi-1}\exp(-\phi\varepsilon^k)\\
&\cdot\frac{1}{\gamma_{2^0}^{\gamma_{1^0}}\Gamma(\gamma_{1^0})}\phi^{\gamma_{1^0}-1}\exp\left(-\frac{\phi}{\gamma_{2^0}}\right)
\end{aligned}\tag{41}$$

と表すことができる．これらの条件付事後確率密度関数を用いて，式 (33) の同時事後確率密度関数をギブスサンプリングにより算出する．具体的な手順は，**図–4** の**ステップ 3** に示す通りである．ただし，条件付事後確率密度関数 (36)，(39)，(41) からは直接にサンプリングすることができない．この点に関して貝戸等 [22] は，条件付事後確率密度関数 (36)，(39)，(41) から標本を得る方法として，ランダムウォーク MH 法や独立 MH 法を組み合わせたアルゴリズムを提案している．

ステップ 4　潜在変数の更新

全条件付事後確率 (24)，(26) に基づいて，新しい潜在変数 $\boldsymbol{u}^{(n)}$，$\boldsymbol{d}^{(n)}$ をランダムサンプリングする．いま，潜在変数ベクトル $\boldsymbol{u}_{-t}^{q,(n-1)} = (u_0^q,\ldots,u_{t-1}^{q,(n)},u_{t+1}^{q,(n-1)},\cdots,u_{T^q-1}^{q,(n-1)})$，$\boldsymbol{d}_t^{q,(n-1)} = (d_1^{q,(n)},\ldots,d_t^{q,(n)},d_{t+1}^{q,(n-1)},\cdots,d_{T^q}^q)$ を定義する．このとき，$u_t^{q,(n)}$ の全条件付き事後確率は，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Prob}[u_t^{q,(n)} = i|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi,\boldsymbol{u}_{-t}^{q,(n-1)},\boldsymbol{d}_t^{q,(n-1)},\boldsymbol{\xi}]\\
&=\frac{\omega_{it}^{u,q,(n-1)}}{\sum_{j=1}^{I}\omega_{jt}^{u,q,(n-1)}}
\end{aligned}\tag{42}$$

と表される．ただし，

$$\omega_{it}^{u,q,(n-1)} = \begin{cases} r^{b_t^q}_{d_t^{q,(n-1)}i}\pi_{id_{t+1}^{q,(n-1)}}(z_{t+1}^q|\varepsilon^{k_{t+1}^q}) & (1 \le t \le T^q-2) \\ r^{b_{T^q-1}^q}_{d_{T^q-1}^{q,(n-1)}i}\pi_{i\bar{i}_{T^q}}(z_{T^q}^q|\varepsilon^{k_{T^q}^q}) & (t = T^q-1) \end{cases} \tag{43}$$

である．また，潜在変数ベクトル $\boldsymbol{u}_t^{q,(n-1)} = (u_0^{q,(n)},\ldots,u_{t-1}^{q,(n)},u_t^{q,(n-1)},\cdots,u_{T^q-1}),\ \boldsymbol{d}_{-t}^{q,(n-1)} = (d_1^{q,(n)},\ldots,d_{t-1}^{q,(n)},d_{t+1}^{q,(n-1)},\cdots,d_{T^q})$ を定義する．このとき，$d_t^{q,(n)}$ の全条件付き事後確率は，

$$\begin{aligned} &\mathrm{Prob}[d_t^{q,(n)} = i|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi,\boldsymbol{u}_t^{q,(n-1)},\boldsymbol{d}_{-t}^{q,(n-1)},\boldsymbol{\xi}] \\ &= \frac{\omega_{it}^{d,q,(n-1)}}{\sum_{j=1}^I \omega_{jt}^{d,q,(n-1)}} \end{aligned} \tag{44}$$

と表される．ただし，

$$\omega_{it}^{d,q,(n-1)} = \begin{cases} \pi_{\bar{i}_0^q i}(z_1^q|\varepsilon^{k_1^q})r^{b_1^q}_{iu_1^{q,(n-1)}} & (t=1) \\ \pi_{u_{t-1}^{q,(n-1)}i}(z_t^q|\varepsilon^{k_t^q})r^{b_t^q}_{iu_t^{q,(n-1)}} & (2 \le t \le T^q-1) \end{cases} \tag{45}$$

である．全ての $q\,(q=1,\cdots,Q)$ に対して，$t=1$ より逐次，潜在変数 $u_t^{q,(n)}\,(t=1,\cdots,T^q-1)$，$d_t^{q,(n)}\,(t=1,\ldots,T^q-1)$ を求める．

ステップ 5　更新値の記録

以上で求めたパラメータ推定量の更新値 $\boldsymbol{\alpha}^{(n)}$，$\boldsymbol{\beta}^{(n)}$，$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$，$\phi^{(n)}$，潜在変数の更新値 $\boldsymbol{u}^{(n)}$，$\boldsymbol{d}^{(n)}$ を記録する．$n < \overline{n}$ の場合，$n = n+1$ として，ステップ 2 へ戻る．そうでない場合，アルゴリズムを終了する．なお，以上のアルゴリズムの初期段階においては，パラメータの初期値設定の影響が残存している．このため，シミュレーション回数 n が十分大きな値になるまでは，パラメータ標本の発生過程が定常状態に達していないと考え，発生したパラメータ標本を除去することが望ましい．ここで，パラメータ標本として採用するシミュレーション回数 n の最小値を $\underline{n}$ と表す．すなわち，ギブスサンプリングで求めたサンプル $\boldsymbol{\alpha}^{(n)}$，$\boldsymbol{\beta}^{(n)}$，$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$，$\phi^{(n)}\,(n=\underline{n}+1,\underline{n}+2,\cdots,\overline{n})$ を，事後確率密度関数 $\rho(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi|\boldsymbol{\xi})$ からの標本と見なすこととする．従って，これらの標本を用いて，パラメータベクトル $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$，ϕ の事後分布に関する各層の統計量を計算することも可能となる．なお，ギブスサンプリングの定常性に関しては，Geweke 検定統計量 [23] を用いて判断する．

(5)　事後分布に関する統計量

MCMC 法によって得られた標本に基づいて，パラメータベクトル $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$，ϕ に関する統計的性質を分析することができる．MCMC 法を用いた場合，パラメータの事後確率密度関数 $\rho(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon},\phi|\boldsymbol{u},\boldsymbol{d},\boldsymbol{\xi})$ を解析的な関数として表現することはできない．得られた標本を用いてノンパラメトリックに分布関数や密度関数を推定することとなる．いま，ギブスサンプリングから得られた標本を $\boldsymbol{\theta}^{(n)} = (\boldsymbol{\alpha}^{(n)},\boldsymbol{\beta}^{(n)},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)},\phi^{(n)}) = (\theta_1^{(n)},\theta_2^{(n)},\cdots,\theta_{K_\theta}^{(n)})\,(n = 1,\cdots,\overline{n})$ と表す．なお，$K_\theta = B\sum_{i=1}^I i + D(I-1) + K + 1$ である．このうち，最初の $\underline{n}$ 個の標本は収束過程からの標本と考え，標本集合から除去する．そのうえで，パラメータ標本添え字集合を $M = \{\underline{n}+1,\cdots,\overline{n}\}$ と定義する．このとき，パラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ の同時確率分布関数 $G(\boldsymbol{\theta})$ は，

$$G(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\#\{\boldsymbol{\theta}^{(n)} \le \boldsymbol{\theta}, n \in M\}}{\overline{n}-\underline{n}} \tag{46}$$

と表すことができる．ただし，#{} は，括弧 {} 内の論理式が成立する未知パラメータサンプルの総数である．ギブスサンプリングで得られたパラメータ標本を用いて，様々な統計量を算出することができる．例えば，パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の事後分布の期待値ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\theta})$，分散・共分散行列 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\theta})$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\theta}) &= \left\{\tilde{\zeta}(\theta_1),\cdots,\tilde{\zeta}(\theta_{K_\theta})\right\}' \\ &= \left\{\sum_{n=\underline{n}+1}^{\overline{n}}\frac{\theta_1^{(n)}}{\overline{n}-\underline{n}},\cdots,\sum_{n=\underline{n}+1}^{\overline{n}}\frac{\theta_{K_\theta}^{(n)}}{\overline{n}-\underline{n}}\right\}' \end{aligned} \tag{47}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}^2(\theta_1) & \cdots & \tilde{\sigma}(\theta_1\theta_{K_\theta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\sigma}(\theta_{K_\theta}\theta_1) & \cdots & \tilde{\sigma}^2(\theta_{K_\theta}) \end{bmatrix} \tag{48}$$

と表される．ただし，

$$\tilde{\sigma}^2(\theta_{k_\theta}) = \sum_{n=\underline{n}+1}^{\overline{n}}\frac{\left\{\theta_{k_\theta}^{(n)} - \tilde{\zeta}(\theta_{k_\theta})\right\}^2}{\overline{n}-\underline{n}} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\sigma}(\theta_{k_\theta}\theta_{l_\theta}) \\ &= \sum_{n=\underline{n}+1}^{\overline{n}}\frac{\left\{\theta_{k_\theta}^{(n)} - \tilde{\zeta}(\theta_{k_\theta})\right\}\left\{\theta_{l_\theta}^{(n)} - \tilde{\zeta}(\theta_{l_\theta})\right\}}{\overline{n}-\underline{n}} \end{aligned} \tag{50}$$

である．また，ギブスサンプリングによる標本を用いて，パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の信用域を定義できる．例えば，パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の $100(1-2\kappa)\%$ 信用域は，標本順序統計量 $(\underline{\theta}_{k_\theta}^\kappa,\overline{\theta}_{k_\theta}^\kappa(k_\theta=1,\cdots,K_\theta)$

$$\begin{aligned} \underline{\theta}_{k_\theta}^\kappa &= \arg\max_{\theta_{k_\theta}^{(n*)}} \\ &\left[\frac{\#\{\theta_{k_\theta}^{(n)} \le \theta_{k_\theta}^{(n*)}, n \in M\}}{\overline{n}-\underline{n}} \le \kappa\right] \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} \overline{\theta}_{k_\theta}^\kappa &= \arg\max_{\theta_{k_\theta}^{(n**)}} \\ &\left[\frac{\#\{\theta_{k_\theta}^{(n)} \ge \theta_{k_\theta}^{(n**)}, n \in M\}}{\overline{n}-\underline{n}} \le \kappa\right] \end{aligned} \tag{52}$$

を用いて $\underline{\theta}_{k_\theta}^\kappa < \theta_{k_\theta} < \overline{\theta}_{k_\theta}^\kappa$ と定義できる．

5. おわりに

本研究では，表層の高機能舗装化に伴い損傷部位・修繕が深層化する高速道路舗装を対象に，層別修繕効果の評価を行う方法論を提案した．具体的には，従来の劣化・回復予測手法を拡張し，修繕の実施による劣化過程の異質性を確率変数として表現した上で，これを推定することにより修繕前後の劣化速度の差異を評価する．また，そのために，修繕履歴を用いた舗装区間のグルーピング方法についても言及した．これにより，層別修繕後の劣化速度低減効果を定量化することが可能となる．なお，提案した方法論に基づいた実証分析結果は，研究発表会当日に提示する予定である．

REFERENCES

1) （公社）日本道路協会：舗装設計便覧，2006. [Japan Road Association: *Hoso sekkei binran*, 2006.]
2) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73, pp.68-82, 2005. [Tsuda, Y., Kaito, K., Aoki, K. and Kobayashi K.: Estimating Markov transition probabilities for bridge deterioration forecasting, *Journal of JSCE*, No.801/I-73, pp.68-82, 2005.]
3) 貝戸清之，小林潔司，神谷恵三，新雄成：劣化・回復過程を考慮した層別修繕によるたわみ回復量の評価，土木学会論文集，Vol.79, No.1, 22-00130, 2023. [Kaito, K., Kobayashi, K., Kamiya, K. and Nii, Y.: Evaluation of Deflection Recovery Through Stratified Repair Based on a Deterioration and Recovery Process, *Journal of JSCE*, Vol.79, No.1, 22-00130, 2023.]
4) 小濱健吾，岡田貢一，貝戸清之，小林潔司：劣化ハザード率評価とベンチマーキング，土木学会論文集 A，Vol.64, No.4, pp.857-874, 2008. [Obama, K., Okada, K., Kaito, K. and Kobayashi, K.: Disaggregated hazard rates evaluation and bench-marking, *Journal of JSCE A*, Vol.64, No.4, pp.857-874, 2008.]
5) 水谷大二郎，貝戸清之，小林潔司：階層ベイズ法による補修効果の事後評価，土木学会論文集 F4，Vol.69, No.3, pp.204-221, 2013. [Mizutani, D., Kaito, K. and Kobayashi, K.: Post evaluation of repair effect by hierarchical Bayesian methods, *Journal of JSCE F*4, Vol.69, No.3, pp.204-221, 2013.]
6) 宮崎文平，加藤寛之，小濱健吾，貝戸清之，風戸崇之，田中克則：膨大な路面性状調査データに基づく舗装補修施策の評価法の提案，土木学会論文集 F4，Vol.71，No.3, pp.142-161，2015. [Miyazaki, B., Kato, H., Obama, K., Kaito, K., Kazato, T. and Tanaka, K.: A proposal for evaluation method of pavement repair policy based on enormous data of road surface conditions, *Journal of JSCE F*4, Vol.71, No.3, pp.142-161, 2015.]
7) 森悠，藤原栄吾，貝戸清之，小林潔司，橋本拓己：相対評価モデルを用いた舗装構造の劣化診断，土木学会論文集 E1，Vol.67，No.2，pp.91-110，2011. [Mori, H., Fujiwara, E., Kaito, K., Kobayashi, K. and Hashimoto, T.: Investigating pavement structure deterioration with a relative evaluation model, *Journal of JSCE E*1, Vol.67, No.2, pp.91-110, 2011.]
8) 森村英典，高橋幸雄：マルコフ解析，日科技連，1979. [Morimura, H. and Takahashi, Y.: *Marukohu kaiseki*, Nikkagiren, 1979.]
9) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
10) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
11) Titterington, D. M., Smith, A. F. M. and Makov, U. E.: *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*, John Wiley & Sons, 1985.
12) Rovert, C. P.: Mixtures of Distributions: Inference and Estimation, in: Gillks, W. R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D. J. (eds.): *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, Chapman & Hall, 1996.
13) Rovert, C. P., Rydén, T. and Titterington, D. M.: Bayesian inference in hidden Markov models through the reversible jump Markov chain Monte Carlo method, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol.62, pp.57-75, 2000.
14) Demster, A. P., Laird, N. M. and Rubin, D. B.: Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol.39, pp.1-33, 1977.
15) Celeux, G., Hurn, M. and Robert, C. P.: Computational and inferential difficulties with mixture posterior distributions, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.95, pp.957-970, 2000.
16) Diebolt, J. and Robert, C. P.: Estimation of finite mixture distributions through Bayesian sampling, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol.56, pp.363-375, 1994.
17) 和合肇：ベイズ計量経済分析，マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用，東洋新聞社，2005. [Wago, H.: Beizu keiryo keizai bunseki, Toyo Shinbunsya, 2005.]
18) 伊庭幸人，種村正美，大森裕浩，和合肇，佐藤整尚，高橋明彦：計算統計学のフロンティア－計算統計 Ⅱ，マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺，岩波書店，2005. [Iba, Y., Tanemura, M., Omori, Y., Wago, H., Sato, S. and Takahashi, A.: Keisan toukeigaku no huronthia － KeisantokeiⅡ, Marukohu rensa montekaruroho to sono syuhen, Iwanami Shoten, 2005.]
19) 小林潔司，貝戸清之，林秀和：測定誤差を考慮した隠れマルコフ劣化モデル，土木学会論文集 D，Vol.64, No.3, pp.493-512, 2008. [Kobayashi, K., Kaito, K. and Hayashi, H.: A hidden Markov deterioration model with measurement errors, *Journal of JSCE D*, Vol.64, No.3, pp.493-512, 2008.]
20) Ibrahim, J. G., Ming-Hui, C. and Sinha, D.: *Bayesian Survival Analysis*, Springer Series in Statics, 2001.
21) Geman, S. and Geman, D.: Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images, *Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.6, pp.721-741, 1984.
22) 貝戸清之，小林潔司，青木一也，松岡弘大：混合マルコフ劣化ハザードモデルの階層ベイズ推計，土木学会論文集 D3，Vol.68, No.4, 255-271, 2012. [Kaito, K., Kobayashi, K., Aoki, K and Matsuoka, K.: Hierarchical Bayesian Estimation of Mixed Markov Hazard Models, *Journal of JSCE D*3, Vol.68, No.4, 255-271, 2012.]
23) Geweke, J.: Evaluating the Accuracy of Sampling based Approaches to the Calculation of Posterior Moments, in Bernardo, J. M., Berger, J. M., Dawid, A. P. and Smith, A. F. M. (eds.) : *Bayesian Statistics* 4, pp.169-193, Oxford University Press, 1996.