ラムゼイルールに基づく公共交通ネットワーク最適化モデルの効率的な近似解法に関する検討

籾實　大[1]・塚井　誠人[2]・須ヶ間　淳[3]・奥村　誠[4]

[1]学生員　広島大学工学部第四類（〒739-8527 東広島市鏡山 1-4-1）
E-mail: b202998@hiroshima-u.ac.jp

[2]正会員　広島大学先進理工系科学研究科（〒739-8527 東広島市鏡山 1-4-1）
E-mail: mtukai@hiroshima-u.ac.jp　(Corresponding Author)

[3]学生会員　埼玉大学大学院理工学研究科（〒338-8570　埼玉県さいたま市桜区下大久保 255）
E-mail: sugama@mail.saitama-u.ac.jp

[4]正会員　東北大学災害科学国際研究所（〒980-0845 宮城県仙台市青葉区荒巻青葉 468-1）
E-mail: makoto.okumura.b6@tohoku.ac.jp

須ヶ間・奥村（2021）は，地域内の公共交通ネットワークデザイン問題に関して，需要を内生化した一般化費用に関する収支均衡制約付きの消費者余剰最大化問題を定式化している．同モデルは，乗り換えを含む複数モードを対象として，運行経路と頻度を内生的に決定できる点が特徴であり，実ネットワークへの適用が期待される．しかし混合整数計画問題として定式化された同モデルは NP 困難であり，問題の規模が大きくなると求解に多大な時間を要する．本研究は，同モデルを一般化収支均衡付き消費者余剰最大化部分と最適ネットワーク探索部分に分割した近似解アルゴリズムを提案し，より規模の大きなネットワークに適用した場合の有効性を，数値計算によって明らかにする．このアルゴリズムでは，須ヶ間・奥村が導出した解析解の性質に着目して，最適ネットワーク探索部分を効率的に実行する手順を検討する．

Key Words: *Sustainably operable public transport, Consistency conditions, Randomized algorithm*

1. はじめに

国内の公共交通ネットワークが危機に瀕している．多くの地域で自動車利用が進み，公共交通需要減に対して有効な手が打てない中で，自動車を保有しない住民の通院や買い物手段の確保が自治体に求められる．そこで自治体は，交通運営主体への補助や民間路線撤退後のコミュニティバス路線への転換を進めてきたが，近年では地域公共交通への支出拡大が自治体財政を圧迫しつつある．これは公共交通政策の持続可能性への疑問に他ならない．

須ヶ間・奥村[1][2]（以下，元論文）は，所与のネットワーク上を運行する最適な公共交通路線を得るために，OD 需要を内生化した一般化収支均衡制約付きの消費者余剰最大化問題を定式化したが，この問題は小規模ネットワークでしか解けないことが課題となっている．この問題を実ネットワーク規模で解ければ，たとえば運行コスト項に補助率パラメータを加えることによって地域の公共交通路線網を具体的に検討できるなど，実務的な価値が大きい．

本論文ではこの問題を SOPD（Sustainabily Operable Public transport network Design model）と呼ぶ．SOPD は NP 困難な混合整数計画問題のため，効率的な解法を工夫しなくてはならない．本論は SOPD を再定式化して，ネットワークの探索と評価に分割できることを示し，大規模な問題を現実的な時間で求解できるアルゴリズムを開発する．

2. SOPD の再定式化

本節では，SOPD モデルの概要と特徴を示したうえで，提案するアルゴリズム構築に向けての工夫や，留意すべき課題をまとめる．

(1) モデルの概要

本問題のイメージをとるするために，元論文で例示されたトイネットワークを図 1 に示す．対象地域は複数の小地域で構成されており，各地域の代表点をノード，隣接地域を結ぶ経路をリンクとするネットワーク $\boldsymbol{G}$ で記述

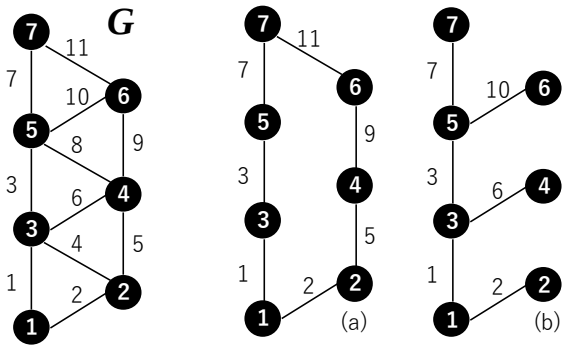


図 1　元論文のネットワーク $\boldsymbol{G}$ と系統集合 $\boldsymbol{R}$ の例

する（図 1 左）．$\boldsymbol{G}$ 上のノード内の数字はノード番号を，リンク脇の数値はリンク番号を表わしており，各リンクの距離は全て等しい．$\boldsymbol{G}$ は郊外の交通結節点とその周辺地域を模しており，ノード1は鉄道駅を，ノード2～7はバス等で接続する地域内の拠点を表わす．目的関数は全 OD の消費者余剰の和である．SOPD は，その最大化によって，$\boldsymbol{G}$ 内全ての，または一部のノードを結ぶ公共交通ネットワークを求める問題である．なお以下では，SOPD を解いて得られる最適な公共交通ネットワークを系統集合 $\boldsymbol{R}$ と呼ぶ．図 1 の(a)，(b)は，それぞれ元論文のある設定の下で得られた最適系統集合 $\boldsymbol{R}$ の例である．

OD 間には線形の需要関数に従う 1 日あたりの交通需要が設定されており，後述する一般化運行コストの関数である．なお本モデルにおいて需要関数の線形仮定は本質的ではない．ここで公共交通ネットワークは，複数の系統から成ると仮定する．系統は接続する一連のリンク集合であり，系統内の全リンクの運行頻度は同一とする．

SOPD の系統では，大きさの異なる乗り物が運行される．乗り物の大きさは，1 編成あたりの輸送力の違いと，乗り物の運行にかかる限界費用の違いで表現する．乗り物と系統の組み合わせに制限があり，元論文では大乗り物は 1 系統以下，小乗り物は 2 系統以下とされる．各系統の輸送力は，1 日あたりの運行頻度に 1 編成あたり輸送力を乗じて得られる．運行頻度の上限は運行間隔の下限に等しく，系統輸送力の上限を与える．

運行頻度の下限は乗り物の大小によらず同じ値であり，需要と無関係な固定費用がかかることを表わす．しかし乗り物の輸送力は大きさによって異なるため，固定費用そのものは，乗り物の大きさによって異なる．系統の輸送力は，系統を構成する各リンクにおいて，それを利用する全 OD の交通需要をそれぞれ上回らなくてはならない．以下では混乱のない限り，系統とそこを運行する乗り物の組み合わせを「系統」と呼ぶ．実際の運行頻度は，需要関数と一般化収支均衡制約，および運行頻度制約を満たすように内生的に定まる．系統内の各リンクの交通需要が，その系統の運行頻度の上限と下限の範囲に収まるときは，正の限界費用が生じる．系統内の各リンクの交通重要が，その系統の運行頻度の下限を下回るとは限界費用は 0 となり，上限以上の運行頻度は許されない（その場合は系統の追加か，乗り物の変更等が必要）．以上の諸条件を満たす運行頻度に 1 編成あたりのコストを乗じると，運行頻度由来のコストが得られ，それは後述する一般化運行コストの一部を成す．SOPD では系統と OD の組み合わせに制約がないため，ある OD が複数系統を乗り継ぐことがある．このほか系統や OD 交通量に関連する制約には，リンクフロー保存則と，系統間の乗り継ぎの整合性制約がある．

SOPD では，交通需要が内生的に定まるばかりでなく，各 OD からの運賃収入の合計が全系統の運行コストを賄う，という制約条件が課される．特に OD にかかわる一般化コストとして，既出の運行頻度由来のコストと系統の乗り継ぎコストに加えて，「道のりのコスト」が加算される点は，注目される．道のりのコストは利用者の移動時間に関する機会費用である．道のりのコストを考慮することは SOPD の新規性であり，これによって SOPD の最適解には特徴のある系統設定が現れる．

SOPD は多くの外生パラメータを含んでいるので様々な条件下で最適ネットワークを算出できる．元論文のシミュレーションでは OD の最大需要を変化させて，形成される公共交通ネットワークの特徴を観察していた．

⑵ 需要関数と一般化支払額

SOPD の問題設定は興味深いが，定式化が少々複雑である．ここからはモデルの構造を明らかにしつつ，効率的な近似解法を得るためにモデルを再定式化する．以下，操作変数と添え字は小文字，集合は大文字の太字，関数は小文字の太字，定数は大文字で，それぞれ表記する．

ノード数を N，全ノード集合を $\boldsymbol{N}$，リンク数を L，全リンク集合を $\boldsymbol{L}$ とする．元論文の $\boldsymbol{L}$ は，両端のノード番号をまとめたリンクのリストとして与える．SOPD は有向グラフでも定義できるが，本論文では簡単のため無向グラフとする．OD i の逆需要関数は，式(1)で表される．

$$p(q_i) = C - A_i q_i \tag{1}$$

ここで $p(\ )$ は逆需要関数であり一般化価格を与える，q_i，A_i は OD i の交通量と需要関数の傾き，C は支払意思額上限の定数で，本来 OD ごとに異なる値を与えても良いが，元論文では簡単のため全ての OD に対して一定値を与えている．元論文では駅を模して設定した図1のノード 1 を含む OD の最大交通量は大きく，それ以外の OD の最大交通量は小さく設定される．

$$A_i = \frac{C}{Q_{H/L}},\quad i \in \boldsymbol{OD}^H \ / \ \boldsymbol{OD}^L \tag{2}$$

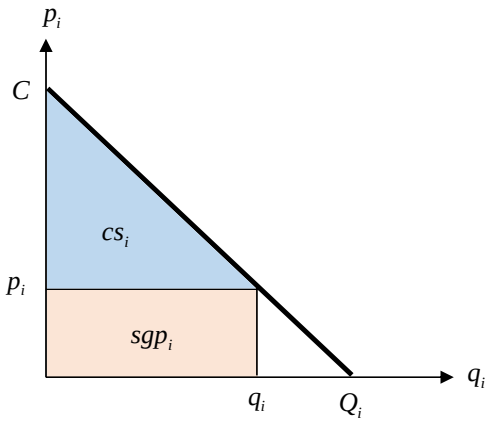


図 2　消費者余剰と一般化支払額

$Q_H > Q_L$ は，それぞれノード 1 を含む OD 集合 $\boldsymbol{OD}^H$ と，それ以外の OD 集合 $\boldsymbol{OD}^L$ の最大交通需要である．

異ノードの OD 集合全体を $\boldsymbol{OD}$ とすると，ネットワーク全体の消費者余剰は，式(3)で表される．

$$cs = \frac{1}{2}\sum_i^{OD} p(q_i)q_i = \frac{1}{2}\sum_i^{OD}(C - p(q_i))q_i = \frac{1}{2}\sum_i^{OD} A_i q_i^2 \tag{3}$$

OD i の一般化支払額 sgp_i (sum of generarized payment) は，以下の式(4)となる．

$$sgp_i = p(q_i)\cdot q_i \tag{4}$$

図 2 に消費者余剰と一般化支払額の関係を示す．SOPD の目的関数は，式(1)で定義した消費者余剰のネットワーク全体の合計値である．逆需要関数は線形なので，一般化支払額の最大値は，C と Q_i の中点をそれぞれ結んだ矩形の面積となる．q_i を大きく設定すれば OD i の消費者余剰は単調増加するが，$q_i > Q_i/2$ の範囲では sgp_i は単調減少する．よってたとえば大小の乗り物を組み合わせた系統（リンク）で $\boldsymbol{G}$ 全体を結ぶとき，それぞれの運行頻度を下限値としてその運行コストを見積もって，それが全 OD を合計した総一般化支払額の最大値を上回る Q_i の設定では，実行可能解がない．一方で Q_i の設定が総一般化支払額の最大値を下回る公共交通ネットワークでは，常に一般化収支均衡制約を満たす p_i，q_i が得られる．なお一般化収支均衡制約は各 OD ではなく OD 集合全体にかかる．よって SOPD では通常，各系統の一般化収支は不均衡であり，均衡は系統間の内部移転によって達成されることになる．

(3) 系統の運行頻度と交通需要

式(1)に示すように，本モデルの OD 交通量は OD 運賃の関数として内生的に定まる．さらにその OD 交通量と見合うように系統の輸送力が定まり，系統の輸送力は運行コストに影響し，それは一般化収支均衡制約を通じて再び運賃水準や消費者余剰に影響する．本節では，特に OD 交通量と系統の輸送力の関係を整理する．

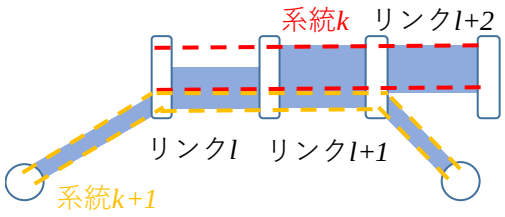


図 3　系統の運行頻度と交通需要

系統の輸送力は，その系統の乗り物容量と系統の運行頻度に左右される．前者は系統の乗り物が定まれば定数なので，後者，つまり系統の運行頻度について考える．SOPD の系統とは「相互に接続する運行頻度が等しいリンクの集合」である．この点に注意すると，系統 k，リンク l の運行頻度 f_{kl} は $f_{kl} = f_k$ でなければならない．また f_{kl} は，系統 k に含まれる各リンク l' のそれぞれを通過する，全 OD i の交通量 $q_{kl'i}$ の和：$q_{kl'}$ に左右される．なお，以下の定式化において k, l, i などの添え字を付した変数は，同変数の当該系統，当該リンク，当該 OD などの量を指す．

図3に系統とリンク交通量の関係を示す．リンクの太さは交通量を示しており，○もしくは方形楕円がノード，破線は系統を表す．系統の運行頻度は，各リンクを通過する OD が割り当たる系統内の各リンクそれぞれの OD 別通過交通量の和の最大値以上の輸送力を持たなくてはならない．図 3 において，たとえばリンク l，系統 k の輸送力（破線で示されている）は，合計交通量 q_{kl} を上回っている．つまりリンク l では，f_{kl} は q_{kl} だけではなく，系統 k 内のリンク l+1，または l+2 の交通量 $q_{k(l+1)}$, $q_{k(l+2)}$ に依存する（同図ではこれらは等しい）．リンク l+1 と l+2 では系統 k と系統 k+1 が運行しているため，それぞれに割り当たる交通量に関して，$q_{k(l+1)}, q_{k(l+2)} \neq q_{k+1(l+1)}, q_{k+1(l+2)}$ となる点にも注意する必要がある．$\boldsymbol{L}_i$ を系統 i が経由するリンク集合とすると，これに関係する系統 k の運行頻度 f_{kl} に関して，以下の式(5)が成り立つ．

$$\begin{aligned} V_k\left(f_{kl} \mid l \in \boldsymbol{L}_i\right) &= V_k f_k \\ &\geq \max_{l\in L_k} q_{kl} \\ &= \max_{l\in L_k} \sum_i^{OD} q_{kli} \\ &= \hat{q}_k \end{aligned} \tag{5}$$

ここでV_kは系統kの1編成当たり輸送力である．$\boldsymbol{L}_k$は系統 k が経由するリンク集合，$\hat{q}_k$ は系統 k に割り当てられたOD交通量であり，系統kの傘下の各リンクごとに割当てられた合計の交通量q_{kl}のなかの最大値である．式(5)はまた，系統と乗り物の組み合わせが満たすべき条件を示している．なお大乗り物は小乗り物より大きな輸送力を持つので，式(5)からは，輸送力に余裕のある大乗り物が選択されるように見える．しかし図2より，大乗り物が小乗り物でも賄えるリンクで余剰な輸送力を供給すると消費者余剰が低下する．よって式(5)が満たされるなら，小乗り物が選択されやすい．

式(5)の第 2 行の不等号は，当該リンク以外にその系統の最大交通量が現れる場合と，系統内の全てのリンクの最大交通量がその乗り物が最低運行頻度で運行したときの輸送力に満たない場合に現れる．このように系統の状況によって限界費用が異なるので，これらを区別するd_{kli} 式(6)で定義する．

$$d_{kli}=\begin{cases}1\,|\,V_k\cdot f^{\min}\le q_{kil}=V_k\cdot f_k,\ i\in OD_{kl}\\ 0\,|\,otherwise\end{cases} \tag{6}$$

ここで$f^{\min}$は系統の最低運行頻度，OD_{kl}は系統 k 内のリンク lを利用するOD集合である．d_{kli} は系統k内のリンク lを通過するODiにおいて，最低運行頻度以上の輸送力を必要とする需要が現れるか否かを表すダミー変数である．式(6)から，以下の2変数が得られる．

$$\cdot d_k=0\,|\sum_{l}^{L_k}\sum_{i}^{OD_{kl}}d_{kli}\ge 1,\ d_k=1,\ otherwise \tag{7}$$

$$d_i=1\,|\sum_{k}^{K}\sum_{l}^{L_i}d_{kli}\ge 1,\ d_i=0,\ otherwise \tag{8}$$

$d_k=0$ となる系統kの限界費用は，系統の乗り物の限界費用に等しく，その系統の容量が満杯に使われているリンクにおいて正の交通量を持つ（$d_i=1$ の）ODに配分される．その配分額はリンク交通量q_{kli}に比例する．一方 $d_k=1$のときは，その運行コストは系統の長さに関係するが，系統の限界費用は 0 となるので 交通量q_{kli}の関数ではなくなる．

ここまでの議論を踏まえると，乗り物の運行に関わる金銭的なコストc^f は，以下のように表わされる．

$$c^f=\sum_{i}^{OD}c_i^f+\sum_{k}^{K}c_k^f \tag{9}$$

$$c_i^f=\sum_{l}^{L_i}d_i vc_{il}q_i \tag{10}$$

$$c_k^f=d_k MC^k V_k f^{\min}\sum_{l}^{L_k}r_{kl} \tag{11}$$

ここで K は所与の系統数であり，元論文では最大 3 系統とされていた．c_i^f は，運行頻度に由来する運行コストのうち OD i ごとに配分されるコスト，c_k^f は運行頻度に由来する運行コストのうち，系統kごとに配分されるコストである．vc_{il} はODiが経由するリンク l の限界費用，$\boldsymbol{L}_i$ はOD i の道のり（経路）となるリンク集合，MC^k は系統kの限界費用であり，V_k の乗り物と整合していなくてはならない．r_{kl}は系統 k の道のりリンクを表わす 0/1 変数である．式(10)に現れるvc_{il}は，リンク l の運行頻度 f_{kl} の関数であるが，f_{kl} もまた式(5)の制約を満たす．

$$vc_{il}=vc\left(f_{kl}\,|\,l\in\boldsymbol{L}_i\right) \tag{12}$$

vc_{il}がとる値は，$d_k=1$ のとき 0，$d_i=1$ のときはその系統の大小の乗り物の限界費用MC^b, MC^s である．式(6)～(11)より，乗り物の運行頻度に関わるコストは，OD i の交通量q_i の関数と，q_i を含まない系統の道のりr_{kl}の関数に分けられると言える．

⑷ SOPDにおける離散変数の分離

乗り継ぎコストc_i^{tr} の算出には，リンクデータ$\boldsymbol{L}$と系統経路r_{kl}と道のり経路r_{il} から得られるノード別の系統乗り換えを示す変数u_{ij} が必要である（いずれも 0/1 変数）．OD iが経由するノード集合を$\boldsymbol{N}_i$，乗り換え費用を$\boldsymbol{S}$とすると，c_i^{tr} は以下のように表わされる．

$$c_i^{tr}=S\sum_{j}^{N_i}u_{ij}q_i \tag{13}$$

道のりのコストc_i^rは，移動時間に比例する．元論文のSOPDでは，全リンク距離と乗り物の移動速度が等しい設定である．ここで距離－費用換算係数を T とすると，c_i^r は以下のように表わされる．

$$c_i^r=T\sum_{l}^{L_i}r_{il}q_i \tag{14}$$

式(10), (13), (14)より，OD i に分割できる運行コストc_iは，式(15)で表わされる．

$$\begin{aligned}c_i&=c_i^f+c_i^{tr}+c_i^u\\&=\sum_{l}^{L_i}d_i vc_{il}q_i+S\sum_{j}^{N_i}u_{ij}q_i+T\sum_{l}^{L_i}r_{il}q_i\end{aligned} \tag{15}$$

以上より全 OD の運行コストの和と全 OD の運賃収入の均衡は，式(9)右辺第二項を加えた式(16)となる．

$$\sum_{i}^{OD}sgp_i-\sum_{i}^{OD}c_i-\sum_{k}^{K}c_k^f=0 \tag{16}$$

SOPD は消費者余剰の最大化規範の下で公共交通ネットワークの配置と交通量，運賃，運行本数を同時に求解する構造だが，連続変数と離散変数が入り混じるため，その解析解は限られた条件の下でしか得られない．

本節では，SOPD の連続変数と離散変数を分離するように SOPD の定式化を改訂する．各 OD i が利用するリンク l と系統 k の組み合わせの下で現れる交通量 q_{kli} が系統集合 $\boldsymbol{R}$ 上で算出されることに注意すると， OD・系統・リンクの割り付けを示す 0/1 変数 r_{kli} を以下のように定義できる．なお元の定式化で r_{kli} は，$q_{kli}>0$ となる場合を指す．つまり r_{kli} は SOPD を定義する上で冗長であり，r_{kli} を追加してもモデルは変わらない．

$$\boldsymbol{R}=\left\{l \mid \sum_{k}\sum_{l}^{\boldsymbol{L}} r_{kli} \geq 1\right\} \tag{17}$$

導入した r_{kli} を所与とすると，SOPD の目的関数として，式(18)が得られる．

$$\begin{aligned} &\max \sum_{i}^{OD} cs_i\left(p_i, q_i, f_{kl} \mid r_{kli}\right) \\ &s.t. \sum_{i}^{OD} sgp_i-\sum_{i}^{OD} c_i-\sum_{k}^{K} c_k^f=0 \end{aligned} \tag{18}$$

式(18)の目的関数の操作変数は p_i, q_i, f_{kl} である．このうち p_i に関しては式(1)と(4)が，また f_{kli} に関しては式(5)～(11)が与えられるので，それらを用いて p_i, f_{kl} を消去すると，操作変数は q_i のみとなる．これを踏まえると，式(18)のラグランジュ関数として，式(19)が得られる．

$$L\left(q_i \mid r_{kli}\right)=\sum_{i}^{OD} cs_i-\lambda\left(\sum_{i}^{OD} sgp_i-\sum_{i}^{OD} c_i-\sum_{k}^{K} c_k^f\right) \tag{19}$$

ここで λ はラグランジュ乗数である．

式(19)において cs_i と sgp_i は q_i の二次式であり，それら以外は q_i の一次式か，q_i を含まない式になっている．したがってラグランジュ関数(19)を q_i で微分すると，λ と q_i に関する一次式が得られる．これを制約条件(15)に代入すると λ の二次式が得られ，これを解けば q_i の解候補が二つ得られる．ここで 2.(2)を参照すると，より大きな q_i の消費者余剰が大きなことは自明なので，こちらが本問の解となる．なお一連の計算では，系統経路 r_{kl}，道のり経路 r_{il}，およびノード別系統乗り換え変数 u_{ij} が r_{kli} から算出できることを用いた．これまでの計算で全ての q_i が求まると，それと整合する p_i, f_{kl} も全て求まる．

以上より式(18)は，OD・系統・リンクの割り付けを示す r_{kli} を所与とすると，q_i について解けることが示された．さらに算出した q_i を代入して得た消費者余剰は，前提として与えた r_{kli} の評価値とみなせる．

ただし式(6)，(7)で定義した d_k，d_i は q_{kli}（厳密にはその系統内の最大値 $\hat{q}_{kl}$）に依存する．この事実は，ラグランジュ関数(19)からの解の導出において，r_{kli} が最適解，つまり系統と OD の組み合わせが正しいときは上述の議論が成り立つが，そうではない場合は正しい限界費用とならないことを示している．次節では，SOPD のこのような解の性質を踏まえて，求解アルゴリズムを設計する．

3. SOPD の性質と求解アルゴリズム

(1) プロトタイプとその課題

2 章までの議論から，r_{kli} を与件として式(18)の消費者余剰が求まり，その値は条件つきながら r_{kli} の評価値となることが分かった．以下では簡単のため，一部のノードにサービス提供しないことが合理的なほど需要が少ないか，または運行費用が高いケースは除外する． さらに交通量を内生的に決定する SOPD では，一つの OD が複数経路を利用するケースも生じうるが，こちらも簡単のため想定しない．つまり以下では，ある OD に対応する経路は単一と仮定する．

候補の r_{kli} を数多く探索する乱択アルゴリズムをベースとして，SOPD のプロトタイプアルゴリズムとして以下の手順が想定できる．

1) r_{kli} を（乱択等の方法で）発生させる
2) 式(18)を解いて q_i を求める
3) q_{kli} と d_{kli} が式(5)，(6)の条件を満たすことを確認して，r_{kli} の評価値（消費者余剰）を得る
4) 1)～3)を繰り返す十分な探索を経て，最も消費者余剰が高くなる r_{kli} を近似解として出力する

ステップ 3)の前半は，d_k，d_i と系統／OD の限界費用の関係について論じた 2.(2)の議論を反映している．すなわち SOPD の求解の難しさは，主に系統の張り方とリンクへの需要の割り当てにある．上記のアルゴリズムにおいて，探索すべき r_{kli} が引数の組み合わせ数と同程度の大きさで存在するなら，実質的に求解が不可能な規模になる．本章では，SOPD に課せられた諸制約

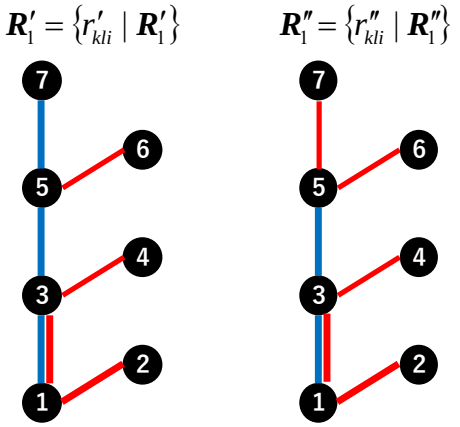


図 4　同一の $\boldsymbol{R}$ 下で現れる異なる系統 k

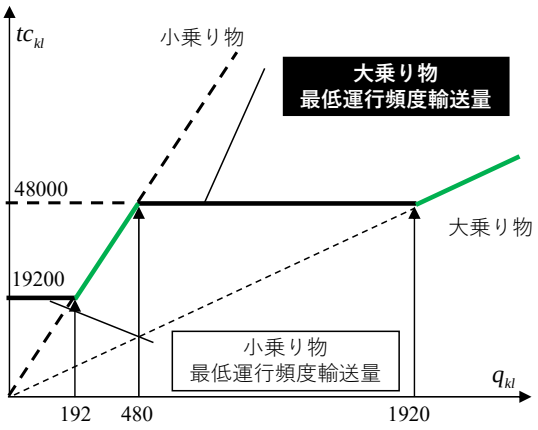


図 5　大小乗り物の輸送力とリンクコスト

を加味すると r_{kli} の範囲を狭められることや，その際の留意点を示す．

図 1 右側の 2 種類の $\boldsymbol{R}$ は，元論文で式(2)の $\boldsymbol{Q}_H$ （駅との間の交通需要の最大値）を変更した複数の設定で，実際に現れたパターンである．(a)は全体を網羅する巡回路，(b)はノード 1 を根とする最短経路木であり，それぞれ無駄のない（余剰の輸送力を抱えない）合理的な公共交通ネットワークである．実は元論文の $\boldsymbol{Q}_H$ の設定範囲では，全ての最適ネットワークがこの 2 パターンに集約されていた．ノード 1 が最短経路木の根となることは，元論文でノード 1 とその他ノードを結ぶ需要を厚く設定した結果である．よってプロトタイプで与える r_{kli} の探索の基になる $\boldsymbol{R}$ は，ノード 1 を根とする最短経路木や，それに最小限のリンクを加えた巡回路から得られることが分かる．

ただし SOPD のパラメータ設定によっては，異なる $\boldsymbol{Q}_H$ の下で得られる $\boldsymbol{R}$ が同一でも，最適系統が異なる可能性がある．たとえば，元論文の最大系統数は大乗り物 1，小乗り物 2 だったことに注意すると，制約を満たすネットワークには，図 4 に示す両パターンがあり得る．

最適な系統に複数のバリエーションが生じることは，大小乗り物の輸送力とリンクコストの関係を観察すると理解できる．図 5 に，元論文の SOPD の数値設定に準じて算出したリンク l，系統 k の交通量 q_{kl} と，総コスト tc_{kl} の関係を示す．SOPD では同一リンクを複数の系統が運行する可能性があるため，系統経路 r_{kl} と道のり経路 r_{il} を与えてもリンク l を通過する OD i が利用する系統 k が定まらない点に留意する（図 3 参照）．q_{kl} は，各 OD i が利用するリンク l と系統 k の組み合わせに基づく交通量 q_{kli} の当該リンクの和，つまり $q_{kl} = \sum_i^{OD} q_{kli}$ で得られる．簡単のため系統の乗り換えコストや系統全体のコストを無視すると，当然ながら当該リンクでは総コストが低い乗り物の運行が合理的である．

大乗り物の運行頻度下限値は 48 便／日，乗り物の大きさは 40 人／便，限界費用は 25 円／人・便より（1920 人，48000 円）が下限輸送人数と固定費用に対応する屈曲点となる．一方で最大頻度は 960 便／日のため，大乗り物の輸送力上限 38400 人となる（図外）．一方で小乗り物の大きさは 4 人／便，限界費用は 100 円／リンク・人より，（192 人，19200 円）が下限輸送人数と固定費用に対応する屈曲点となる． したがってリンクコストが最も低い乗り物と交通量の組み合わせは，図中の実線となる．

図 5 より，$q_{kl} = 480$ を閾値として，それ以下の交通量では小乗り物のコストが小さく，それ以上では大乗り物のコストが小さくなることがわかる．図 3 や式(5)でも述べたように，実際にはあるリンクに小乗り物2系統を割当てることが有利な場合もある．1 系統と 2 系統のどちらがコストを下げられるかは，当該リンクを通過する OD 交通量の合計だけでなく，各 OD の交通量構成にも左右されるので，上記の基準は絶対とは言えない．しかし図 5 の関係は，系統の輸送力と q_i の関係について，一定の目安を与える．

なおここまでの数値例が示すように，SOPD では乗り物種別と運行頻度の上下限（輸送力上限と固定費用）を設定したことで，乗り物の大きさに関わる規模の経済性ばかりでなく，あるリンクに需要を集約することで生じる規模の経済性と，近隣の交通需要を取り込んだ系統設定で生じるネットワーク外部性が表現されている．SOPD のこの性質は，現実の公共交通ネットワークの本質的な性質を捉えている．その結果，OD i の系統経路 r_{kl} と道のり経路 r_{il} は，q_{kl} や f_{kl} を介して，その他の OD i' に依存する問題になっている．

⑵ プロトタイプの改良と実装上の課題

本章の議論を踏まえると，式(17)の c_k^f に関して，系統内リンクの最大交通量によっては着目した OD i の交

通量q_iが$\hat{q}_k$を左右する可能性に注意すべきことがわかる．しかしそのような状況は，交通需要q_{kl}が最低運行頻度の輸送力あたりとなる場合でしか生じない．SOPD では，内生的に算出されるq_{kl}はr_{kli}を与える前に求められない．しかし結果的に与えたr_{kli}の下で制約条件を満たすq_{kl}を算出できれば，その解は最適解の候補である．そこでプロトタイプの手順に，求めたq_iと与えたr_{kli}からq_{kli}を算出して，制約条件への適合性を確認する手順を加える．これによりあるr_{kli}の下で得られるq_{kli}が制約条件に矛盾しないこと，すなわち式(18)が適切な限界費用設定になっていることを確認する．

ここまでの議論を踏まえて，主に$\boldsymbol{R}$とr_{kli}の生成に関して，SOPD の求解アルゴリズムを修正する．

1) $\boldsymbol{R}$を最短経路木，または巡回路として発生させる
2) r_{kli}を（乱択等の方法で）発生させる
3) 式(18)を解いてq_iを求める
4) q_iとr_{kli}から，最低および最高運行頻度に関する整合性条件(5), (6)を確認する．整合性に問題があればr_{kli}を修正して 2)へ，問題がなければ 5)へ．このとき，図 5 を参照してr_{kli}を修正する
5) r_{kli}の評価値（消費者余剰）を得る
6) 同一の $\boldsymbol{R}$ に対して 2)の候補が複数ある場合は，2)～5)を繰り返す．2)の探索を尽した場合は 1)～5)を繰り返す
7) 十分な探索を経て，最も消費者余剰が高くなるr_{kli}を近似解として出力する

ここからはアルゴリズム実装上の課題をまとめる．

手順 2)に関して，r_{kli}が系統の制約条件を満たす必要がある．系統の制約条件は，グラフ理論にある半オイラー閉路条件を参照することで充足する．手順 4)に関しては，一般の最適化問題と同様に，制約の一部を緩和した問題の解を参照して，r_{kli}を改善できる可能性がある．本問の場合，運行頻度に関する制約を除いて得られる暫定最適解により，r_{kli}を絞り込める可能性がある．

改良アルゴリズムを乱択アルゴリズムとして実行するには，局所的な探索範囲を効率的に限定しなくてはならない．本問の困難さは，正にr_{kli}の近傍を定義する方法にある．手順 4)については，すでに述べたように輸送力の上限や固定費用制約によって系統設定の範囲が限定されることで，探索範囲を狭められる．よって本問の近傍を定義することは，本質的には 1)で発生させる最短経路木，または巡回路の発生について，できるだけ計算コストをかけずに近傍を設定することに等しい．本アルゴリズムでは，巡回セールスマン問題で多用される，1 組のノードの入れ替えによって新たな巡回路を定義する 2-opt 法を応用する．本問のグラフデータ$\boldsymbol{G}$は，2.(2)の冒頭で述べたように，両端のノード番号をまとめたリンクのリストであり，ここから生成される最短経路木は，リンクリストの並び順に従って確定的に得られる．

そこで本問では，リンクリストの並び順を 2-opt 法によって入れ替えることで，直近に生成した最短経路木に関する疑似的近傍を得る．なお以上の手順で生成する最短経路木は，異なる並び順に対して同一となる場合があり，その計算は冗長である．そこで比較的最近に生成された最短経路木に対する計算を避けるため，出現した最短経路木リストを一定量，FIFO 式で保持するリストを作成しておき，これをタブーリストとして運用する．

以上に述べた方法で近傍を定義すれば，より低い評価を与えるr_{kli}の近傍探索を制御する探索温度を徐々に降下させて，探索する解空間の多様性を確保する Simulated Annealing 法が可能になる．本論ではこの方法で改良アルゴリズムを実装して，これが有効に機能するか否かを，まずは元論文のトイネットワークを用いて検証する．

参考文献

1) 須ヶ間 淳, 奥村 誠, 郊外部交通システムにおける乗り換え抵抗削減のモデル分析, 土木学会論文集 D3（土木計画学）, 76-5, p. I_967-I_976, 2020.
2) 須ヶ間 淳, 奥村 誠：都市郊外部公共交通の持続可能な路線再編, 都市計画論文集, Vol.56 , No.3 , p. 865-872, 2021.

(Received September 30, 2023)
(Accepted ???????????, 2023)

A Study on Efficient Approximated Algorithms for the Public Transport Network Design Model by Sugama and Okumura

Dai, MOMINOMI, Makoto TSUKAI, Atsushi, SUGAMA and Makoto OKUMURA

8lines for abstract