日本の都市の分布再現のための空間経済モデル

木暮　洋介[1*]・森　知也[2]・杉本　達哉[1**]・高山　雄貴[3]

[1]正会員　八千代エンジニヤリング株式会社　技術創発研究所　シナリオ解析研究室
（〒 111-8648 東京都台東区浅草橋五丁目 20-8）
E-mail[*]: ys-kogure@yachiyo-eng.co.jp (Corresponding Author)
[**]: tt-sugimoto@yachiyo-eng.co.jp
[2]非会員　京都大学経済研究所（〒 606-8058 京都府京都市左京区吉田本町）
E-mail: mori@kier.kyoto-u.ac.jp
[3]正会員　東京工業大学　環境・社会理工学院　土木・環境工学系（〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1）
E-mail: takayama.y.af@m.titech.ac.jp

現実の都市集積パターンの形成メカニズムを経済理論に基づいて的確に記述することは，地域・都市政策の長期的な影響を評価できる手法を確立・精緻化する上での基礎となる．本研究では，生産要素の空間的集積を扱った代表的理論である新経済地理学 (NEG) モデルに基づき，現実の都市規模分布・空間分布を高い精度で再現しえる手法を提案する．具体的には，Pflüger and Südekum[1)] モデルを多産業の枠組みに拡張する．また，モデル分析上必要となる高次元（9,302 地区・128 産業）の均衡計算を可能にするために，調整ダイナミクスの情報に基づいて安定均衡状態を導出する効率的な計算アルゴリズムを提案する．5km メッシュによって表現した日本を対象とする立地空間の下での均衡計算を実施し，べき乗則を伴った都市規模分布および空間分布が再現できることを示す．

Key Words: *power law, spatial economic model, stable equilibria*

1. はじめに

(1) 背景

わが国では，総人口の 70%が国土面積の 3.5%の地域に集中しており (令和 2 年国勢調査)，三大都市圏への人口集中や地方部の衰退が社会問題となりつつある．このような経済活動の空間的集積が生ずるメカニズムを経済理論に基づいて理解・記述することは，地域・都市政策の長期的な影響を評価できる手法を確立・精緻化する上での基礎となる．

集積現象を扱った代表的理論として，新経済地理学 (New economic geography: NEG) が挙げられる．NEG の理論モデルによれば，経済活動の空間的集積は，地域間の輸送費用に依存した生産者と消費者との空間的な相互作用の結果として生じるものと説明づけられる (e.g., Krugman[2)])．特に，基幹交通網の整備など，地域間の輸送費用を低減する施策が経済活動の空間的な偏在を軽減，あるいは，増長するかを判断する上で，NEG モデルは有益な示唆を与える．

ただし，NEG モデルを土木計画学分野で求められる定量的な予測・評価へと応用する上では，未だいくつかの問題点が残されている．第一に，理想化された立地空間 (e.g., 2 地域経済，円周立地空間）における集積・分散現象の再現にとどまり，現実空間を対象とした再現性の検証が十分でないという点である．すなわち，現実の地形条件を反映したモデルの下で，実際の都市の地理的な位置を的確に再現するには至っていない．

NEG モデルの定量分析への応用自体は近年著しく進展しており，一連の研究は定量的空間経済学 (Quantitative Spatial Economics: QSE) をなしている[3),4)]．しかし，これらの分析においては，集積の多様性の大部分がモデルで説明されない残差項によって再現されている[5)]．すなわち，モデルの内生的なメカニズムによって的確に集積現象を記述しているとは言い難い．

第二の問題点は，複数均衡に起因した計算上の困難を伴うという点である．NEG モデルをはじめとする集積形成を内生化したモデルは一般に，輸送費用水準の変化に伴う均衡解の不連続的な変化によって集積形成を記述するという特徴がある．すなわち，均衡解の数および安定性がパラメータに依存して変化することとなる．均衡解が複数存在する場合，どの均衡が尤もらしいのかを判別することは一般には困難である．

複数均衡に起因した計算上の困難に対し，Mori et al.[6)] は現実の都市規模分布がべき乗則を伴うという事実[7)] に注目して，複数均衡を持つモデルの下での均衡選択の問題を回避する方法を提案している．具体的には，都市の規模や配置が対称な円周立地空間の下でのモンテ

カルロサンプリングを通して，実現する安定均衡解の大半が共通してべき乗則を伴う都市規模分布を持つことを示している．

Mori et al. の分析アプローチは，上述した第一，第二の問題点を解決しえるものである．ただし，その検証において，現実空間を対象としたモデルの下での大規模な均衡計算が必要となり，計算コストへの対応が必要となる．このため，実際に第一の問題点を解決できるかは未だ明らかとなっていない．

(2) 目的

本研究の目的は，上述した 2 つの問題点の解決を目指す研究の一環として，現実の都市の規模分布・空間分布を高い精度で再現しえるモデルを構築するとともに，系統的なモデル分析手法（数値計算手法）を提案することである．具体的には，日本の地形・交通網を反映した 5km 四方メッシュによって構成された立地空間を対象とするモデルを構築し，そのモデルの下で，日本の都市の規模分布・空間分布の再現性を検証する．また，モデル分析上必要となる高次元（9,302 地区・128 産業）の均衡計算を可能にするために，調整ダイナミクスの情報に基づいて解を改定することによって安定均衡状態を導出する，効率的なアルゴリズムを実装する．

(3) 本稿の構成

本稿の構成は，以下の通りである：

2. モデル
3. 立地空間・輸送ネットワークの設定
4. 数値計算手法
5. 数値計算結果
6. まとめ

2. モデル

ここでは，代表的な NEG モデルのひとつである Pflüger and Südekum[1] モデルを，多地区・多産業の枠組みへと拡張したモデルを定式化する．なお，このモデルの基本的な性質は，いくつかの既往研究によって明らかにされている (e.g., Akamatsu et al.[8])．

(1) 都市空間・労働環境の設定

離散的な K 個の地区が存在する空間経済システムを考える．地区の集合は $\mathcal{K} \equiv \{1, 2, ..., K\}$ と表す．地区 $a \in \mathcal{K}$ の土地面積は固定であり，A_a と表す．労働者は mobile worker と immobile worker とに分類され，各々の総人口は H, L である．mobile worker は自らが居住する地区・労働する産業を選択できる一方，immobile worker は居住する場所を選択できない (i.e., 移住しない)．Immobile worker は全ての地区の土地面積上に一様に分布していると仮定する．従って，各地区の immobile worker 人口は $l_a \equiv L/K \cdot A_a / \sum A_a$ となる．Immobile worker は 1 単位の労働を所有し，それを居住する地区の企業に非弾力的に供給する．

この経済では，農業部門 (rural sector) と工業部門 (urban sector) との 2 つの産業部門が存在する．農業部門は，収穫一定の技術により，immobile worker の労働を生産要素として 1 種類の同質な財 (以降，農業財) を生産する完全競争的な部門である．本稿では，農業財をニューメレールとし，農業財の輸送には費用が発生しないと仮定する．

工業部門は，I 種類の産業に分けられ，収穫逓増の技術により，mobile および immobile worker の労働を生産要素として，差別化された財を生産する独占競争的な部門である．ここで，産業の集合は $\mathcal{I} \equiv \{1, 2, ..., I\}$ と表す．また，ある地区で生産された財は，隣接する地区間を結ぶ交通ネットワークによって他の地区へと輸送することができ，どの地区でも消費することができる．このときの輸送費用は，氷塊費用の形をとるものと仮定する．

(2) 労働者行動

労働者は，農業財と工業財に加え，土地を消費する．地区 a に居住する労働者の効用は，以下の準線形効用関数で与えられる:

$$U(\boldsymbol{C}_a^U, C_a^L, C_a^R) = \sum_{j \in \mathcal{I}} \alpha_j \ln C_{ja}^U + \beta \ln C_a^L + C_a^R. \quad (1)$$

ここで，$\boldsymbol{C}_a^U = (C_{ia}^U)_{i \in \mathcal{I}}$, C_{ia}^U は産業 i の工業財 (以降，工業財 i) の消費による部分効用，C_a^L は土地の消費量，C_a^R は農業財の消費量，α_i, β は正の値をとるパラメータである．工業財消費による部分効用 C_{ia}^U は，以下の CES 関数で定義する:

$$C_{ia}^U = \left(\sum_{b \in \mathcal{K}} \int_0^{n_{ib}} q_{i,ba}(s)^{(\sigma_i - 1)/\sigma_i} \mathrm{d}s \right)^{\sigma_i/(\sigma_i - 1)} \quad (2)$$

ここで，n_{ia} は地区 a に供給される工業財 i のバラエティ数，s は工業財のバラエティを表すインデックスであり，常に工業財のバラエティが連続的かつ無限に存在すると仮定するため，連続変数とする．$q_{i,ba}(s)$ は地区 b で生産された工業財 i のバラエティ s の消費量であり，$\sigma_i > 1$ は工業財 i の代替弾力性を表す．

地区 a に居住し，産業 i の企業に従事する労働者の所得 Y_{ia} は，賃金率 w_{ia} と地代収入 w_L からなる:

$$Y_{ia} = w_{ia} + w_L. \quad (3)$$

本稿では，全ての土地が全労働者におり均等に所有されていると仮定する (i.e., public landownership) ため，労

働者の地代収入 w_L は以下で与えられる:

$$w_L = \frac{\sum_{a\in\mathcal{K}} r_a A_a}{H+L}. \tag{4}$$

ここで，r_a は地区 a の地代である．また，労働者の予算制約は以下の通りとなる．

$$\sum_{j\in\mathcal{I}}\sum_{b\in\mathcal{K}}\int_0^{n_{jb}} p_{j,ba}(s)q_{j,ba}(s)\mathrm{d}s + r_a C_a^L + C_a^R = Y_{ia}. \tag{5}$$

ここで，$p_{i,ba}(s)$ は地区 b で生産され，地区 a で消費される工業財 i のバラエティ s の価格である．

労働者の効用最大化問題より，農業財，工業財 i，土地消費量が価格 $p_{i,ba}(s), r_a$, 所得 $Y_c^{(i)}$ の関数として，次のように導出される:

$$C_a^R = Y_{ia} - \sum_{j\in\mathcal{K}}\alpha_i - \beta, \quad C_{ia}^U = \frac{\alpha_i}{\rho_{ia}}, \quad C_a^L = \frac{\beta}{r_a}, \tag{6}$$

$$q_{i,ba}(s) = \alpha_i\{p_{i,ba}(s)\}^{-\sigma_i}(\rho_{ia})^{\sigma_i-1} \tag{7}$$

ここで，ρ_{ia} は，地区 a での工業財 i の価格指数

$$\rho_{ia} = \left(\sum_{b\in\mathcal{K}}\int_0^{n_{ib}}\{p_{i,ba}(s)\}^{1-\sigma_i}\mathrm{d}s\right)^{1/(1-\sigma_i)} \tag{8}$$

である．以上の結果より，地区 a 全体で消費する地区 b で生産した工業財 i のバラエティ s の消費量 $Q_{i,ba}(s)$ は，産業 i に従事する mobile worker の地区 a の人口を h_{ia} とすると，次のように表される:

$$Q_{i,ba}(s) = q_{i,ba}(s)\left(H_a + l\right). \tag{9}$$

ここで，$H_a = \sum_{i\in\mathcal{I}} h_{ia}$ である．

(3) 企業行動

農業部門では，immobile worker の労働のみを生産要素とし，同質な財を完全競争のもとで収穫一定の技術により生産する．この場合，一般性を失うことなく，1 単位の immobile worker の労働により，1 単位の財が生産されると基準化できる．したがって，限界費用原理から農業財の価格は，immobile worker の賃金 w_a^R と等しくなる．また，農業財をニューメレールとし，輸送には費用がかからないと仮定しているため，どの地区においても農業財の価格，immobile worker の賃金は等しい (i.e., $w_a^R = 1\ \forall a \in \mathcal{K}$).

工業部門では，各産業の企業間で [9] 型の独占的競争を行う．すなわち，自由に参入・撤退できると仮定した企業が，収穫逓増の技術により差別化された工業財 i を生産する．規模の経済，労働者の多様性の選好，ならびに供給できる財のバラエティに制限がないことから，どの企業も必ず他企業とは異なるバラエティの財を生産する．そのため，生産を行う産業 i の企業数は，供給される財のバラエティ数 n_{ia} に等しい．そこで，以降では，工業財 i のバラエティ s を生産する企業を産業 i の企業 s と呼ぶ．また，産業 i の企業 s が工業財を生産するためには，mobile worker の労働を 1 単位と，生産量 $x_{ia}(s)$ に応じて immobile worker の労働を $\kappa_i x_{ia}(s)$ 単位，生産要素として投入する必要があると仮定する．この仮定から，生産を行う産業 i の企業数 n_{ia} は，地区 a に居住する産業 i の企業に従事する mobile worker の人口 h_{ia} と等しくなる (i.e., $n_{ia} = h_{ia}$)．また，工業財 i の生産費用関数は，産業 i の企業に従事する mobile worker の賃金 w_{ia} を用いると，以下のように与えられる:

$$c(x_{ia}(s), w_{ia}) = w_{ia} + \kappa_i x_{ia}(s). \tag{10}$$

工業財の輸送には氷塊型の費用がかかる．すなわち，地区 a から b に 1 単位の工業財を輸送すると，1 単位のうち $1/\tau_{ab}$ 単位だけが実際に到着すると考える．そのため，工業財 i の需要量 $Q_{i,ab}(s)$ と供給量 $x_{i,c}(s)$ との間に次の関係が成立する:

$$x_{ia}(s) = \sum_{b\in\mathcal{K}}\tau_{ab}Q_{i,ab}(s). \tag{11}$$

工業部門では，Dixit-Stiglitz 型の独占的競争を仮定しているため，産業 i の企業は価格指数 ρ_{ia}，労働者の需要量 (9) を所与として自ら生産する工業財 i の価格 $p_{i,ab}(s)$ を設定する．そのため，企業の利潤最大化行動は，次のように定式化できる:

$$\max_{\{p_{i,ab}(s)\}} \Pi_{ia}(s) = \sum_{b\in\mathcal{K}} p_{i,ab}(s)Q_{i,ab}(s) - c(x_{ia}(s), w_{ia}). \tag{12}$$

この企業の最適条件と工業財 i の需要量 (9) より，工業財の価格 $p_{i,ab}(s)$ が次のように導出される:

$$p_{i,ab}(s) = \frac{\sigma_i\kappa_i}{\sigma_i - 1}\tau_{ab}. \tag{13}$$

この結果から明らかなように，工業財 i の価格は財のバラエティ s には依存しない．同様に，$Q_{i,ab}(s), x_{ia}(s)$ も財の種類 s に依存しない．そこで，以降では s を省略し，各々，$p_{i,ab}, Q_{i,ab}, x_{ia}$ と表記する．

(4) 短期均衡状態

空間経済システムにおいて，財・土地・労働市場は，mobile worker が居住する地区・労働する産業を変更できないほど，短期間で均衡すると仮定する．この状態を短期均衡と呼ぶ．本節では，この短期均衡状態における価格と間接効用関数を示す.

地区 a の地代 r_a は，以下の土地の需給均衡条件から定まる:

$$C_a^L(H_a + l) = A_a. \tag{14}$$

この条件から，r_a は次のとおりとなる:

$$r_a = \beta\frac{H_a + l}{A_a}. \tag{15}$$

この地代を (4) に代入すると，労働者の地代収入が以下で与えられる:

$$w_L = \beta. \tag{16}$$

短期均衡状態では，企業の参入・撤退が自由であることから，企業の利潤は常にゼロとなる．したがって，産業 i の企業に従事する mobile worker の賃金は次のように表される:

$$w_{ia} = \left(\sum_{b \in \mathcal{K}} p_{i,ab} Q_{i,ab} - \kappa_i x_{ia} \right). \tag{17}$$

さらに，短期均衡状態では，工業財 i の市場清算条件が成立する．工業財には輸送費用がかかるため，この市場清算条件は式 (11) で表わされる．

以上の短期均衡条件から得られる短期均衡解を示そう．地区 a の価格指数 ρ_{ia} は，式 (8) に式 (13) を代入することで，また，mobile worker の均衡賃金 w_{ia} は，式 (17) に価格指数 ρ_{ia}，式 (9), (11), (13) を代入することで，以下のように導出できる:

$$\rho_{ia}(\boldsymbol{h}_i) = \frac{\sigma_i \kappa_i}{\sigma_i - 1} \left\{ \Delta_{ia}(\boldsymbol{h}_i) \right\}^{1/(1-\sigma_i)}, \tag{18}$$

$$w_{ia}(\boldsymbol{h}_i) = \frac{\alpha_i}{\sigma_i} \sum_{b \in \mathcal{K}} \left(\frac{\phi_{i,ab}}{\Delta_{ib}(\boldsymbol{h}_i)} \right) (H_b + l). \tag{19}$$

ここで，$\boldsymbol{h}_i = (h_{ia})_{a \in \mathcal{K}}$, $\phi_{i,ab}$ は工業財 i の地区 a, b 間の交易に関する条件を表わし，以下で定義される

$$\phi_{i,ab} \equiv \tau_{ab}^{1-\sigma_i}. \tag{20}$$

また，$\Delta_{ia}(\boldsymbol{h}_i)$ は以下で与えられる，地区 a の工業財 i 市場の大きさを表わす指標である:

$$\Delta_{ia}(\boldsymbol{h}_i) = \sum_{b \in \mathcal{K}} \phi_{i,ba} h_{ib}. \tag{21}$$

以上の結果は，(a, b) 要素が $\phi_{i,ab}$ である地区間の交易条件を表す空間割引行列 $\boldsymbol{D}_i$ を定義することで，その数学的構造を明確にすることができる．具体的には，空間割引行列 $\boldsymbol{D}_i$ と，

$$\boldsymbol{\Delta}_i = (\Delta_{i,a})_{a \in \mathcal{K}} = \boldsymbol{D}_i^\top \boldsymbol{h}_i \tag{22}$$

$$\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{D}_i \{ \mathrm{diag}\, [\boldsymbol{\Delta}_i] \}^{-1} \tag{23}$$

を利用する．このとき，産業 i に従事する mobile worker の間接効用関数 $\boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{h}) = (v_{ia}(\boldsymbol{h}))_{a \in \mathcal{K}}$ が，mobile worker の各地区の人口 $\boldsymbol{h} = (h_{ia})_{i \in \mathcal{I}, a \in \mathcal{K}}$ の陽関数で与えられる:

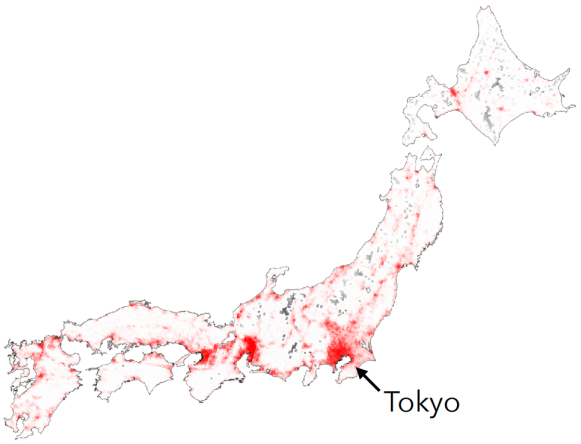
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{h}) = & \sum_{j \in \mathcal{I}} \alpha_j \boldsymbol{S}_j(\boldsymbol{h}_j) + \frac{\alpha_i}{\sigma_i} \boldsymbol{w}_i(\boldsymbol{h}) \\ & + \beta \left(\ln[\boldsymbol{A}] - \ln[\boldsymbol{H} + l\boldsymbol{1}] \right) + \gamma_i \boldsymbol{1} \end{aligned} \tag{24}$$

ここで，$\boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{h}_i), \boldsymbol{w}_i(\boldsymbol{h}), \gamma_i$ は，以下で与えられる:

$$\boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{h}_i) = (\sigma_i - 1)^{-1} \ln[\boldsymbol{D}_i \boldsymbol{h}_i], \tag{25a}$$

$$\boldsymbol{w}_i(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{M}_i (\boldsymbol{H} + l\boldsymbol{1}), \tag{25b}$$

$$\gamma_i = \sum_{j \in \mathcal{I}} \alpha_j \{ \ln[\alpha_j] - 1 \}. \tag{25c}$$



図–1 立地空間および各メッシュの開発可能面積

また，$\boldsymbol{A} = (A_a)_{a \in \mathcal{K}}$, $\boldsymbol{H} = (H_a)_{a \in \mathcal{K}}$, $\boldsymbol{1}$ は全ての要素が 1 のベクトルである．さらに，ベクトルの各要素に対数をとる場合，$\ln[\boldsymbol{a}] = (\ln[a_1], \ln[a_2], ...)$ と表記した．

3. 立地空間・輸送ネットワーク

ここでは，日本の地形・輸送ネットワークを反映した立地空間を導入する．なお，本稿で使用したデータセットとその出典は，表 1 に示す通りである．

(1) 立地空間

本稿で分析対象とする地区の単位は，5km 四方メッシュとする．具体的には，交通網で本州・北海道のいずれかに接続しているメッシュのうち，開発可能面積 ($\equiv A_a$) がメッシュ総面積の 1%以上となっている 9,302 メッシュを採用する ($K = 9,302$)．ここで，開発可能面積とは，可住地面積から農地面積を引いたものを指す．なお，モデルに反映する際の単位面積は 1km^2 とした．

図 1 は各メッシュにおける開発可能面積を赤色の濃淡によって表したものである．これより，3 大都市圏における面積の連担が顕著となっていることが分かる．

(2) 輸送ネットワーク

隣接するメッシュ間の輸送ネットワーク（エッジ）は，各メッシュの代表点の経緯度に基づく大円距離によって与える．なお，北海道・本州・四国を単一のネットワークとして扱うために，便宜的に北海道と本州とを接続するエッジを 1 本，四国と本州とを接続するエッジを 3 本追加している．上記のネットワークにおいて，全てのメッシュの組み合わせ ($9,302 \times 9,302/2 = 43,263,602$) に対し，最短経路距離によってメッシュ間距離 ($\equiv d_{ab}$) を与える．なお，モデルに反映する際の単位距離は 1000km とした．

本稿では，上記の輸送ネットワークに加え，高速道

表–1 使用データ

データ	出典
5km メッシュ（約 5km 四方）	G 空間情報センター
土地利用 3 次メッシュデータ	国土数値情報
高速道路時系列データ	国土数値情報

路ネットワークの影響を考慮する．具体的には，国土数値情報の高速道路時系列データを利用し，以下の手順で特定のメッシュ間にエッジを追加する．まず，路線ラインデータと交差するメッシュを抽出する．次に，接合部ポイントデータと内部に含むメッシュを特定する．そして，接合部にあたるメッシュの組み合わせに対し，路線にあたるメッシュ上を通る場合の最短経路距離を算出し，その値を 0.5 倍（高速道路としての割引）したものをメッシュ間距離として追加する．

4. 数値計算手法

本稿の分析対象は，$9,302 \times 128 = 1,190,656$ 個の変数が存在するモデルとなる．そこで，このような高次元の均衡計算を実行可能とするための数値計算手法を提案する．

(1) アルゴリズム

人口分布の初期状態 $\boldsymbol{h}^{(1)}$ を設定した上で，調整ダイナミクスに従って状態を変化させることで，創発する安定的な均衡状態を導出する．数値計算のアルゴリズムは，以下に示すとおりである:

i) 初期状態の設定:

$$\boldsymbol{h}^{(1)} = \{h_{ia}^{(1)}\}_{i\in\mathcal{I},a\in\mathcal{K}\in\Omega}, \quad n := 1 \tag{26}$$

ii) 産業 $i \in \mathcal{K}$ における効用の計算:

$$\boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{h}^{(n)}) = \{v_{ia}(\boldsymbol{h}^{(n)})\}_{a\in\mathcal{K}} \tag{27}$$

iii) 人口分布 $\boldsymbol{h}^{(n)}$ の変化方向 $\boldsymbol{d}^{(n)}$ の計算 (projection dynamics):

$$\boldsymbol{d}^{(n)} = \mathrm{proj}_{\Omega}[\boldsymbol{h}^{(n)} + v(\boldsymbol{h}^{(n)})] - \boldsymbol{h}^{(n)} \tag{28}$$

ここで，

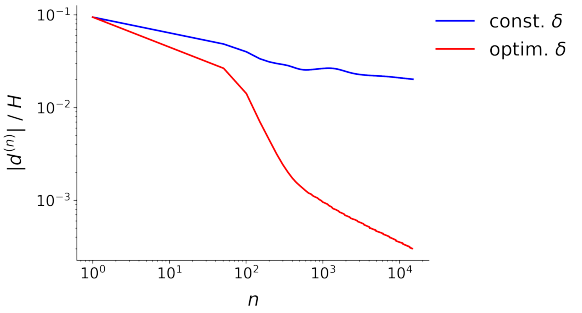
$$\bar{v} = \sum_{i\in\mathcal{I},a\in\mathcal{K}} h_{ia} v_{ia}(\boldsymbol{h}^{(n)}) \tag{29}$$

iv) 人口分布の改訂:

$$\boldsymbol{h}^{(n+1)} = \boldsymbol{h}^{(n)} + \delta \boldsymbol{d}^{(n)} \tag{30}$$

ここで，δ は step size である．

v) 収束判定: $|\boldsymbol{d}^{(n+1)}|/H < \epsilon$ であれば収束しているとして停止する．ここで，ϵ は収束判定のための十分小さい正の値である．そうでなければ，$n := n+1$ として ii) へ戻る．



図–2 反復回数と改訂量との関係

なお，本稿では調整ダイナミクスの情報を用いて，step size δ を以下の最適化問題を通して逐次設定する:

$$\delta = \max_{m\in\mathbb{N}} \bar{\delta}\psi^m \qquad \text{s.t.} \quad \frac{\boldsymbol{d}^{(n)} \cdot \hat{\boldsymbol{d}}^{(n)}(m)}{|\boldsymbol{d}^{(n)}| \cdot |\hat{\boldsymbol{d}}^{(n)}(m)|} > \cos\theta. \tag{31}$$

ここで，$|\boldsymbol{x}|$ は $\boldsymbol{x}$ のノルム，$\bar{\delta}$ は step size δ の最大値を定めるパラメータ，$\psi \in (0,1)$ および $\theta \in (0, \pi/2)$ はパラメータである．また，$\hat{\boldsymbol{d}}^{(n)}$ および $\hat{\boldsymbol{h}}^{(n)}$ は，以下によって与えられる:

$$\hat{\boldsymbol{d}}^{(n)}(m) = \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{h}}^{(n)}(m)), \quad \hat{\boldsymbol{h}}^{(n)}(m) = \boldsymbol{h}^{(n)} + \bar{\delta}\psi^m \boldsymbol{d}^{(n)}. \tag{32}$$

(2) 計算効率の検証

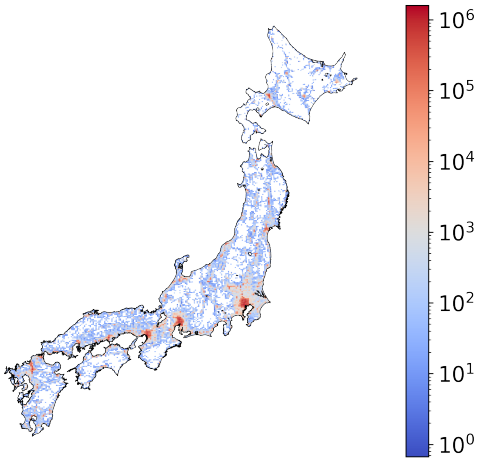
本稿で構築したモデルに対し，従来の δ を固定とするアルゴリズムと，上記で提案した δ を可変とするアルゴリズムとをそれぞれ適用し，数値計算の反復回数 n と改訂量 $|\boldsymbol{d}^{(n)}|$ との関係を比較した結果を図 2 に示す．横軸が反復回数，縦軸が各反復における人口分布の改訂量を H で除した値である．

従来の δ を固定とするアルゴリズム（青）の場合，計算の収束を保証するために δ を十分小さく設定する必要があった．一方で，上記で提案した δ を可変とするアルゴリズム（赤）では，反復ごとに step size が調整されるため，効率的に計算を進めることが可能となる．図 2 は $\epsilon = 5.0 \times 10^{-4}$ とした場合の計算過程を示したものであるが，現実的な計算時間（3h 程度）で計算が終了したことを確認している．

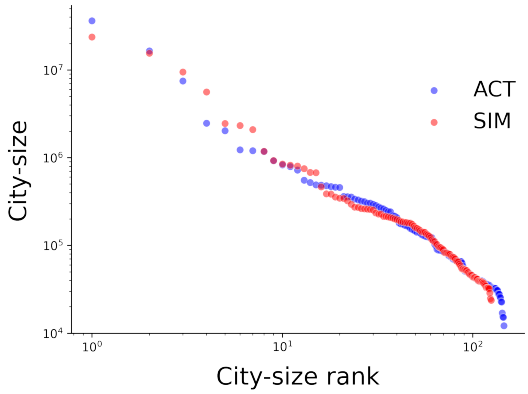
5. 数値計算結果

(1) パラメータ設定

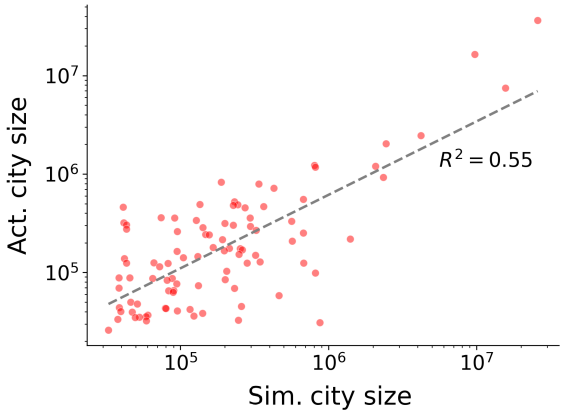
地区の総数は $K = 9,302$，mobile worker の総数は $H = 1,000$，immobile worker の総数は $L = 10,000$ とする．産業数は $I = 128$ とする．産業別の代替の弾力性 σ_i は Broda and Weinstein[10] によって推定されたデータの中から 128 産業分をランダムにサンプリングして設定する．産業別の空間割引行列 $\boldsymbol{D} = [\phi_{i,ab}]$ は，メッシュ



図–3 安定均衡状態における各メッシュの人口 H_a



図–4 都市規模分布



図–5 モデルと実都市との都市規模の比較

間の経路距離 d_{ab} に応じて，$\phi_{i,ab} \equiv \phi^{(\sigma_i - 1)d_{ab}} \forall a,b \in \mathcal{K}$ により与える．ここで，$\phi \in (0,1)$ は輸送自由度であり，ここでは $\phi = 1.0 \times 10^{-12}$ とする．

数値計算アルゴリズムに係るパラメータはそれぞれ，$\bar{\delta} = 1.0$，$\psi = 0.9$，$\theta = \pi/4$ とする．また，収束判定値は $\epsilon = 5.0 \times 10^{-4}$ と設定する．

(2) 数値計算結果

本稿で構築したモデルの安定均衡状態を図 3 に示す．ここでは，初期分布を一様分布とした場合の計算結果を示している．これより，三大都市圏・札幌・仙台・福岡など，現実の都市に対応する位置に顕著な集積が現れていることを確認できる．

ここで，モデルの安定均衡状態と現実の都市分布との整合性を検証するために，メッシュごとの人口をもとに都市を同定する．具体的には，メッシュ人口密度が 1,200[/km^2] 以上となっている隣接したメッシュの集合を抽出した上で，集合ごとに人口を集計し，集計した人口が 10,000 以上となった集合を都市とみなす．なお，メッシュ人口密度の計算においては，開発可能面積ではなくメッシュの全面積を用いている．

モデルの安定均衡状態から同定した都市の規模分布を図 4 に示す．縦軸が都市規模（集計した人口），横軸が都市規模の順位を表す．また，赤色がモデルによる都市規模分布，青色が実際の都市規模分布を表す．これより，モデルによる都市規模分布の傾きが実都市のものと比較して乖離していないこと，並びに，概ねべき乗則に従っている（i.e., 両対数グラフ上で傾きが直線となっている）ことが確認できる．

モデルと実都市との都市規模を比較した散布図を図 5 に示す．横軸がモデルによる都市規模，縦軸が実際の都市規模を表している．これより，決定係数 R^2 は 0.55 であった．先行研究[5),11)] で指摘されている従来の計量分析における都市規模の再現精度の低さを踏まえると，本稿で提案する観察可能な外生要因のみに基づくモデルによって再現精度は飛躍的に向上しているといえる．

6. まとめ

本研究では，代表的な NEG モデルのひとつである Pflüger and Südekum[1)] モデルを多地区・多産業の枠組みへと拡張し，日本の地形・輸送ネットワークを反映した立地空間の下での数値計算を通して，現実の都市規模分布・空間分布を高い精度で再現しえることを示した．また，モデル分析上で必要となる高次元の均衡計算を可能とするために，調整ダイナミクスの情報に基づいて安定均衡状態を導出する効率的な計算アルゴリズムを提案した．

今後の課題として，本稿で構築したモデルの下での均衡サンプルの量産が挙げられる．具体的には，初期分布を一様乱数で生成したうえで，代替弾力性 σ_i を Broda and Weinstein[10)] によって推定されたデータからサンプリングする．そして，サンプリングした初期分布と代替弾力性との下での安定均衡状態を 1 サンプルとし，一

定数の均衡サンプルを導出することによって結果の頑健性を検証する．

本稿で構築したモデルの輸送ネットワークには，公開データに基づいて推定した高速道路ネットワークの影響のみが反映されている．このため，鉄道ネットワークなど，実経済への影響が大きいと考えられる輸送ネットワークをモデルに反映することも今後の課題である．

参考文献

1) Pflüger, M. and Südekum, J.: Integration, agglomeration and welfare, *J. Urban Econ.*, Vol.63, No.2, pp.544–566, 2008.
2) Krugman, P.: Increasing returns and economic geography, *J. Polit. Econ.*, Vol.99, No.3, pp.483–499, 1991.
3) Redding, S. J. and Sturm, D. M.: The costs of remoteness: Evidence from german division and reunification, *Am. Econ. Rev.*, Vol.98, No.5, pp.1766–1797, December 2008.
4) Allen, T. and Arkolakis, C.: Trade and the Topography of the Spatial Economy *, *Q. J. Econ.*, Vol.129, No.3, pp.1085–1140, 2014.
5) 大澤実, 赤松隆: 集積経済理論の実証におけるモデル構造選択の課題, 土木学会論文集 D3（土木計画学）, Vol.73, No.1, pp.1–15, 2017.
6) Mori, T., Akamatsu, T., Takayama, Y., and Osawa, M.: Origin of power laws and their spatial fractal structure for city-size distributions, 2023.
7) Mori, T., Smith, T. E., and Hsu, W.-T.: Common power laws for cities and spatial fractal structures, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol.117, No.12, pp.6469–6475, 2020.
8) Akamatsu, T., Mori, T., Osawa, M., and Takayama, Y.: Multimodal agglomeration in economic geography, 2023.
9) Dixit, A. K. and Stiglitz, J. E.: Monopolistic competition and optimum product diversity, *Am. Econ. Rev.*, Vol.67, No.3, pp.297–308, 1977.
10) Broda, C. and Weinstein, D. E.: Globalization and the Gains From Variety*, *Q. J. Econ.*, Vol.121, No.2, pp.541–585, 2006.
11) Berliant, M. and Mori, T.: Beyond urban form: How masahisa fujita shapes us, *Int. J. Econ. Theory*, Vol.13, No.1, pp.5–28, 2017.