一般交通ネットワークのつながりの評価について

中山　晶一朗[1]・小林　俊一[2]・山口　裕通[3]

[1]正会員　金沢大学教授　融合研究域融合科学系（〒920-1192 金沢市角間町無番地）
E-mail: nakayama@staff.kanazawa-u.ac.jp (Corresponding Author)

[2]正会員　金沢大学准教授　理工研究域地球社会基盤学系（〒920-1192 金沢市角間町無番地）
E-mail: koba@se.kanazawa-u.ac.jp

[3]正会員　金沢大学助教　理工研究域地球社会基盤学系（〒920-1192 金沢市角間町無番地）
E-mail: hyamaguchi@se.kanazawa-u.ac.jp

交通ネットワークの連結性を評価するためには様々な要因を考慮する必要があるものの，最も基本的な連結性評価はリンクどうしのつながりの定量化であろう．本研究では，交通ネットワーク内のリンクのつながりである交通ネットワークの連結性を定量化するための抽象的な問題の輸送拡散問題を定義し，この問題を基礎として，その収束速度を交通ネットワークの連結性指標とするアプローチをとる．これまで著者らは対称なネットワーク（ネットワークのつながりを表す隣接行列が実対称行列）の分析を行ってきたが，これらによって一方通行なども含む非対称な一般交通ネットワークのつながりを評価できるようにする．

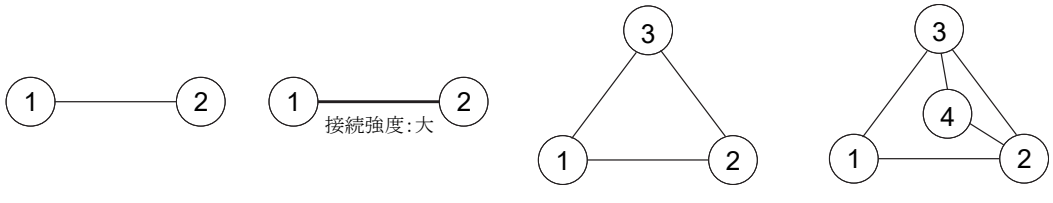
Key Words: *Jordan decomposition, general road network,connection, equal distribution problem*

1. はじめに

交通ネットワークの連結性を評価するためには様々な要因を考慮する必要があるものの，最も基本的な連結性評価はリンクどうしのつながりの定量化であろう．

2つのノード間の連結性について考えてみよう（図-1(a)参照）．ノード1とノード2の間が1つのリンクで結ばれているとき，このリンクのつながりの強さ（接続強度）が大きいほど，この1リンクネットワーク（ノード1と2を結ぶ1つのリンクのみのネットワーク）のつながりは強くなる．図-1(a)の1リンクネットワークよりも，リンクの接続強度が大きな図-1(b)の1リンクネットワークの方が同じ1リンクネットワークであってもつながりは強くなる．

図-1(c)のように図-1(a)のネットワークにノード3が追加された場合，図-1(c)では，並列に2つの経路でノード1とノード2の間が結ばれており，図-1(a)及び図-1(c)のリンク接続強度が全てのリンクで同じであるとすると，図-1(a)よりも図-1(c)のネットワークの連結性の方が強い．リンク数が少ない場合は，各リンクの接続強度及びそれらの連結が直列か並列かなどでネットワークのつながりを評価できるが，リンク数が多くなると連結が複雑となり，そのような評価が難しくなる．図-1(d)のようにノード1とノード2の間が3つの経路で結ばれるものの，経路間でリンクの重複がある場合は並列する経路数がいくつであるのかを自然数で数えること自体が難しくなる．さらに，各リンクの接続強度が異なると，より一層連結性のみではネットワークのつながりの評価を考えることが



(a) ネットワーク a　(b) ネットワーク b　(c) ネットワーク c　(d) ネットワーク d

図-1　単純ネットワークの例

難しくなる．

本研究では，複雑なネットワークのつながりをリンク間の連結性自体ではなく，物資・物質の伝播という全く異なった視点から評価する．著者ら[1]は既に同様の試みを行ったが，上りと下りが対称な道路リンクのみに限定されている．つまり，ネットワークのつながりを表す隣接行列が実対称行列に限定され，一方通行などを扱うことができなかった．本研究では，そのような制約がない一般交通ネットワークのつながりの評価法を提案する．まず，つながりの定量化のための抽象的な問題の輸送拡散問題を定義し，この問題を基礎として，その収束速度を交通ネットワークのつながりの指標とする評価法を提案する．

2. 一般交通ネットワークの接続表現

本研究では，一般交通ネットワークの構造をノードとリンク（有向リンク）で構成することとし，ネットワークのつながりや連結性をノードとリンクの関係性と考える．この時，リンクを介したノード間の接続関係を隣接行列 $\mathbf{A}'$ で表現することができる．本稿ではこれを単純隣接行列と呼ぶこととする．この単純隣接行列の (i,j) 成分 a'_{ij} は，ノード i を起点としてノード j が終点となる有向リンクで結ばれていれば 1 で，結ばれていなければ 0 である．

リンクは全て同じとは限らず，その長さ・距離などもさまざまである．もし単位距離当たりのリンクの途絶確率が一定であるなどと仮定できるならば，距離が長いリンクで接続されているノード間はその結びつきは弱い（接続強度は小さい）と考えることは自然であろう．無限大の距離のリンクで接続している場合は接続していない，すなわち，該当する隣接行列成分が 0 として差し障りはないと考えられる．本研究では，単にノード間がリンクでつながっているのか否かの単純接続だけでなく，リンクでつながっている場合もそのリンクによる接続性の強度（接続強度）も考えることとする．あるリンクがその両端のノードを接続する強度には様々な要因が絡むとは考えられるが，それは今後の課題とし，本稿では，何らかの方法でリンク接続強度が定義できていることとする．なお，本稿では，中山ら [1]に倣い，便宜上距離のみを考慮するが，一般化距離を定義して，それを用いることで拡張可能である．距離が長いリンクよりも距離が短いリンクでノード間が結ばれている方が接続性が強い（接続強度が大きい）と考えられるため，リンク距離をそのままではなく，リンク距離の逆数を用いることとする．本稿では，距離重み付き隣接行列 $\mathbf{A}$ の成分は

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{s_{ij}}, & \text{if } (i,j) \in \mathbb{E} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

となる．ここで，s_{ij} はリンク (i,j) の距離（ノード i とノード j を結ぶリンクの距離），$\mathbb{E}$ は対象道路ネットワークのリンク集合である．なお，式(1)で示した距離の逆数ではなく，距離に対して単調減少する関数を用いることも可能である．リンクがその両端ノードを結ぶ強度（接続強度）を成分に持つ距離重み付き隣接行列も前出の単純隣接行列と同様のものであり，以降では，隣接行列とは距離重み付き隣接行列のことを指すものとする．

ノードから出ているリンクの数は次数と呼ばれ，各ノードの次数を対角成分に持つ行列が次数行列（単純次数行列） $\mathbf{D}'$ である．その対角成分は $d'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}$ である．ここで，n は対象ネットワーク内のノードの数である．同様に考えて，（距離重み付き）隣接行列のノード i の次数 d_i も $d_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ とする．つまり，ノードから出ているリンクの距離の逆数の和である．この次数 d_i を対角成分に持つ行列は距離重み付きの次数行列で，$\mathbf{D}$ と書くこととする．なお，本稿では，次数行列とは距離重み付き次数行列のことを示すものとする．

本研究では，あるノードからその同一ノードを結ぶループ状のリンクはないものとする．すなわち，隣接行列成分について，$a_{ii} = 0\ (i = 1,2,\cdots,n)$ である．また，同一ノードペアが複数のリンクで結ばれている場合はそれら複数のリンクをひとまとめにした一つのリンク（合成リンク）を考えることとする．したがって，同一ノードペアは一つのリンクのみで結ばれた場合のみを扱う．

隣接行列 $\mathbf{A}$ と次数行列 $\mathbf{D}$ を用いて，ラプラシアン行列 $\mathbf{L}$ は

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A} \tag{2}$$

と定義される[例えば 2]．これよりラプラシアン行列の各行（i 行）の成分の和は 0 となることが分かる．したがって，成分が全て 1 の縦ベクトルである $\mathbf{1}$ は固有ベクトルとなり，$\mathbf{L1} = \mathbf{0}$ となる．ここで，$\mathbf{1} = (1,1,\cdots,1)^T$ は成分が全て 1 のベクトルで，$\mathbf{0}$ は成分が全て 0 のベクトルであり，つまり，$\mathbf{1} = (1,1,\cdots,1)^T$ 及び $\mathbf{0} = (0,0,\cdots,0)^T$ で，^{T} はベクトルもしくは行列の転置である．これによって，ラプラシアン行列には零固有値が必ず存在することがわかる．

3. 輸送拡散問題とつながりの評価

一般交通ネットワークのつながりを定量的に評価するために，本研究では，物資の輸送拡散問題を考える．より一般的に考えるなら，物質拡散とみることも可能である．拡散の強さが大きいほど，また，拡散できる方向や

経路が多いほど拡散が速くなると考えられ，拡散が収束する速度でネットワークのつながりの強さを定量化する．

時刻 t にネットワークのノード i にある物資量（物質量）を $x_i(t)$（$i=1,2,\cdots,n$）とする．なお，$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = Q \ (\forall t \geq 0)$ で時刻にかかわらず総量は一定で，Q は総量とする（$0 < Q \ll \infty$）．各ノードに時刻 t から微小時間 Δt の間にノード i にある物資がノード j へ拡散する量 $\Delta x^{i\to j}(t)$ を $x_i(t)a_{ij}$ と仮定する．つまり，

$$\Delta x^{i\to j}(t) = x_i(t)a_{ij} \tag{3}$$

である．ノード i から隣接するノードへ拡散する（排出する）量は

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta x^{i\to j}(t) = \sum_{j=1}^{n} x_i(t)\, a_{ij} = x_i(t)\, d_i \tag{4}$$

で与えられる．逆に，隣接するノードからノード i へ移入する量は

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta x^{j\to i}(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j(t)\, a_{ji} \tag{5}$$

である．したがって，ノード i の増減量 $\Delta x_i(t)$ は

$$\Delta x_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} x_i(t)\, a_{ij} + \sum_{j=1}^{n} x_j(t)\, a_{ji} \tag{6}$$

となる．ここで，Δt について極限を考えると，

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x_i(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} x_i(t) = -x_i(t)\, d_i + \sum_{j=1}^{n} x_j(t)\, a_{ji} \tag{7}$$

となる．

ここで，$x_i(t)$ を成分に持つベクトルとその時間変化 $\dot{\mathbf{x}}(t)$ を

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} \tag{8}$$

とする．式(2)を用いて，式(7)と(8)を整理すると，

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -x_1(t)\, d_1 + \sum_{j=1}^{n} x_j(t)\, a_{j1} \\ -x_2(t)\, d_2 + \sum_{j=1}^{n} x_j(t)\, a_{j2} \\ \vdots \\ -x_i(t)\, d_i + \sum_{j=1}^{n} x_j(t)\, a_{ji} \\ \vdots \\ -x_n(t)\, d_n + \sum_{j=1}^{n} x_j(t)\, a_{jn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -d_1 & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & -d_2 & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & -d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{L}^T \mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{9}$$

となり，$\mathbf{x}(t)$ の時間変化は

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{L}^T \mathbf{x}(t) \tag{10}$$

と表すことができる．これを解くと，

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\mathbf{L}^T t}\mathbf{x}(0) \tag{11}$$

となる．ここで，$\mathbf{x}(0)$ は初期量ベクトルであり，$\mathbf{E}$ は単位行列，$e^{\mathbf{L}}$ は行列 $\mathbf{L}$ の指数行列で，

$$e^{\mathbf{L}} = \mathbf{E} + \mathbf{L} + \frac{1}{2!}\mathbf{L}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{L}^3 + \cdots \tag{12}$$

である．

本研究では，一般ネットワークを扱っており，ラプラシアン行列 $\mathbf{L}$ は一般に非対称な実行列で，対角化可能とは限らない．そこで，本稿では，ジョルダン分解を行う（ジョルダン標準形を用いる）こととする．転置されたラプラシアン行列 $\mathbf{L}^T$ のジョルダン標準形（ジョルダン行列）を $\mathbf{J}$ とすると，ある行列 $\mathbf{R}$ があり，

$$\mathbf{L}^T = \mathbf{R}\,\mathbf{J}\,\mathbf{R}^{-1} \tag{13}$$

とできる．ここで，$\mathbf{y}(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}(t)$ とすると，

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{R}^{-1}\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{L}^T\mathbf{x}(t) = -\mathbf{J}\,\mathbf{y}(t) \tag{14}$$

となる．したがって，

$$\mathbf{y}(t) = e^{-\mathbf{J}t}\mathbf{y}(0) \tag{15}$$

である．$\mathbf{y}(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}(t)$ を上記の式に入れることで，

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}\,e^{-\mathbf{J}t}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{16}$$

が得られる．

ジョルダン行列 $\mathbf{J}$ はジョルダン細胞 J_i を対角に持つ．つまり，

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_m \end{bmatrix} \tag{17}$$

である．ここで，ジョルダン細胞は，

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ & 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \tag{18}$$

である．なお，ジョルダン細胞 i が一つの値のみで構成される場合（1×1 行列の場合）は $J_i = \lambda_i$ と通常の固有値となる．ジョルダン細胞 J_i を一つの行列と見た時，その指数行列 e^{J_i} は

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 & \cdots \\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \cdots \\ & 0 & 1 & t & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

である．ここで，

$$F_i(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 & \cdots \\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \cdots \\ & 0 & 1 & t & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

とすると，

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} F_i(t) \tag{21}$$

と表記できる．

ラプラシアン行列の成分は実数ではあるものの，それは対称行列とは限らないため，固有値λ_iは必ずしも実数とは限らない．本稿では，虚数を𝕚と書くことにする（$𝕚^2 = -1$）．λ_iの実部を$\mathrm{Re}[\lambda_i] = \lambda_i^{re}$，虚部を$\mathrm{Im}[\lambda_i] = \lambda_i^{im}$とすると，

$$\lambda_i = \lambda_i^{re} + \lambda_i^{im} 𝕚 \tag{22}$$

である．オイラーの公式から，

$$e^{\lambda_i t} = e^{\lambda_i^{re} t}\left(\cos \lambda_i^{im} t + 𝕚 \sin \lambda_i^{im} t\right) \tag{23}$$

であるため，

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i^{re} t}\left(\cos \lambda_i^{im} t + 𝕚 \sin \lambda_i^{im} t\right) F_i(t) \tag{24}$$

となる．

ネットワークは任意のノードから別の任意のノードまで有向リンクでつながっており，全てのノードペア間でお互いに行き来できるとする．つまり，強連結であるとする．ゲルシュゴリンの円板定理から，ラプラシアン行列の固有値は$\lambda_i^{re} \geq 0$であることがわかり，指数安定的に収束する．また，前章で述べたように，零固有値を持つため，

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_m \end{bmatrix} \tag{25}$$

となる．以降の議論のために，$\lambda_2^{re} \leq \lambda_3^{re} \leq \cdots$となるようにジョルダン細胞を並べたものを$\mathbf{J}$とする．このとき，上記のようにジョルダン分解できると，

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}\, e^{-\mathbf{J}t} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}(0)$$
$$= c_1 \boldsymbol{r}_1 + c_2 e^{-\lambda_2^{re} t} \tilde{\mathbf{F}}_1(t) + \cdots + c_m e^{-\lambda_m^{re} t} \tilde{\mathbf{F}}_m(t) \tag{26}$$

となる．ここで，c_iは$\mathbf{x}(0)$によって決まる係数である．また，$\tilde{\mathbf{F}}_i(t)$はtの多項式を成分に持つ行列である．上述の通り，$0 \leq \lambda_2^{re} \leq \lambda_3^{re} \leq \cdots$であるため，漸近的に

$$\mathbf{x}(t) \approx c_1 \boldsymbol{r}_1 + c_2 e^{-\lambda_2^{re} t} \tilde{\mathbf{F}}_1(t) \tag{27}$$

と近似することができる．したがって，輸送拡散問題での収束速度はλ_2^{re}で与えられると考えられる．

式(26)もしくは式(27)から，$\mathbf{x}(t)$の時間推移は指数関数を含んだ式となっており，指数関数によって収束速度を考えることが自然である．

ある有限な正の定数c, γ, λが存在し，任意の初期状態に対し，任意の時刻（$\forall t \geq 0$）において，

$$\|\mathbf{x}(t) - c\mathbf{1}\| \leq \gamma e^{-\lambda t} \tag{26}$$

が成り立つとき，$c\mathbf{1}$は大域的漸近安定で（大域的）指数安定と呼ばれる[例えば 3)]．この時，$\mathbf{x}(t)$は指数的に$c\mathbf{1}$へ収束し，このようなλの最大値を本稿では指数収束速度[1)4)5)]と呼んでいる．

本研究では，非対称な行列を扱うため，これを拡張する．ある有限な正の定数γ, λがと定ベクトル$\mathbf{r}$が存在し，任意の初期状態に対し，任意の時刻（$\forall t \geq 0$）において，

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}\| < \gamma e^{-\lambda t} \tag{26}$$

が成り立つとき，このような$\lambda \geq 0$の上限値を本稿では指数収束速度[1)4)5)]と呼ぶこととする．最大値ではなく，上限値となっているのはJ_2が通常の固有値ではなく，2×2 もしくはそれよりも大きな行列となる場合があるためである．この場合は式(27)の$c_2 e^{-\lambda_2^{re} t} \tilde{\mathbf{F}}_1(t)$で$\tilde{\mathbf{F}}_1(t)$は多項式であるため指数の上限値を考える必要がある．

以上のように，λ_2^{re}が指数収束速度で，これによって一般交通ネットワークのつながりを定量化することができる．

REFERENCES

1) 中山晶一朗，小林俊一，山口裕通：道路ネットワークの連結性の定量化とその最適補強問題，土木学会論文集 D3（土木計画学）, Vol. 77, pp. 245-259, 2021. [Nakayama, S., Kobayashi, S. and Yamaguchi, H.: Measurement of the road network connectivity ans its reinforcement optimization problem, *Journal of the Japan Society of Civil Engineers*, Vol. 77, pp. 245-259, 2021.]
2) Merris, R.: Laplacian matrices of graphs: a survey, *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 197-198, pp. 143-176, 1994.
3) 井村順一：システム制御のための安定論，コロナ社，東京，2000. [Imura, J.: Stability theory for system control, Coronasha, 2000.]
4) Astolfi, A., Ortega, R. and Venkatraman, A.: A globally exponentially convergent immersion and invariance speed observer for mechanical systems with non-holonomic constraints, Automatica, Vol. 46, pp. 182-189, 2010.
5) Bullo, F., Cortés, J. and Martínez, S.: Distributed Control of Robotic Networks, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, U.S.A., 2009.

(Received October 13, 2023)
(Accepted October 13, 2023)

ON THE EVALUATION OF CONNECTION OF GENERAL ROAD NETWORKS

Shoichiro NAKAYAMA, Shun-ichi KOBAYASHI and Hiromichi YAMAGUCHI

Although various factors need to be considered to evaluate the connectivity of a transportation network,

the most basic connectivity evaluation is probably the quantification of road linkages. This study takes the approach of defining the transport diffusion problem as an abstract problem for quantifying the connectivity of a transportation network, which is the linkage of road links in a transportation network, and using the convergence speed of the problem as the basis for the transport network connectivity index. The authors have so far analyzed symmetric networks (where the adjacency matrix representing the network linkages is a real symmetric matrix), but these will enable the evaluation of asymmetric general traffic network linkages, including one-way traffic.