経路・出発時刻同時選択型の動的均衡配分に対する収束的解法

涌井　優尚[1]・長江　剛志[2]・酒井　高良[3]・赤松　隆[4]

[1]学生会員　東北大学大学院情報科学研究科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408）
E-mail: masanao.wakui.r4@dc.tohoku.ac.jp (Corresponding Author)
[2]正会員　東北大学准教授　大学院工学研究科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-11-814）
E-mail: nagae@tohoku.ac.jp
[3]正会員　東京工業大学特任助教　環境・社会理工学院（〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1 M1-20）
E-mail: sakai.t.av@m.titech.ac.jp
[4]正会員　東北大学教授　大学院情報科学研究科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408）
E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

本研究では，一起点多終点ネットワークにおける，利用者の経路選択と出発時刻選択とを同時に考慮した，動的な利用者均衡配分（同時選択 DUE 配分）の解法を提案する．具体的には，まず利用者の行動選択にランダム効用理論を導入した同時選択 DUE 配分を相補性問題として定式化する．そしてさらに，この相補性問題と等価な最適化問題を構築する．続いて，本研究ではこの最適化問題を解く方法を二種類提案する．これらの解法のいずれもが，定式化した問題から経路選択 DUE 配分の問題構造を明示的に分離し，その部分に“時刻別分解”と呼ばれる手法を活用するものである．時刻別分解手法の活用によって，提案解法では既存研究を上回るネットワーク規模における配分問題に対して収束的な結果が得られた．本稿では本研究のうち，問題の定式化とその解法の提案までを記す．

Key Words: *dynamic user equilibrium, simultaneous route and departure time choice, equivalent optimization problem, time decomposition, Frank-Wolfe algorithm*

1. はじめに

(1) 背景

交通ネットワーク上で達成される交通状態を表現する数理モデルとして交通量配分の理論がある．この中でも，配分原則として利用者個人の独立な費用最小化行動を記述する利用者均衡（User Equilibrium, UE）配分は，経済学上の解釈が明瞭である理論的なベンチマーク状態として重要である．実際，我が国における現行の交通施策の多くは UE 配分の結果をその根拠としている．一方，UE 配分が対象とする交通状態は静的なもので，動的な渋滞の発生・延伸・解消過程を表現することができない．すなわち，時間の進行を考慮する必要のある交通施策を評価できない．

この欠点を克服する数理モデルが動的利用者均衡（Dynamic User Equilibrium, DUE）配分である．DUE 配分のうち，特に経路選択 DUE 配分では，時々刻々変化する交通需要を与件として，各利用者の旅行費用を最小とする動的な交通状態を出力する．さらに，このモデルのインプットである「時々刻々変化する交通需要」さえも内生変数とする，すなわち各利用者の最適な出発時刻選択行動をも記述するものを，経路・出発時刻同時選択 DUE 配分（以下，同時選択 DUE 配分）という．現実の交通行動において，利用者は常に自身の“経路”と“出発時刻”との二つの選択を同時に行い自身の行動を決定していることから，同時選択 DUE 配分は経路選択 DUE 配分の拡張モデルとして優れていると言える．DUE 配分では，時々刻々と変化する交通状態を明示的に扱うことができる．このことより，DUE 配分は特に時間軸上でのピーク需要を適切に捌くための交通施策（e.g., 動的混雑料金制度，動的信号制御）を設計・評価する理論基盤としてきわめて重要である．

以上の重要性にもかかわらず，DUE 配分は交通施策の根拠として広く活用されるに至っていない．その理由は，一般の場合に対して汎用的に適用できる DUE 配分アルゴリズムが存在しないことである．このようなアルゴリズムに求められる性能として，(i) 現実的な状況設定の (ii) 大規模ネットワークにおいて (iii) 正確な DUE 配分の解を計算できることがある．より具体的には，(i) には multi-commodity（多起点多終点ネットワーク）の場合に適用可能なことや待ち行列モデルが現実的であること，(ii) には所要時間やメモリ消費量の観点から計算が効率的であること，(iii) にはアルゴリズムが収束的であることなどの要素がそれぞれ含まれる．

これまでに同時選択 DUE 配分の解法に関する研究は複数存在する[1),2),3),4),5)]．しかしそれらは主として (i) の

克服に執着するあまり (ii), (iii) をほとんど満足せず，結果として実際の交通施策の根拠とするには不足しているのが現状である．

たとえば近年の研究である Long et al. (2016)[6] では，multi-commodity ネットワークでの同時選択 DUE 配分を非線形方程式系に定式化し，これらを不動点問題的に解く手法を提案している．しかしその定式化・解法は経路変数をベースとするため事前に経路の選定・列挙が必要であるという問題を抱え，数値実験の結果から必要なコンピュータ・メモリは既存の解法よりも大きいことが提示されている．また Ma et al. (2018)[7] では，single-commodity ネットワークを想定した physical queue 型同時選択 DUE 配分を非線形相補性問題として定式化している．しかし定式化された複雑な相補性問題系を解く方法の提案はなく，不正確な近似を経て解を求めるにとどまる．さらに，Han et al. (2019)[8] では，multi-commodity の physical queue 型同時選択 DUE 配分を，微分方程式を内包する変分不等式問題として定式化し，等価な不動点問題を解くアルゴリズムを提案している．しかしながらこの定式化・解法も経路の選定・列挙の操作が必要となる上，実際に提示されている実験による数値解はおよそ均衡解とは呼べない精度である．

これらに対し，長江ら (2020)[9] は，single-commodity の同時選択 DUE 配分を混合線形相補性問題として定式化し，これと等価な二次計画問題に対して Frank-Wolfe 法[10] を適用するという解法を提案した．この結果として，中小規模のネットワーク上の問題に対しては正確な解が計算できることが示されている．しかしながら，問題元来の未知変数の多さに起因して，それ以上の規模のネットワークへの適用可能性は依然として未知であった．

(2) 目的とアプローチ

以上の議論を踏まえ，本研究では，対象とするネットワークを single-commodity（一起点多終点ネットワーク）に限定した上で，同時選択 DUE 配分を解く効率的なアルゴリズムを開発することを目的とする．すなわち，アルゴリズムに求められる三性能のうち，(i) を部分的に捨象することにより (ii), (iii) を確実に満足することを目指す．これは，(ii), (iii) を優先して満足させることが，将来的な三性能の実現へ向け最も近道であるという考え方によるものである．

目的の達成に向け，本研究では以下三つの工夫を「開発のカギ」として実行する：

1. **行動モデルへのランダム効用理論の導入**
   進化ゲーム理論における確率的枠組みでの議論ができるようにモデルを一般化する．パラメータ設定により元のモデルをその一部として含みながら，数学的には問題をスムージングしたことに相当する．
2. **等価な最適化問題の構築**
   均衡問題，あるいは不動点問題のように問題を扱う場合よりも，数理計画分野の知見を適用しやすい．また，均衡解への理論的な収束のための条件も明瞭となる．
3. **経路選択 DUE 配分の問題構造の分離**
   経路選択 DUE 配分を効率的に解く際に欠かせない問題特性である”時刻別分解特性”（Kuwahara and Akamatsu (1993)[11]）を活用することで，同時に扱う必要のある未知変数の個数を大幅に削減することができる．また，経路選択 DUE 配分そのものには涌井ら (2023)[12] の効率的解法が適用可能である．

(3) 本稿の構成

本稿の構成を次に示す．まず **2.** で本研究で扱うモデルの枠組みを述べる．次に **3.** で，DUE 配分を相補性問題として定式化し，これと等価な最適化問題が構築できることを示す．続いて **4.** では定式化した最適化問題を解くアルゴリズムを二種類提示する．最後に **5.** で本稿のまとめを述べる．

2. モデル

(1) ネットワーク

本研究で対象とするネットワークは，唯一の起点ノードと複数の通過・終点ノード，およびそれらを結ぶ有向リンクからなる一起点多終点ネットワークとする．ネットワークに含まれるノードの集合を $\mathcal{N}$，リンクの集合を $\mathcal{L}$ とそれぞれ定義し，$\mathcal{N}$ の要素は $k \in \mathcal{N}$ のように，$\mathcal{L}$ の要素は有向リンクの上流側ノード $i \in \mathcal{N}$ と下流側ノード $j \in \mathcal{N}$ を用いて $(i,j) \in \mathcal{L}$ のように，それぞれ表記する．集合 $\mathcal{N}, \mathcal{L}$ の要素数は N, L とする．$\mathcal{N}$ の要素のうち，唯一の起点ノードを特に o と表す．

ネットワーク上の全てのリンクにはボトルネックが一つずつ存在し，それ以外の区間は全て自由走行区間である．リンク (i,j) の自由旅行時間は c_{ij}^0，ボトルネックの容量は μ_{ij} とする．ボトルネックには，容量以上の交通量が流入しようとするとき待ち行列が発生する．待ち行列は point queue モデルで表現し，各リンクでは first in first out（FIFO）が成立する．

(2) 利用者

一定の微小時間幅 ds により離散化された時刻区間 $\mathcal{K} \equiv \{\kappa \mid 0, 1, 2, \ldots, K\}$ を考える．利用者について，この時刻区間内に，唯一の起点ノードから終点ノード k に向け合計 Q_k 単位の旅行需要が存在するものとする．以

降，$\mathcal{K}' \equiv \mathcal{K}\backslash 0$ を配分対象時間と呼ぶ．また，本研究で扱う時刻に依存する全ての変数は，利用者の起点出発時刻別 κ を参照して定義する[1]．

利用者は自身の旅行に際し，起点から終点までに選択した経路の所要時間と，起点を出発した時刻に関するスケジュール費用，および利用者個人のランダム費用との和で定義される費用を知覚し，被る．この費用を“知覚交通費用”と呼ぶ．時刻 κ に起点を出発し，経路 $\mathcal{L}_k$ を通って終点 $k \in \mathcal{N}\backslash o$ に到着した任意の利用者が被る知覚交通費用を $p_k(\kappa, \mathcal{L}_k)$ と表す．このとき，ネットワーク上を旅行する利用者は，自身の知覚交通費用を最小化するよう，起点ノードを出発する時刻 $\kappa \in \mathcal{K}'$ と起点ノードから各自の終点ノード k へ到達する経路 $\mathcal{L}_k$ とをそれぞれ自由に選択する[2]：

$$\min_{\kappa}\ \min_{\mathcal{L}_k}\ p_k(\kappa, \mathcal{L}_k). \tag{1}$$

知覚交通費用関数 $p_k(\kappa, \mathcal{L}_k)$ は，その内訳に従い三種類の費用の和として次式のように定義される：

$$p_k(\kappa, \mathcal{L}_k) \equiv c^{\kappa}(\mathcal{L}_k) + \psi_k^{\kappa} + \varepsilon_k^{\kappa} \tag{2}$$

式 (2) において，$c^{\kappa}(\mathcal{L}_k)$ は時刻 κ に起点を出発した利用者が被る経路 $\mathcal{L}_k$ の所要時間を表す．この値は，経路 $\mathcal{L}_k$ 上のリンク所要時間の総和である：

$$c^{\kappa}(\mathcal{L}_k) \equiv \sum_{(i,j)\in\mathcal{L}_k} \left[c_{ij}^0 + w_{ij}^{\kappa}\right]. \tag{3}$$

ただし w_{ij}^{κ} は起点を時刻 κ に出発した利用者がリンク (i, j) にて被る待ち行列遅れ時間である．また，スケジュール費用関数 ψ_k^{κ} は利用者の希望出発時刻 κ^* で最小値をとる凸関数である．本研究では，出発時刻に関するスケジュール費用関数についてのごく一般的な仮定：

$$\psi_k^{\kappa} \geq 0 \quad \text{and} \quad \psi_k^{\kappa} - \psi_k^{\kappa-1} \leq ds \qquad \forall \kappa \in \mathcal{K}'. \tag{4}$$

を採用する[9]．さらに，ε_k^{κ} は期待値 0，分散 $\pi^2/6\theta^2$ に従うガンベル分布である．

ここで，次章冒頭にて定義する均衡状態における，起点を時刻 κ に出発した利用者が経験する起点からノード k への最短旅行時間 π_k^{κ} を定義する．利用者の経路選択に関する費用最小化行動が達成されている（$\min._{\mathcal{L}_k}$ が成立している）均衡状態を考えると，起点から終点 k までに経験した経路旅行時間は最短旅行時間 π_k^{κ} に一致する：

$$c^{\kappa}(\mathcal{L}_k) = \pi_k^{\kappa} \qquad \forall k \in \mathcal{N}\backslash o. \tag{5}$$

すなわち，均衡状態において利用者の行動モデルは，利用者が選択した経路 $\mathcal{L}_k$ を明示的に扱うことなく次式のように記述できる：

$$\min_{\kappa}\ \pi_k^{\kappa} + \psi_k^{\kappa} + \varepsilon_k^{\kappa}. \tag{6}$$

3. 定式化

(1) 均衡条件

本研究における DUE 状態とは，各 OD ペアごとに，どの利用者も自分一人が経路や出発時刻を変更しても，自身の知覚交通費用を変更前の状態から改善できない状態のことである．

DUE 状態におけるネットワーク上での交通状態は，既出の変数 $\boldsymbol{w}^{\kappa} \equiv \{w_{ij}^{\kappa}\}_{(i,j)\in\mathcal{L}}, \boldsymbol{\pi}^{\kappa} \equiv \{\pi_k^{\kappa}\}_{k\in\mathcal{N}\backslash o}$ に加え，起点を時刻 κ に出発した利用者についてのリンク (i, j) への流入交通流率 $\boldsymbol{y}^{\kappa} \equiv \{y_{ij}^{\kappa}\}_{(i,j)\in\mathcal{L}}$，さらに時刻 κ における起点からの出発交通流率 $\boldsymbol{q}^{\kappa} \equiv \{q_k^{\kappa}\}_{k\in\mathcal{N}\backslash o}$ という四種類の未知変数を決定することにより得る．DUE 状態において，各変数は次に示す五つの均衡条件を任意の配分対象時間 $\kappa \in \mathcal{K}'$ において満足する．

a) 待ち行列進展条件

ネットワーク側のサービス供給量を規定する条件である．具体的にはリンクの流入交通量・流出交通量との兼ね合いから，待ち行列遅れ時間 $\boldsymbol{w}$ の変化量を決定する：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{w}^{\kappa} \perp \Big\{&\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{w}^{\kappa} - \boldsymbol{w}^{\kappa-1}) - \boldsymbol{y}^{\kappa} \\ &+ \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}_+^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{\pi}^{\kappa} - \boldsymbol{\pi}^{\kappa-1}) + \boldsymbol{\mu}\Big\} \geq \boldsymbol{0}.\end{aligned} \tag{7}$$

ここで，定数行列 $\boldsymbol{A}$ は起点ノードの情報を除くノード・リンク接続行列（$(N-1)\times L$ 次元で，各リンクの上流側ノードに対応する要素は 1，下流側ノードに対応する要素は −1，それ以外の要素は全て 0 である行列），$\boldsymbol{\alpha}$ は $\{\mu_{ij}/ds\}_{(i,j)\in\mathcal{L}}$ をその対角要素とする対角行列である．

b) 最短経路選択条件

経路選択に関する利用者の行動モデルを記述した条件である．均衡状態において，利用者はいかなる時刻においても，終点までの最短経路上にあるリンクのみを通行する：

$$\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{y}^{\kappa} \perp \{\boldsymbol{c}^0 + \boldsymbol{w}^{\kappa} + \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\pi}^{\kappa}\} \geq \boldsymbol{0}. \tag{8}$$

c) 最適出発時刻選択条件・総交通量保存条件

出発時刻選択に関する利用者の行動モデルを記述した条件である．確率的枠組みを導入したことにより，利用者の出発時刻選択は Logit モデルの選択確率に従う：

$$q_i^{\kappa} ds = Q_i \frac{\exp\left[-\theta\left(\pi_i^{\kappa} + \psi_i^{\kappa}\right)\right]}{\sum_{\kappa\in\mathcal{K}} \exp\left[-\theta\left(\pi_i^{\kappa} + \psi_i^{\kappa}\right)\right]} \quad \forall i \in \mathcal{N}\backslash o. \tag{9}$$

[1] このような定式化は Lagrange 座標系アプローチと呼ばれる．ある利用者に関する旅行について一貫して“起点出発時刻”という一つの時刻参照点により表記できることから，問題の定式化が簡潔かつ明瞭となる利点がある．詳細な説明は既存研究[9),11)]を参照されたい．

[2] 時刻 $\kappa = 0$ ではネットワークの初期状態を定義するものとし，利用者はこの時刻に起点を出発しないものとする．

d) フロー保存条件

利用者の移動についての物理的な制約を記述した条件である．起点から出発した利用者は自身の終点に到着することが保証される：

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\pi}^{\kappa} \perp \{-\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{\kappa} - \boldsymbol{q}^{\kappa}\} \geq \mathbf{0}. \tag{10}$$

e) ノード境界条件

ネットワーク上において利用者同士での追い越しが発生しない条件，ならびにネットワーク上での最短距離を規定する条件である：

$$\boldsymbol{\pi}^{\kappa} \geq \boldsymbol{\pi}^{\kappa-1} - \mathbf{1}ds, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\pi}^{\kappa} \geq \boldsymbol{\pi}^{0}. \tag{12}$$

(2) 相補性問題としての表現

各時刻の未知変数を縦に並べた，次に示すベクトル：

$$\boldsymbol{w} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}^K \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}^K \end{bmatrix}, \boldsymbol{\pi} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi}^K \end{bmatrix}, \boldsymbol{q} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}^K \end{bmatrix}$$

と，これらを連結した未知変数ベクトル $\boldsymbol{x} \equiv [\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{q}]^{\mathsf{T}}$ を定義する．さらに，上記五つの均衡条件から，次に示すベクトルを定義する：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} & \bar{\boldsymbol{M}} & & \begin{matrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \boldsymbol{I}\end{matrix} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{\pi} \\ \hline \boldsymbol{q} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{C}_2 \\ \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{q}) \end{array}\right] \tag{13}$$

ここで，新たな文字の定義は以下に従う[3]：

$$\bar{\boldsymbol{M}} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_1 & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{M}_2 \\ \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_K \otimes \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{I}_K \otimes \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{C}_1 \equiv \left[\mathbf{1}_K \otimes \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{e}_K \otimes \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{w}^0 + \boldsymbol{A}_+^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\pi}^0)\right], \tag{15}$$

$$\boldsymbol{C}_2 \equiv \left[\mathbf{1}_K \otimes \boldsymbol{c}^0\right], \tag{16}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{q}) \equiv \boldsymbol{\psi} + \frac{1}{\theta}\mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{q} \cdot ds}{\mathbf{1}_K \otimes \boldsymbol{Q}}\right) - \mathbf{1}_K \otimes \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\pi}), \tag{17}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\pi}) \equiv \left\{\frac{1}{\theta}\ln \sum_{\kappa \in \mathcal{K}'} \exp\left[-\theta\left(\pi_i^{\kappa} + \psi_i^{\kappa}\right)\right]\right\}_{i \in \mathcal{N} \setminus o.} \tag{18}$$

なお，演算子 $\otimes$ は Kronecker 積を表す．また，さらに詳細な定数行列・ベクトルの定義は付録を参照されたい．

均衡条件式 (9) は次に示す相補性条件と等価である：

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{q}^{\kappa} \perp \left\{\boldsymbol{\pi}^{\kappa} + \boldsymbol{\psi}^{\kappa} + \frac{1}{\theta}\mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{q}^{\kappa} \cdot ds}{\boldsymbol{Q}}\right) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\pi})\right\} \geq \mathbf{0}. \tag{19}$$

このことを用いると，次に示す命題が成り立つ．

[3] 本稿にて用いる単位行列 $\boldsymbol{I}$，零行列（ベクトル）$\mathbf{0}$，1 行列（ベクトル）$\mathbf{1}$，その他定数行列（ベクトル）は原則として，その演算に対して適切な次元であるとする．ただし，特に注意が必要な場合には，行列（ベクトル）の次元を下付き添え字で表す．

命題 1. DUE 配分の解は，次に示す非線形相補性問題 **[DUE-NCP]** を解くことにより得られる：

[DUE-NCP]

Find $\quad \boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}_+^{(2L+2N-2)K}$,

such that $\quad \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x}^* \perp \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) \geq 0$,

and $\quad \boldsymbol{\pi}^{\kappa *} \geq \max.[\boldsymbol{\pi}^{\kappa-1*} - \mathbf{1}ds, \boldsymbol{\pi}^0] \quad \forall \kappa \in \mathcal{K}'$.

(3) 等価な最適化問題

DUE配分の解を求めるということは，**[DUE-NCP]** を解く，すなわちここまでに提示した五つの均衡条件を全て連立して解くということに等しい．ただし，現実的にはそのような方法で解を見つけることは極めて困難である．このことから，本研究ではこれら均衡条件と等価な最適化問題を構築し，その最適解を求めることで均衡解とするアプローチを採用する．本節では，均衡条件と等価な最適化問題が構築できることを示す．

一般に，非線形相補性問題

Find $\quad \boldsymbol{x}^*$,

such that $\quad \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x}^* \perp \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) \geq 0$.

の解は次の最適化問題：

$$\min_{\boldsymbol{x}} \quad \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}.$$

の最適解として得られる．この事実を DUE 配分に適用すると，次の命題が得られる．

命題 2. 次に示す最適化問題 **[DUE-EOP]** の局所最適解は，均衡条件を全て満足する：

[DUE-EOP]

$$\min_{\boldsymbol{x}} \quad Q(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{q}) - H^*(\boldsymbol{\pi}), \tag{20}$$

$$\text{s.t.} \quad \bar{\boldsymbol{M}}\left[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\pi}\right]^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{q}) \geq \mathbf{0}, \tag{21}$$

$$\sum_{\kappa \in \mathcal{K}'} \boldsymbol{q}^{\kappa} ds - \boldsymbol{Q} = \mathbf{0}, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{w} \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{q} \geq \mathbf{0}, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\pi}^{\kappa} \geq \max.[\boldsymbol{\pi}^{\kappa-1} - \mathbf{1}ds, \boldsymbol{\pi}^0] \quad \forall \kappa \in \mathcal{K}'. \tag{24}$$

問題に含まれる関数 $Q(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{b}(\boldsymbol{q})$ は次のように定義される：

$$Q(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{w}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{C}_1^{\mathsf{T}}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{C}_2^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\psi}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{q}, \tag{25}$$

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{q}) \equiv [\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, -\boldsymbol{q}]^{\mathsf{T}} \tag{26}$$

また，$H(\boldsymbol{q}), H^*(\boldsymbol{\pi})$ はそれぞれ互いに Legendre 変換を介した共役の関係にある関数である：

$$H^*(\boldsymbol{\pi}) \equiv \min_{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{\pi}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{q} - H(\boldsymbol{q}). \tag{27}$$

たとえば，本研究のように利用者の行動に Logit モデルを仮定した場合には，$H(\boldsymbol{q})$ はエントロピー関数，$H^*(\boldsymbol{\pi})$ は利用者の期待最小費用の重みづけ総和を取る関数となる：

$$H(\boldsymbol{q}) = -\frac{1}{\theta}\sum_{\kappa\in\mathcal{K}'}\sum_{k\in\mathcal{N}\setminus o} q_k^\kappa \ln\left(\frac{q_k^\kappa\cdot ds}{Q_k}\right), \tag{28}$$

$$H^*(\boldsymbol{\pi}) = \frac{1}{\theta\cdot ds}\sum_{k\in\mathcal{N}\setminus o}\left[Q_k \ln\sum_{\kappa\in\mathcal{K}'}\exp\left[-\theta\left(\pi_i^\kappa+\psi_i^\kappa\right)\right]\right]. \tag{29}$$

問題の等価性は，**[DUE-EOP]** の最適性条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) が，均衡条件に一致することをもって確認できる．正確な証明は付録を参照されたい．

4. アルゴリズム

本研究では，**[DUE-EOP]** を解く 2 つの方法を提案する：

1. 部分線形化アプローチ
2. 階層的最適化アプローチ

部分線形化アプローチは，**[DUE-EOP]** を部分線形化法により解く方法である．具体的には，**[DUE-EOP]** の目的関数のうちエントロピー関数 $H(\boldsymbol{q})$ を除く部分を線形近似する「部分線形化問題」を構築し，これを繰り返し解くことにより元の最適化問題の解を求める．この部分線形化問題をさらに階層分解することで，その下位問題に相当する最適化問題には時刻別分解が適用可能である．

階層的最適化アプローチは，**[DUE-EOP]** を「出発時刻選択に関する上位問題」と「経路選択に関する下位問題」とに階層分解して解く方法である．このとき，上位問題は進化ゲーム理論における Logit ダイナミクスの Lyapunov 関数に一致し，また下位問題は涌井ら[12] で示されている経路選択型の DUE 配分と等価な二次計画問題に一致する．経路選択 DUE 配分は既存研究により，時刻別分解を活用した効率的解法が示されている．

いずれの方法も，問題を階層分解することで，経路選択に関する変数のみの問題を分離・構築している．この工夫により，数値計算で同時に扱う未知変数を大幅に削減することができ，大規模な問題への正確な適用が可能となる．

(1) 部分線形化アプローチ

部分線形化法のアルゴリズムは以下の通りである：

Step 0: 実行可能な初期解 $\boldsymbol{x}_{(1)}$ を定め，$n := 1$.

Step 1: **[DUE-EOP]** の部分線形化問題 **[DUE-PLP]** の解 $\hat{\boldsymbol{x}}_{(n)}$ を計算.

Step 2: 次式の通り一次元探索：

$\alpha_n := \mathrm{argmin.}_\alpha\, z((1-\alpha)\boldsymbol{x}_{(n)} + \alpha\hat{\boldsymbol{x}}_{(n)})$, s.t. $0 \le \alpha \le 1$.

Step 3: 解を更新：

$\boldsymbol{x}_{(n+1)} := (1-\alpha_n)\boldsymbol{x}_{(n)} + \alpha_n\hat{\boldsymbol{x}}_{(n)}$.

Step 4: 収束基準を満たすなら $\boldsymbol{x}^* := \boldsymbol{x}_{(n+1)}$ として終了.
そうでなければ $n := n+1$ として **Step 1** へ.

ここで，Step 1 における **[DUE-EOP]** の部分線形化問題 **[DUE-PLP]** は次の凸計画問題である：

[DUE-PLP]

$$\min_{\hat{\boldsymbol{x}}} \quad \boldsymbol{C}_{w(n)}^\mathsf{T}\hat{\boldsymbol{w}} + \boldsymbol{C}_2^\mathsf{T}\hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{C}_{\pi(n)}^\mathsf{T}\hat{\boldsymbol{\pi}} + \boldsymbol{\psi}^\mathsf{T}\hat{\boldsymbol{q}} - H(\boldsymbol{q}), \tag{30}$$

$$\text{s.t.} \quad \bar{\boldsymbol{M}}\left[\hat{\boldsymbol{w}},\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{\pi}}\right]^\mathsf{T} + \boldsymbol{b}(\hat{\boldsymbol{q}}) \ge \boldsymbol{0}, \tag{31}$$

$$\sum_{\kappa\in\mathcal{K}'}\hat{\boldsymbol{q}}^\kappa ds - \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}, \tag{32}$$

$$\hat{\boldsymbol{w}} \ge \boldsymbol{0}, \quad \hat{\boldsymbol{y}} \ge \boldsymbol{0}, \quad \hat{\boldsymbol{q}} \ge \boldsymbol{0}, \tag{33}$$

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}^\kappa \ge \max.[\hat{\boldsymbol{\pi}}^{\kappa-1} - \boldsymbol{1}ds, \boldsymbol{\pi}^0] \quad \forall\kappa\in\mathcal{K}'. \tag{34}$$

ただし定数部分は以下の定義に従う：

$$\boldsymbol{C}_{w(n)} \equiv \left[\left(\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_1^\mathsf{T}\right)\boldsymbol{w}_{(n)} + \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{\pi}_{(n)} + \boldsymbol{C}_1\right], \tag{35}$$

$$\boldsymbol{C}_{\pi(n)} \equiv \left[\boldsymbol{M}_2^\mathsf{T}\boldsymbol{w}_{(n)} + \boldsymbol{1}_K \otimes P(\boldsymbol{\pi}_{(n)})\right], \tag{36}$$

$$P(\boldsymbol{\pi}) \equiv \left\{\frac{Q_i}{ds}\frac{\exp\left[-\theta\left(\pi_i^\kappa+\psi_i^\kappa\right)\right]}{\sum_{\kappa\in\mathcal{K}}\exp\left[-\theta\left(\pi_i^\kappa+\psi_i^\kappa\right)\right]}\right\}_{i\in\mathcal{N}\setminus o}. \tag{37}$$

a) Step 1 における部分線形化問題の解法

本研究では，部分線形化問題 **[DUE-PLP]** を階層分解して解く方法を提案する．**[DUE-PLP]** は次に示すように，凸計画問題 **[DUE-PLP-departure]** と線形計画問題 **[DUE-PLP-route ($\hat{\boldsymbol{q}}$)]** とに階層分解できる：

[DUE-PLP-departure]

$$\min_{\hat{\boldsymbol{q}}} \quad \boldsymbol{\psi}^\mathsf{T}\hat{\boldsymbol{q}} - H(\boldsymbol{q}) + Z^*(\hat{\boldsymbol{q}}), \tag{38}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\kappa\in\mathcal{K}'}\hat{\boldsymbol{q}}^\kappa ds - \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}, \tag{39}$$

$$\hat{\boldsymbol{q}} \ge \boldsymbol{0}. \tag{40}$$

[DUE-PLP-route ($\hat{\boldsymbol{q}}$)]

$$Z^*(\hat{\boldsymbol{q}}) \equiv$$

$$\min_{\hat{\boldsymbol{w}},\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{\pi}}} \quad \boldsymbol{C}_{w(n)}^\mathsf{T}\hat{\boldsymbol{w}} + \boldsymbol{C}_2^\mathsf{T}\hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{C}_{\pi(n)}^\mathsf{T}\hat{\boldsymbol{\pi}}, \tag{41}$$

$$\text{s.t.} \quad \bar{\boldsymbol{M}}\left[\hat{\boldsymbol{w}},\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{\pi}}\right]^\mathsf{T} + \boldsymbol{b}(\hat{\boldsymbol{q}}) \ge \boldsymbol{0}, \tag{42}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}} \ge \boldsymbol{0}, \quad \hat{\boldsymbol{w}} \ge \boldsymbol{0}, \tag{43}$$

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}^\kappa \ge \max.[\hat{\boldsymbol{\pi}}^{\kappa-1} - \boldsymbol{1}ds, \boldsymbol{\pi}^0] \quad \forall\kappa\in\mathcal{K}'. \tag{44}$$

このうち，下位問題 **[DUE-PLP-route ($\hat{\boldsymbol{q}}$)]** には，未知

変数 $\hat{\boldsymbol{w}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{\pi}}$ が隣接する二つの時刻（たとえば $\kappa-1, \kappa$）同士でしか干渉していないことに注意すると，時刻別分解の手法が適用できる．具体的には，次に示す線形計画問題 **[DUE-PLP-route ($\hat{\boldsymbol{q}}, \kappa$)]** を時刻 $\kappa = 1$ から $\kappa = K$ まで順に解くことによって，**[DUE-PLP-route ($\hat{\boldsymbol{q}}$)]** の解が求まる：

[DUE-PLP-route ($\hat{\boldsymbol{q}}, \kappa$)]

$$\min_{\hat{\boldsymbol{w}}^\kappa, \hat{\boldsymbol{y}}^\kappa, \hat{\boldsymbol{\pi}}^\kappa} \quad \boldsymbol{C}_w^{\kappa\mathsf{T}} \hat{\boldsymbol{w}}^\kappa + \boldsymbol{C}_y^{\kappa\mathsf{T}} \hat{\boldsymbol{y}}^\kappa + \boldsymbol{C}_\pi^{\kappa\mathsf{T}} \hat{\boldsymbol{\pi}}^\kappa, \tag{45}$$

$$\text{s.t.} \quad \hat{\boldsymbol{y}}^\kappa - \boldsymbol{\alpha}\hat{\boldsymbol{w}}^\kappa - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}_+^{\mathsf{T}} \hat{\boldsymbol{\pi}}^\kappa + \boldsymbol{\alpha}\hat{\boldsymbol{\beta}}^\kappa \leq \boldsymbol{0}, \tag{46}$$

$$- \hat{\boldsymbol{w}}^\kappa - \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} \hat{\boldsymbol{\pi}}^\kappa - \boldsymbol{c}^0 \leq \boldsymbol{0}, \tag{47}$$

$$\hat{\boldsymbol{q}}^\kappa + \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{y}}^\kappa \leq \boldsymbol{0}, \tag{48}$$

$$- \hat{\boldsymbol{w}}^\kappa + \boldsymbol{\alpha}^{-1}\hat{\boldsymbol{y}}^\kappa + \hat{\boldsymbol{w}}^{\kappa-1} \geq \boldsymbol{0}, \tag{49}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}^\kappa \geq \boldsymbol{0}, \quad \hat{\boldsymbol{w}}^\kappa \geq \boldsymbol{0}, \quad \hat{\boldsymbol{\pi}}^\kappa \geq \boldsymbol{\pi}^0. \tag{50}$$

ここで定数ベクトルは以下の定義に従う：

$$\boldsymbol{C}_{w(n)}^\kappa \equiv \left[2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{w}_{(n)}^\kappa + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}_+^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\pi}_{(n)}^\kappa - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}_{(n)}^\kappa - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{w}_{(n)}^{\kappa+1}\right], \tag{51}$$

$$\boldsymbol{C}_y^\kappa \equiv \left[\boldsymbol{c}^0\right], \tag{52}$$

$$\boldsymbol{C}_{\pi(n)}^\kappa \equiv \left[\boldsymbol{A}_+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{w}_{(n)}^\kappa + P(\boldsymbol{\pi}_{(n)})\right], \tag{53}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{(n)}^\kappa \equiv \boldsymbol{w}_{(n)}^{\kappa-1} + \boldsymbol{A}_+^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\pi}_{(n)}^{\kappa-1} - \boldsymbol{1}ds, \tag{54}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^\kappa \equiv \hat{\boldsymbol{w}}^{\kappa-1} + \boldsymbol{A}_+^{\mathsf{T}}\hat{\boldsymbol{\pi}}^{\kappa-1} - \boldsymbol{1}ds. \tag{55}$$

また，上位問題 **[DUE-PLP-departure]** は任意の凸計画法によって求解可能である．上位問題を解くアルゴリズムの一イタレーション毎に，下位問題を上記の方法により解く構造である．

(2) 階層的最適化アプローチ

[DUE-PLP] は次に示すように,「出発時刻選択部分」と「経路選択部分」とに階層分解することができる：

[DUE-EOP-departure]

$$\min_{\boldsymbol{q}} \quad \left[\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{\psi}\right]^{\mathsf{T}} \boldsymbol{q} - H(\boldsymbol{q}) - H^*(\boldsymbol{\pi}), \tag{56}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\kappa \in \mathcal{K}'} \boldsymbol{q}^\kappa ds - \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}, \tag{57}$$

$$\boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0}. \tag{58}$$

[DUE-EOP-route ($\boldsymbol{q}$)]

$$\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{q}) \equiv \underset{\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\pi}}{\text{argmin.}} \quad \boldsymbol{w}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{C}_1^{\mathsf{T}}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{C}_2^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\pi}, \tag{59}$$

$$\text{s.t.} \quad \bar{\boldsymbol{M}}\left[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\pi}\right]^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{q}) \geq \boldsymbol{0}, \tag{60}$$

$$\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \tag{61}$$

$$\boldsymbol{\pi}^\kappa \geq \max.[\boldsymbol{\pi}^{\kappa-1} - \boldsymbol{1}ds, \boldsymbol{\pi}^0] \quad \forall \kappa \in \mathcal{K}'. \tag{62}$$

上位問題は，進化ゲーム理論の文脈において，利用者の利得ベクトルを $\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\psi}$ と規定した Logit ダイナミクスに対応する Lyapunov 関数である（Sandholm (2010)[13]）．この事実を活用すると次の命題が成立する：

命題 3. ベクトル関数 $\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{q})$ が引数ベクトル $\boldsymbol{q}$ について単調であれば，上位問題は Logit ダイナミクスに従って必ず最適解に収束する．

なお，$\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{q})$ の単調性に関する詳細な検討は今後の課題としたい[4]．

また下位問題は，涌井ら[12] で示されている，経路選択 DUE 配分と等価な二次計画問題である．

a) 上位問題の解法

上位問題は Logit ダイナミクスを応用したアルゴリズムによって解く．このアルゴリズムは次に示す手順にまとめられる：

Step 0: 実行可能な初期解 $\boldsymbol{q}_{(1)}$ を定め，$n := 1$.

Step 1: **[DUE-EOP-route ($\boldsymbol{q}_{(n)}$)]** を解き，その最適解 $\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{q}_{(n)})$ を $\boldsymbol{\pi}_{(n)}$ と記憶.

Step 2: 次式で $\hat{\boldsymbol{q}}_{(n)}$ を計算：

$$\hat{q}_{i(n)}^\kappa = \frac{Q_i}{ds} \frac{\exp\left[-\theta\left(\pi_{i(n)}^\kappa + \psi_i^\kappa\right)\right]}{\sum_{\kappa \in \mathcal{K}} \exp\left[-\theta\left(\pi_{i(n)}^\kappa + \psi_i^\kappa\right)\right]} \quad \forall i \in \mathcal{N} \backslash o, \kappa \in \mathcal{K}'. \tag{63}$$

Step 3: $\hat{\boldsymbol{q}}_{(n)} \simeq \boldsymbol{q}_{(n)}$ なら $\boldsymbol{q}^* := \boldsymbol{q}_{(n)}$ として終了.

Step 4: α_n を適当に決め次式で解を更新し，$n := n + 1$ として **Step 1** へ：

$$\boldsymbol{q}_{(n+1)} := (1 - \alpha_n)\boldsymbol{q}_{(n)} + \alpha_n \hat{\boldsymbol{q}}_{(n)}. \tag{64}$$

上位問題のアルゴリズム一ループのうちに一回，下位問題を解く操作が必要となる（**Step 1**）．

[4] ここで問題となっているベクトル関数の単調性は，従来の研究（たとえば Friesz and Mookherjee (2006)[3]）で同じく収束保証の際に問題となっていたものとは別であることに注意されたい．従来の研究で議論されていたものは“経路費用ベクトルの，経路交通量ベクトルに関する単調性”であり，これについては一般の場合に必ずしも単調でないことが示されている．それに対し，本研究で問題とする単調性は“OD 交通費用ベクトルの，OD 交通量ベクトルに関する単調性”である．

b) 下位問題の解法

下位問題は経路選択 DUE 配分と等価な二次計画問題である．本研究では，この問題を涌井ら[12] の解法により解く．その大枠は，まず **[DUE-EOP-route** $(\boldsymbol{q})$**]** を時刻別に分解し，分解後の問題を前の時刻から順に解くものである．

[DUE-EOP-route $(\boldsymbol{q})$**]** は，その未知変数 $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\pi}$ が隣接する二つの時刻同士でしか干渉していないことに注意すると，次に示す二次計画問題 **[DUE-QP(**$\boldsymbol{q}, \kappa$**)]** を時刻 $\kappa = 1$ から $\kappa = K$ まで順に解いているに等しい：

[DUE-QP($\boldsymbol{q}, \kappa$**)]**

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x}^\kappa} \quad & [\boldsymbol{w}^\kappa, \boldsymbol{y}^\kappa, \boldsymbol{\pi}^\kappa]\left[\boldsymbol{M}\,[\boldsymbol{w}^\kappa, \boldsymbol{y}^\kappa, \boldsymbol{\pi}^\kappa]^\mathsf{T} + \boldsymbol{b}^\kappa(\boldsymbol{q})\right], \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{M}\,[\boldsymbol{w}^\kappa, \boldsymbol{y}^\kappa, \boldsymbol{\pi}^\kappa]^\mathsf{T} + \boldsymbol{b}^\kappa(\boldsymbol{q}) \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{w}^\kappa \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y}^\kappa \geq \boldsymbol{0}, \\
& \boldsymbol{\pi}^\kappa \geq \max.[\boldsymbol{\pi}^{\kappa-1} - \boldsymbol{1}ds, \boldsymbol{\pi}^0].
\end{aligned}
$$

ただし行列 $\boldsymbol{M}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ は次のような定義である：

$$
\boldsymbol{M} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}_+^\mathsf{T} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^\mathsf{T} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \tag{65}
$$

$$
\boldsymbol{b}^\kappa(\boldsymbol{q}) \equiv \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\alpha}\left[\boldsymbol{w}^{\kappa-1} + \boldsymbol{A}_+^\mathsf{T}\boldsymbol{\pi}^{\kappa-1} - \boldsymbol{1}ds\right] \\ \boldsymbol{c}^0 \\ -\boldsymbol{q}^\kappa \end{bmatrix}. \tag{66}
$$

[DUE-QP($\boldsymbol{q}, \kappa$**)]** は Frank-Wolfe 法[10] をベースとした解法により効率的に求解できる．この解法の詳細は涌井ら[12] を参照されたい．

5. おわりに

本研究は，時刻別分解手法を活用した同時選択 DUE 配分の解法を提案し，数値実験を通してその優位性を検証するものである．本稿では，その研究の一部である，ランダム効用理論を導入した同時選択 DUE 配分の定式化，およびそれらと等価な最適化問題が構築できることを示した．また，この最適化問題から経路選択 DUE 配分の問題構造を分離し，時刻別分解手法を活用して効率的に解くアルゴリズムを二種類提案した．提案アルゴリズムによる数値実験の結果は発表当日に提示する予定である．

謝辞： 本研究は日本学術振興会科学研究費補助金 (JP21H01448) の助成を受けた研究の一部です．ここに記し，謝意を表します．

付録 I 各種定数行列・ベクトルの定義

本文中で用いてる定数ベクトル・行列の定義は以下の通りである：

$$
\boldsymbol{M}_1 \equiv \left[\boldsymbol{\Delta}_K \otimes \boldsymbol{\alpha}\right], \quad \boldsymbol{M}_2 \equiv \left[\boldsymbol{\Delta}_K \otimes \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}_+^\mathsf{T}\right],
$$

$$
\boldsymbol{e} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Delta} \equiv \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\psi} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\psi}^K \end{bmatrix}.
$$

付録 II 等価性の証明

[DUE-EOP] と均衡条件との等価性を証明する．ここで式 (24) の一部がノード境界条件と等価なのは自明なので，これを除いて考える．また，式 (24) 以外の制約条件に対応するラグランジュ乗数をそれぞれ $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3, \boldsymbol{\lambda}_4$ と置く．

[DUE-EOP] についての一階の最適性条件が均衡条件に等しいことをもって証明する．**[DUE-EOP]** からラグランジュ関数 $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3, \boldsymbol{\lambda}_4)$ を構築し，各変数で微分すると以下のようになる：

$$
\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} = \left(\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_1^\mathsf{T}\right)\boldsymbol{w} + \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{M}_1^\mathsf{T}\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_2, \tag{II.1}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{y}} = \boldsymbol{C}_2 + \boldsymbol{\lambda}_1 + \left[\boldsymbol{I}_K \otimes \boldsymbol{A}\right]^\mathsf{T}\boldsymbol{\lambda}_3, \tag{II.2}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\pi}} = -\boldsymbol{1}_K \otimes \left\{ \frac{Q_i}{ds} \frac{\exp\left[-\theta\left(\pi_i^\kappa + \psi_i^\kappa\right)\right]}{\sum_{\kappa \in \mathcal{K}} \exp\left[-\theta\left(\pi_i^\kappa + \psi_i^\kappa\right)\right]} \right\}_{i \in \mathcal{N} \setminus o} + \boldsymbol{M}_2^\mathsf{T}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{M}_2^\mathsf{T}\boldsymbol{\lambda}_1 - \left[\boldsymbol{I}_K \otimes \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\right]^\mathsf{T}\boldsymbol{\lambda}_2, \tag{II.3}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\psi} + \frac{1}{\theta}\left[\ln\left(\frac{\boldsymbol{q} \cdot ds}{\boldsymbol{1}_K \otimes \boldsymbol{Q}}\right) + \boldsymbol{1}\right] + \boldsymbol{\lambda}_3 - \left[\boldsymbol{1}_K^\mathsf{T} \otimes \boldsymbol{I}_{N-1}\right]^\mathsf{T}\boldsymbol{\lambda}_4, \tag{II.4}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}_1} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{w} - \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{C}_1 \tag{II.5}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}_2} = -\boldsymbol{w} - \left[\boldsymbol{I}_K \otimes \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\right]\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{C}_2 \tag{II.6}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}_3} = \boldsymbol{q} + \left[\boldsymbol{I}_K \otimes \boldsymbol{A}\right]\boldsymbol{y} \tag{II.7}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}_4} = -\left[\boldsymbol{1}_K^\mathsf{T} \otimes \boldsymbol{I}_{N-1}\right]\boldsymbol{q} + \frac{\boldsymbol{Q}}{ds} \tag{II.8}
$$

ゆえに，**[DUE-EOP]** についての一階の最適性条件

（Karush-Kuhn-Tucker 条件条件）は次式群である：

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{w} \perp \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} \geq \mathbf{0}, \tag{II.9}$$

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{y} \perp \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{y}} \geq \mathbf{0}, \tag{II.10}$$

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\pi} \perp \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\pi}} \geq \mathbf{0}, \tag{II.11}$$

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{q} \perp \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} \geq \mathbf{0}, \tag{II.12}$$

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\lambda_1} \perp -\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda_1}} \geq \mathbf{0}, \tag{II.13}$$

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\lambda_2} \perp -\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda_2}} \geq \mathbf{0}, \tag{II.14}$$

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\lambda_3} \perp -\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda_3}} \geq \mathbf{0}, \tag{II.15}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda_4}} = \mathbf{0}. \tag{II.16}$$

これら式群におけるラグランジュ乗数について $\boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda}_2 = \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda}_3 = \boldsymbol{\pi}$ と解釈することにより，式 (II.9), (II.13) は待ち行列進展条件に，式 (II.10), (II.14) は最短経路選択条件に，式 (II.15) はフロー保存条件にそれぞれ一致する．また，ここで $\boldsymbol{q} \neq \mathbf{0}$ を仮定すると，式 (II.12) から $\partial L/\partial \boldsymbol{q} = \mathbf{0}$ が導かれる．これを $\boldsymbol{q}$ について解いて，式 (II.16) を満たすように $\boldsymbol{\lambda}_4$ を決定することにより，最適出発時刻選択条件・総交通量保存条件の式が得られる（仮定とも矛盾しない）．さらに，得られた最適出発時刻選択条件・総交通量保存条件の式を式 (II.11) に代入すると，これはフロー保存条件に一致する．以上より全ての最適性条件が均衡条件に一致することが明らかとなり，**[DUE-EOP]** と均衡条件との等価性は示された．□

REFERENCES

1) Wie, B.-W., Tobin, R. L., Friesz, T. L., and Bernstein, D.: A discrete time, nested cost operator approach to the dynamic network user equilibrium problem, Transportation Science, Vol.29, No.1, pp.79–92, 1995.
2) Huang, H.-J. and Lam, W. H.: Modeling and solving the dynamic user equilibrium route and departure time choice problem in network with queues, Transportation Research Part B: Methodological, Vol.36, No.3, pp.253–273, 2002.
3) Friesz, T. L. and Mookherjee, R.: Solving the dynamic network user equilibrium problem with state-dependent time shifts, Transportation Research Part B: Methodological, Vol.40, No.3, pp.207–229, 2006.
4) Friesz, T. L., Han, K., Neto, P. A., Meimand, A., and Yao, T.: Dynamic user equilibrium based on a hydrodynamic model, Transportation Research Part B: Methodological, Vol.47, pp.102–126, 2013.
5) Ma, R., Ban, X., Pang, J.-S., and Liu, H. X.: Submission to the dta2012 special issue: Approximating time delays in solving continuous-time dynamic user equilibria, Networks and Spatial Economics, Vol.15, pp.443–463, 2015.
6) Long, J., Szeto, W., Gao, Z., Huang, H.-J., and Shi, Q.: The nonlinear equation system approach to solving dynamic user optimal simultaneous route and departure time choice problems, Transportation Research Part B: Methodological, Vol.83, pp.179–206, 2016.
7) Ma, R., Ban, X., and Pang, J.-S.: A link-based differential complementarity system formulation for continuous-time dynamic user equilibria with queue spillbacks, Transportation Science, Vol.52, No.3, pp.564–592, 2018.
8) Han, K., Eve, G., and Friesz, T. L.: Computing dynamic user equilibria on large-scale networks with software implementation, Networks and Spatial Economics, Vol.19, pp.869–902, 2019.
9) 長江剛志, 赤松隆, 清水廉, 符皓然: 経路・出発時刻同時選択型の動的利用者均衡配分の求解法: 二次計画問題アプローチ, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.76, No.3, pp.264–281, 2020.
10) Frank, M. and Wolfe, P.: An algorithm for quadratic programming, Naval research logistics quarterly, Vol.3, No.1-2, pp.95–110, 1956.
11) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Dynamic equilibrium assignment with queues for a one-to-many od pattern, Transportation and Traffic Theory, Vol.12, pp.185–204, 1993.
12) 涌井優尚, 酒井高良, 赤松隆: 大規模ネットワークにおける動的利用者均衡配分の効率的解法, 土木学会論文集, Vol.79, No.4, pp.22–00301, 2023.
13) Sandholm, W. H.: Population games and evolutionary dynamics, MIT press, 2010.

(Received 2023. 10. 13)

(Accepted 2023. 10. 13)