摂動効用経路選択モデルを用いた選択肢集合サイズの推定可能性

渡邉 葵[1]・日高 健[2]

[1]正会員　（株）豊田中央研究所（〒480–1192　愛知県長久手市横道 41-1）
E-mail: Aoi.Watanabe.ub@mosk.tytlabs.co.jp
[2]非会員　（株）豊田中央研究所（〒480–1192　愛知県長久手市横道 41-1）
E-mail: hidaka@mosk.tytlabs.co.jp

経路選択モデルにおいて，バイアスなく推定を行うための選択肢集合のサンプリング法がいくつか提案されている．だが，旅行者の選択肢集合自体の特定を試みた研究は限定的であり，本研究では，観測された経路選択結果から選択肢集合サイズを推定する方法を提案する．ここでは α-Tsallis エントロピーを摂動項とした，摂動効用最大化に基づく経路選択モデルを用いる．当該モデルは，典型的な多項ロジットモデルを特殊解に含みつつ，一部の選択肢のみが正の確率をもつことを表現できる．そのため，経路効用に基づく選択肢集合の内生的な形成を表現可能であり，経路選択モデルのパラメータと選択肢集合の同時推定が可能になる．シミュレーションデータに対する検証により，観測数が少ない場合でも，偶然観測がなされなかったのか，あるいは，選択肢集合に含まれていなかったのかを判別し，真の選択肢集合を復元し得ることを確認した．また，確度の高い推定のために必要な観測数についての知見が得られた．

Key Words: *route choice, choice set, perturbed utility, estimation, α-Tsallis entropy*

1. 序論

経路選択行動のモデル化において，経路選択肢集合の取り方は非常に重要である．なぜなら，一般に OD（Origin-Destination）間を結ぶ経路選択肢を完全に列挙することは困難であり，誤った経路選択肢集合を用いてしまうと，推定や予測にバイアスが生じてしまうからである．通常，旅行者の経路選択肢集合やその形成過程は，観測者には，あるいは旅行者本人にも観測することができない．そのため，経路選択肢集合の形成モデルを構築することは難しく，既往の経路選択肢集合の形成法の議論においては，専ら，バイアスなく行動モデルのパラメータを推定するためには，いかにして経路候補集合を形成するかという観点で取り組まれてきている[1)–4)]．

一方，選択肢集合の形成過程と選択行動とを分離した Manski の二段階モデル[5)] に基づき，確率的な選択肢集合の形成過程を明示的に取り込んだ離散選択モデルがいくつか提案されている[6)–8)]．これらは，選択肢集合をファジイ集合と見なしたよりシンプルな方法論[9)] への発展も見られるが，いずれの場合も，列挙された選択肢に対し，それらの全部分集合を考慮する必要がある．選択肢数に対し，その部分集合の数は指数的に発散するため，現実のネットワークにおける経路選択に対してこれらの方法論を適用することは，容易ではないことが指摘されている[3)]．

そこで本研究では，列挙された経路候補に対して，その全部分集合を考えることなく，モデルパラメータと旅行者の経路選択肢集合とを同時推定する方法を提案する．ここでは，Watanabe and Hidaka[10),11)] で提案された，経路候補集合内に確率ゼロを生成可能な経路選択モデルを活用する．

選択肢集合の形成過程を明示的に取り扱った既往の方法[6)–9)] では，選択肢集合の形成過程と選択行動とを分離し，選択行動の記述においては，多項ロジット（Multinomial Logit; MNL）モデルに代表される通常の離散選択モデルが用いられていた．対して，本研究では，選択肢集合内に確率ゼロを生成可能な行動モデルを用いることで，行動モデル内で選択肢集合が内生的に決定される．そのため，列挙された経路候補に対して，その全部分集合を考えることなく，列挙された経路候補をそのまま選択肢として用いて，モデルパラメータと旅行者の経路選択肢集合とを同時推定することが出来る．

以降の構成は以下の通りである．2 章で今回用いる経路選択モデルの確認を行い，3 章ではモデルパラメータと選択肢集合を同時推定する方法を提案する．また，4 章では，パラメータ真値を与えたシミュレーションデータに対し推定の検証を行い，最後に 5 章でまとめと今後の展望を述べる．

2. 経路選択モデル：αPURCM

本章では，今回用いる摂動効用最大化に基づく経路ベースの経路選択モデルである αPURCM (Perturbed Utility Route Choice Model)[10),11)] の定式化を確認する．なお，以降において，「経路候補集合」は経路選択モデルのパラメータ推定のために観測者が事前列挙した経路の集合を指し，「経路選択肢集合」は旅行者が経路選択のために認識しており，代替経路の候補と見なしている経路の集合を指す．

αPURCM において，旅行者 $n \in \mathcal{N}$ の経路候補集合 $\mathscr{C}_n$（要素数 C_n）が与えられているとき，経路選択確率ベクトル $\boldsymbol{p}_n \equiv (p_{ni})_{i\in\mathscr{C}_n}$ は，

$$\boldsymbol{p}_n = \underset{\boldsymbol{q}_n \in \Delta^{C_n}}{\arg\max} \left\{ \boldsymbol{V}_n(X_n;\boldsymbol{\beta})^T \boldsymbol{q}_n + H^\alpha(\boldsymbol{q}_n) \right\} \tag{1}$$

で定まる．ただし，$\boldsymbol{V}_n(X_n;\boldsymbol{\beta})$ は経路効用ベクトル，$\boldsymbol{q}_n$ は決定変数であり，C_n 次元確率シンプレックス Δ^{C_n} 内のベクトルである．経路効用ベクトル $\boldsymbol{V}_n(X_n;\boldsymbol{\beta})$ は，説明変数行列 X_n とパラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}$ から計算される．また，$H^\alpha(\boldsymbol{q}_n)$ は α-Tsallis エントロピーと呼ばれ，$\alpha > 0$ において，

$$H^\alpha(\boldsymbol{q}_n) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \sum_{j\in\mathscr{C}_n} \left(q_{nj} - q_{nj}^\alpha \right) & ,\alpha \neq 1 \\ -\sum_{j\in\mathscr{C}_n} q_{nj} \log q_{nj} & ,\alpha = 1 \end{cases} \tag{2}$$

で定義される．

αPURCM は Watanabe and Hidaka[10),11)] で提案されており，経路候補集合 $\mathscr{C}_n$ 内で，効用が一定値より低い経路については選択確率を厳密にゼロとすることが出来る．また，$\alpha = 1$ で MNL モデルと一致し，α が大きくなるほど，非ゼロの選択確率が割り当てられる選択肢数が減少する．事前に列挙した経路候補集合 $\mathscr{C}_n$ に対し，式 (1) に基づき非ゼロの選択確率が割り当てられる集合を $\mathscr{C}_{\tilde{n}}$ と表記する．このとき，$\mathscr{C}_{\tilde{n}}$ は，旅行者が代替選択肢とみなしている経路集合と言え，旅行者の選択肢集合と定義できる．すなわち，αPURCM は経路効用ベクトル $\boldsymbol{V}_n$ が与えられた時に，経路選択確率ベクトル $\boldsymbol{p}_n$ と経路選択肢集合 $\mathscr{C}_{\tilde{n}}$ を同時決定できる．

3. モデルパラメータと選択肢集合の同時推定

本章では，経路選択結果の観測データのみから，経路選択モデルのモデルパラメータと旅行者の選択肢集合を同時推定する方法を示す．

(1) 推定法：Fenchel-Young Loss 最小化

式 (1) の αPURCM は，選択肢集合 $\mathscr{C}_{\tilde{n}}$ の大きさを決定するパラメータ α と，行動モデルのパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ の二種類のパラメータをもつ．これらを同時推定するためには，クロスエントロピー誤差を拡張した Fenchel-Young loss[12)] の最小化を考える必要がある．

通常の最尤法（クロスエントロピー誤差最小化）を用いて推定を試みた場合，旅行者 $i \in \mathcal{N}$ の観測された選択確率ベクトル $\boldsymbol{y}_n \equiv (y_{ni})_{i\in\mathscr{C}_n}$ に対し，

$$LL \equiv \Sigma_{n\in\mathcal{N}} \Sigma_{i\in\mathscr{C}_n} \boldsymbol{y}_n \ln \boldsymbol{p}_n \tag{3}$$

で計算される対数尤度関数 LL を最大化する $(\alpha, \boldsymbol{\beta})$ を求めることになる．だが，αPURCM では，$p_{ni} = 0$ となる $i \in \mathscr{C}_n$ が存在し得るため，式 (3) の対数が発散する場合があり，尤度（クロスエントロピー誤差）を評価できない可能性がある．

そこで，以下で計算される αPURCM に対する Fenchel-Young loss である L^α の最小化を考える．

$$L^\alpha \equiv \sum_{n\in\mathcal{N}} \left\{ (\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{y}_n)^T \boldsymbol{V}_n + H^\alpha(\boldsymbol{p}_n) \right\} \tag{4}$$

Fenchel-Young loss はクロスエントロピー誤差の一般化に相当する．実際，$\alpha = 1$ のとき，第二項の $H^\alpha(\boldsymbol{p}_n)$ は Shannon エントロピーとなり，L^α はクロスエントロピー誤差と一致する．そのため，$\alpha = 1$ において，L^α の最小化は式 (3) の対数尤度 LL の最大化と等価である．式 (4) の Fenchel-Young loss は $p_{ni} = 0$ となる $i \in \mathscr{C}_n$ が存在したとしても評価可能である．

さて，式 (4) の Fenchel-Young loss の最小化のためには，選択確率式 $\boldsymbol{p}_n$ をパラメータ $(\alpha, \boldsymbol{\beta})$ で微分出来ることが望ましい．いま，式 (1) の最適化問題の解として定まる αPURCM の選択確率 $\boldsymbol{p}_n$ は closed-form な式形を与えることは出来ない．だが，選択確率式 $\boldsymbol{p}_n$ をパラメータで微分したものは closed-form に書き下すことが出来る．実際，パラメータ α で $\boldsymbol{p}_n$ を微分すると，

$$\frac{\partial p_{ni}}{\partial \alpha} = \begin{cases} \frac{p_{ni} - p_{ni}^1}{(\alpha-1)^2} + \frac{p_{ni}^2 - p_{ni}^1 \sum_j p_{nj}^2}{\alpha - 1}, & \alpha > 1 \\ \frac{p_{ni}^2 \log p_{ni} - p_{ni} \sum_j p_{nj}^2 \log p_{nj}}{2}, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{5}$$

となる[13)]．ただし，$p_{ni}^1 \equiv (p_{ni})^{2-\alpha} / \sum_j (p_{nj})^{2-\alpha}$ であり，$p_{ni}^2 \equiv -p_{ni} \log p_{ni}$ である．

また，行動モデルのパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ を含む経路効用

ベクトル $\boldsymbol{V}_n(X_n;\boldsymbol{\beta})$ で $\boldsymbol{p}_n$ を微分すると，

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}_n}{\partial \boldsymbol{V}_n} = \mathrm{diag}\,\boldsymbol{s} - \frac{1}{\|\boldsymbol{s}\|_1}\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^T, where\ s_i = \begin{cases} p_{ni}^{2-\alpha} & ;i \in \mathcal{S}_n \\ 0 & ;\text{otherwise} \end{cases} \tag{6}$$

となる[14]．ただし，$\mathcal{S}_n$ は $\boldsymbol{p}_n$ の support（選択確率が 0 でない経路集合），すなわち，$\mathcal{S}_n = \{j \in \mathscr{C}_n \mid p_{nj} > 0\}$ である．これらの選択確率のパラメータ微分値を用いることで，式 (4) の Fenchel-Young loss の最小化は容易に行える．

ここで，以上の方法を用いて推定を行う場合，通常の非集計モデルと同様，用いたデータ内の旅行者集合 $\mathcal{N}$ は，全員が同一のパラメータ，選択肢集合に従っていると仮定し，推定していることになる．旅行者集合 $\mathcal{N}$ 内の異質性の取り扱いや，推定に与える影響の評価は今後の課題である．

なお，Fenchel-Young loss の最小化を行うかわりに，式 (3) の対数尤度最大化において，$p_{ni} = 0$ となる場合は，非常に小さな値を p_{ni} に便宜的に代入することで，数値計算上推定を行うという方法も取ることが出来る．こうした方法は MNL モデルの推定においても，数値計算上は桁落ちなどにより確率ゼロとなる選択肢が生成されてしまう場合があるため，その対処法として利用されている．実際，αPURCM の推定において，こうした手法を取ったとしても，安定的に推定を行えることを確認している．

(2) 経路候補集合の設定

推定に際しては，事前に経路候補集合 $\mathscr{C}_n$ を何らかの方法で列挙する必要がある．経路列挙については，K 番目最短経路探索[15] やラベリング法[1]，分枝限定法[2] のような決定論的な方法や，Implicit Availability Perception[9] や選択肢サンプリング[3]，ベイズアプローチ[4] のような確率的な方法などが既に提案されている．

αPURCM では，推定や選択確率の計算の過程で効用が一定値より低い経路の選択確率はゼロとなる．そのため，十分大きな $\mathscr{C}_n$ を事前に取っておきさえすれば，$\mathscr{C}_n$ の取り方や生成法によらず選択肢集合 $\mathscr{C}_{\tilde{n}}$ を一意に決定できる．

既往の経路候補集合の形成法に関する研究は，専ら，推定時にバイアスを生じさせないように経路候補集合を生成するためには，どのような方法で経路候補集合を形成すべきか，という視点で取り組まれてきている．こうした研究においては，行動モデルとして，MNL モデルのような選択肢集合内のすべての要素に非ゼロの確率を割り当てるモデルが暗に想定されている．本研究では，選択肢集合内に確率ゼロを生成できる αPURCM を行動モデルとして用いることで，摂動効用最大化という行動原理に整合する形で行動モデル内で選択肢集合が内生的に決定されるため，サンプリング法に起因する推定のバイアスを取り除くことに成功している．

4. シミュレーションデータによる検証

αPURCM は事前の経路候補集合 $\mathscr{C}_n$ に対し，実際の経路選択の観測結果から，選択確率が非ゼロの経路集合として，旅行者の経路選択肢集合 $\mathscr{C}_{\tilde{n}}$ を推定できる．だが，経路選択結果の観測数が少ない場合，ある経路が偶然観測されなかっただけなのか，あるいは，経路選択肢集合に含まれていなかったのかを判定することが難しくなることが想定される．そこで，パラメータ真値を与えて生成した経路選択結果のシミュレーションデータに対して，αPURCM の推定を行い，どの程度の観測があれば真の経路選択肢集合を復元できるかを確認する．

(1) 問題設定

本章で用いる設定は以下の通りである．いま，$M \in \{10, 50, 100, 200\}$ 組の OD ペア集合 $\mathscr{M}$ に対して，各 OD ペア $m \in \mathscr{M}$ につき，経路候補集合が $\mathscr{C}_m$（要素数 $C_m = 50$），観測データの個数が $N_m = \{25, 100, 250, 1000\}$ であるとする．OD ペア $m \in \mathscr{M}$ の各経路 $i \in \mathscr{C}_m$ は，距離のみを説明変数 x_{mi} として持ち，各経路効用は $V_{mi} = \beta \cdot x_{mi}$ で計算されるとする．ここで，β は距離感度パラメータである．なお，本章での検証においては，$\alpha = \{1.0, 1.25, 1.5, 1.75, 2.0\}, \beta = \{-1.0, -1.5, -2.0, -2.5, -3.0\}$ に対して検証を行っている．

x_{mi} は $(0, 1]$ 乱数で与え，(α, β) の真値 $(\alpha^\star, \beta^\star)$ を与えて (1) の αPURCM に基づき，OD ペア $m \in \mathscr{M}$ ごとに真の選択確率ベクトル $\boldsymbol{p}_m^\star$ を計算する．さらに，真の選択確率ベクトル $\boldsymbol{p}_m^\star$ に従うように，経路選択の観測結果を各 OD ペアにつき $N_m \in \{25, 100, 250, 1000\}$ 個生成する．こうして得られた M 組の OD ペア分の N_m 個ずつの観測データに対して，Fehchel-Young loss 最小化により，パラメータ (α, β) の推定値 $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ を求め，パラメータ真値 $(\alpha^\star, \beta^\star)$ との比較を行う．

ここで，真の選択確率ベクトル $\boldsymbol{p}_m^\star$ において，非ゼロの確率が割り振られている経路集合が，各 OD ペア $m \in \mathscr{M}$ における，真の選択肢集合 $\mathscr{C}_{\tilde{m}}^\star$ である．推定パラメータ $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ を用いて，式 (1) の αPURCM の計算を行った際に得られる推定された選択肢集合 $\hat{\mathscr{C}}_{\tilde{m}}$ と，真の選択肢集合 $\mathscr{C}_{\tilde{m}}^\star$ との比較を行うことで，

選択肢集合の復元性を検証できる．

なお，観測結果を確率的に生成しているため，シミュレーションデータを生成するたびに（実験のたびに）推定結果が異なってしまう．そのため，bootstrap を用いて複数回のデータ生成（復元抽出）と推定を行い，推定値の標準誤差を求めている[16]．具体的には，パラメータ真値 $(\alpha^\star, \beta^\star)$ に基づき生成された，各 OD ペアにつき N_m 個の経路選択の観測結果に対して，OD ペアごとに N_m 個の選択結果の疑似データを復元抽出で生成し，ここで得られたデータに対して推定を行う，という操作を $J = 100$ 回行うことで，パラメータ推定値 $(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_J)$ を得る．このとき，パラメータ推定値の分散共分散行列は，$\frac{1}{J}\Sigma_j(\hat{\boldsymbol{\theta}}_j - \hat{\boldsymbol{\theta}})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_j - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T$ で得られる．

(2) 結果

図-1 と**図**-2 は，各実験設定ごとに，パラメータ真値に対し，パラメータ推定値を示したものである．**図**-1 は $\alpha = 1.25$ で固定した場合における β を，**図**-2 は $\beta = -2.0$ で固定した場合の α を示している．なお，以降で述べる結果の性質は，他の (α, β) でも同様の傾向を示すことを確認している．

今回の検証では，OD ペアごとに各経路の選択確率を集計し，そのシェアを用いて Fenchel-Young loss が計算されることになる．そのため，OD ペアごとに集計化されたデータを用いていることになり，OD ペア数 M がサンプル数に相当し，OD ペア数 M が大きくなることで推定精度が高くなる．

今回の設定では，OD ペアが $M = 50$ 程度あれば，標準誤差が小さくなり，推定精度が増しているが，OD ペアが $M = 10$ 程度でも，OD ペアごとの観測数 N_m が多ければ標準誤差を抑えた精度の良い推定が可能になっている．なお，**図**-2 を見ると，観測が少ない場合に，α を過大に推定してしまう傾向が見て取れる．これは，観測が少ない場合，偶然観測されなかった経路が，選択肢集合に含まれていなかったと判定されているためであると考えられ，選択肢集合を精度良く推定するためには，一定の観測数が必要なことが示唆される．

続いて，**図**-3 は，真の選択肢集合のサイズに対し，推定された選択肢集合のサイズを示したものである．各図は経路候補集合サイズ $C_m = 50$ に対する観測数 N_m の比率である観測率（observation ratio）が異なる．なお，M 組ある各 OD ペアごとに真の選択肢集合や推定された選択肢集合は計算されるため，選択肢集合のサイズについては，各実験設定，すなわち，(α, β, N_m, M) の組ごとに，全 OD ペアでの平均を取った値を用いて推定値や標準誤差の計算を行っている．また，**図**-4 は，真の選択肢集合のサイズに対し，疑似的に生成された観測データ内で，正の流量が観測された選択肢数を示したものである．

図-3 を見ると，提案手法を用いて真の選択肢集合サイズの復元に成功していることが分かる．α が 1.0 よりも一定程度大きい場合，観測率が 0.5 程度，すなわち，選択肢集合サイズに対して観測数が半分であった場合でも，高い精度で真の選択肢集合サイズを復元できている．一方，α が 1.0 に近く小さい（MNL モデルに近い）場合，真の選択確率が非ゼロである経路集合が大きくなるため，観測率が低いと，観測数が不十分なことに起因して推定の標準誤差が大きくなる．観測率を高めることで標準誤差を小さくすることができ，$\alpha = 1.25$ であれば観測率が 5 程度あれば精度良く推定できていることが分かる．なお，**図**-4 を見ると，各実験設定において，真の選択肢集合に対して，観測データ内でも非ゼロ流量が観測された経路数は，非常に限定的であることが分かる．すなわち，αPURCM を用いたモデルパラメータと選択肢集合の同時推定においては，ある経路の観測がなかった際に，その経路が偶然観測されなかっただけなのか，あるいは，真の選択肢集合に含まれていなかったのかを判別し，真の選択肢集合を精度良く復元できると言える．

5. 結論

本研究では，Watanabe and Hidaka[10),11)] で提案したゼロ流量を表現可能な経路選択モデル（αPURCM）を用いて，モデルパラメータと選択肢集合の同時推定が可能であることを示し，その具体的な手順を示した．また，パラメータ真値を与えたシミュレーションデータに対して推定の検証を行い，提案手法を用いることで，ある経路が偶然観測されなかっただけなのか，あるいは，経路選択肢集合に含まれていなかったのかを判別して，真の選択肢集合を復元し得ることを確認した．同時に，精度良く選択肢集合の推定を行うためには，経路候補集合の数に対して，どの程度の観測数が必要であるかの示唆を得た．このように提案手法を用いることで，先験的な仮定を用いたり，選択肢集合形成のモデル化をすることなく，また，選択肢の全部分集合を考慮することなく，定量的に選択肢集合サイズとモデルパラメータを同時推定することが可能である．

今後の展開として，第一に，実データを用いて提案モデルのバリデーションを行うことが重要であろう．この際，真の選択肢集合をいかにして観測する

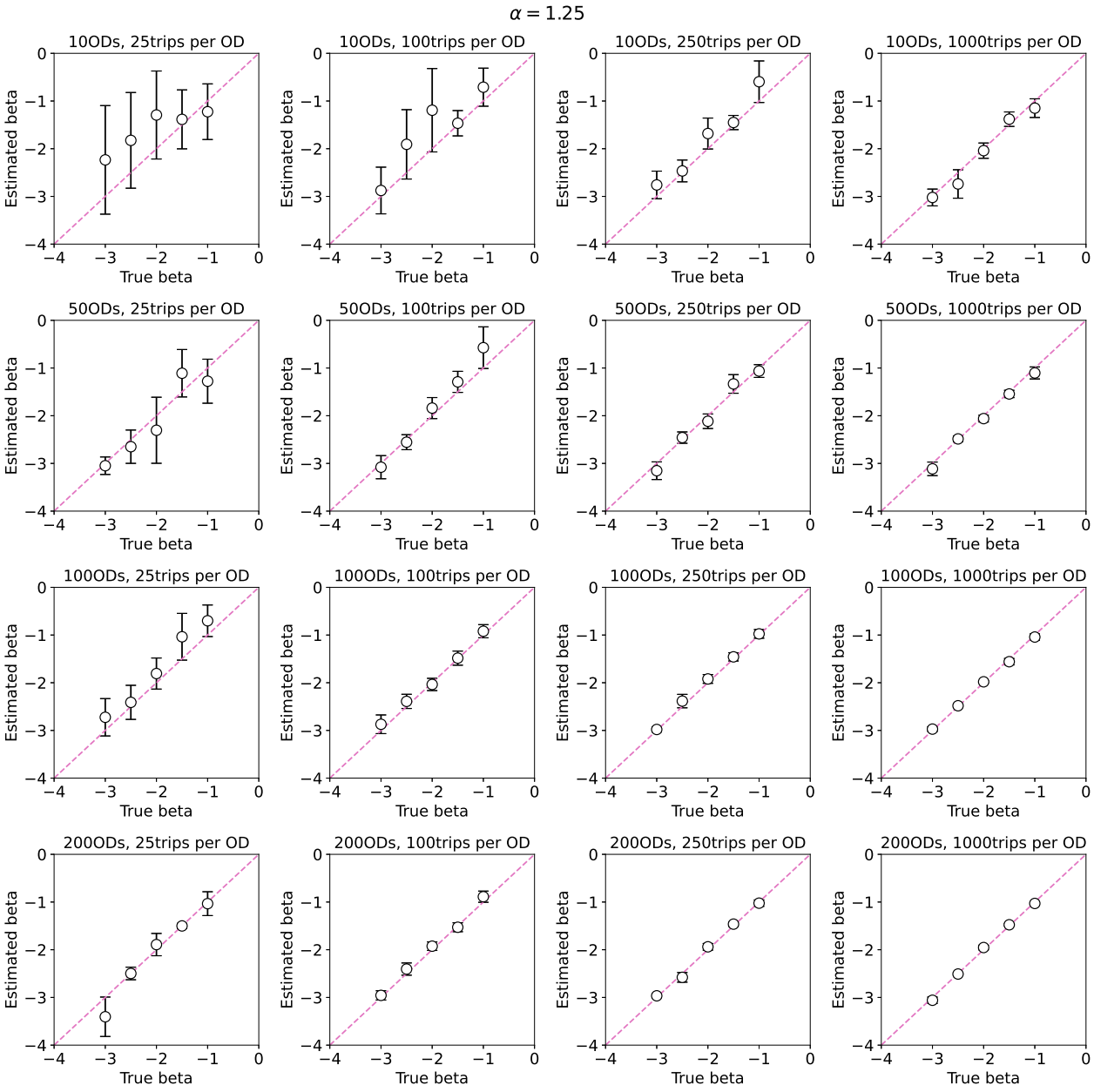


図-1　パラメータ β に関する真値と推定値の関係．$\alpha = 1.25$ で固定．

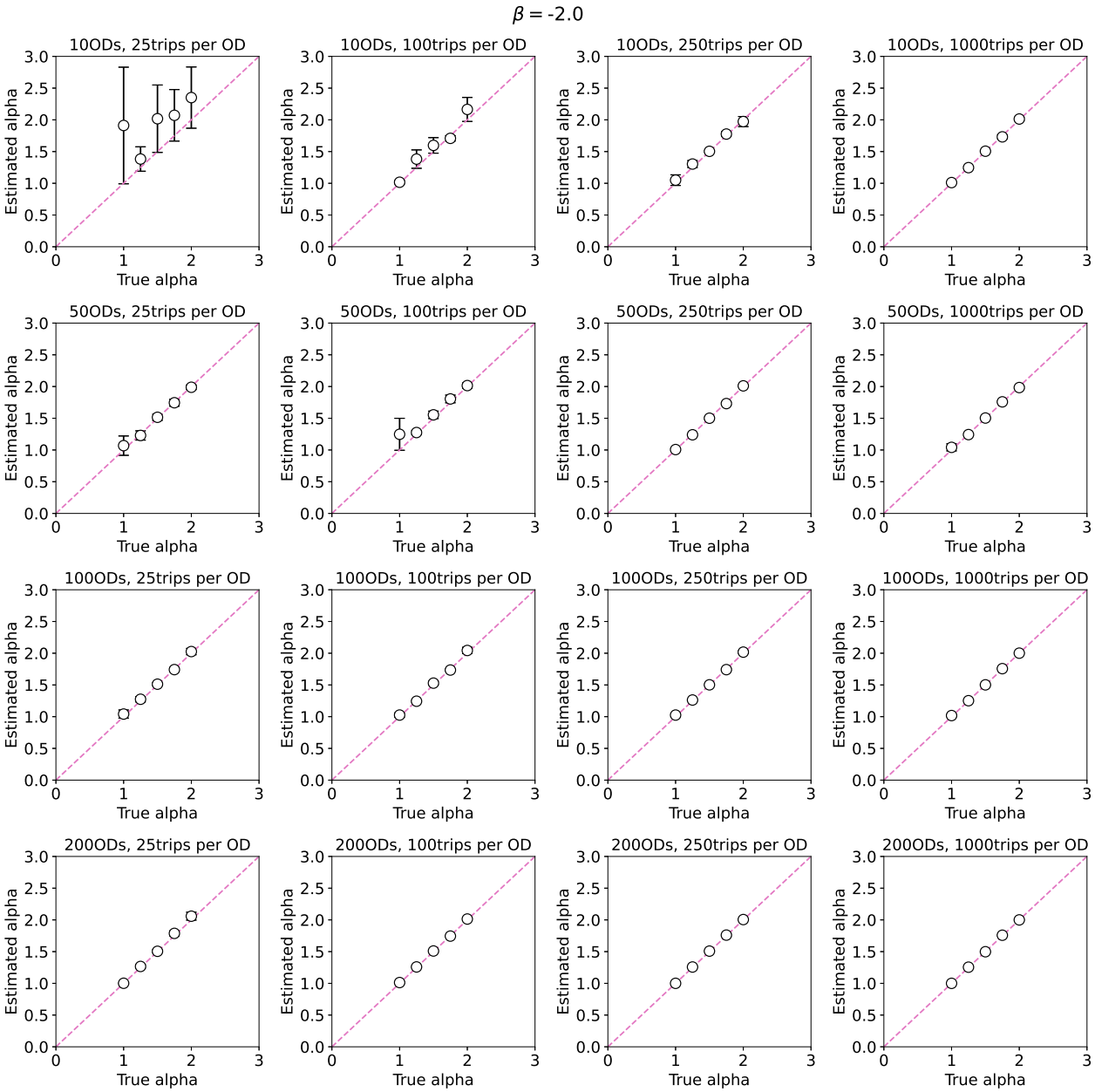


図-2　パラメータ α に関する真値と推定値の関係．$\beta = -2.0$ で固定．

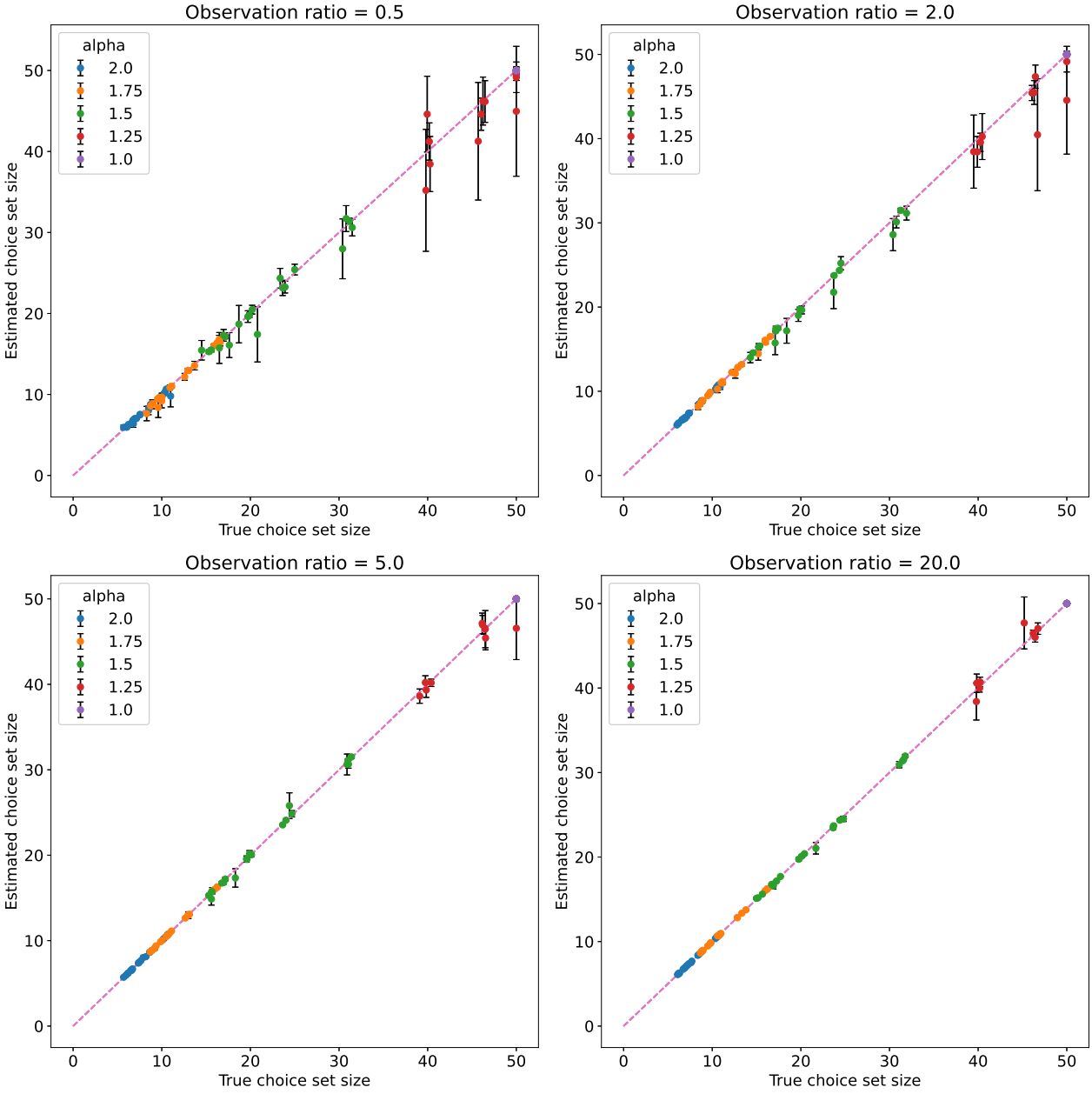


図-3　真の選択肢集合サイズと推定された選択肢集合サイズの関係．各図は経路候補集合サイズ $C_m = 50$ に対する観測数 N_m の比率（観測率; observation ratio）が異なる．

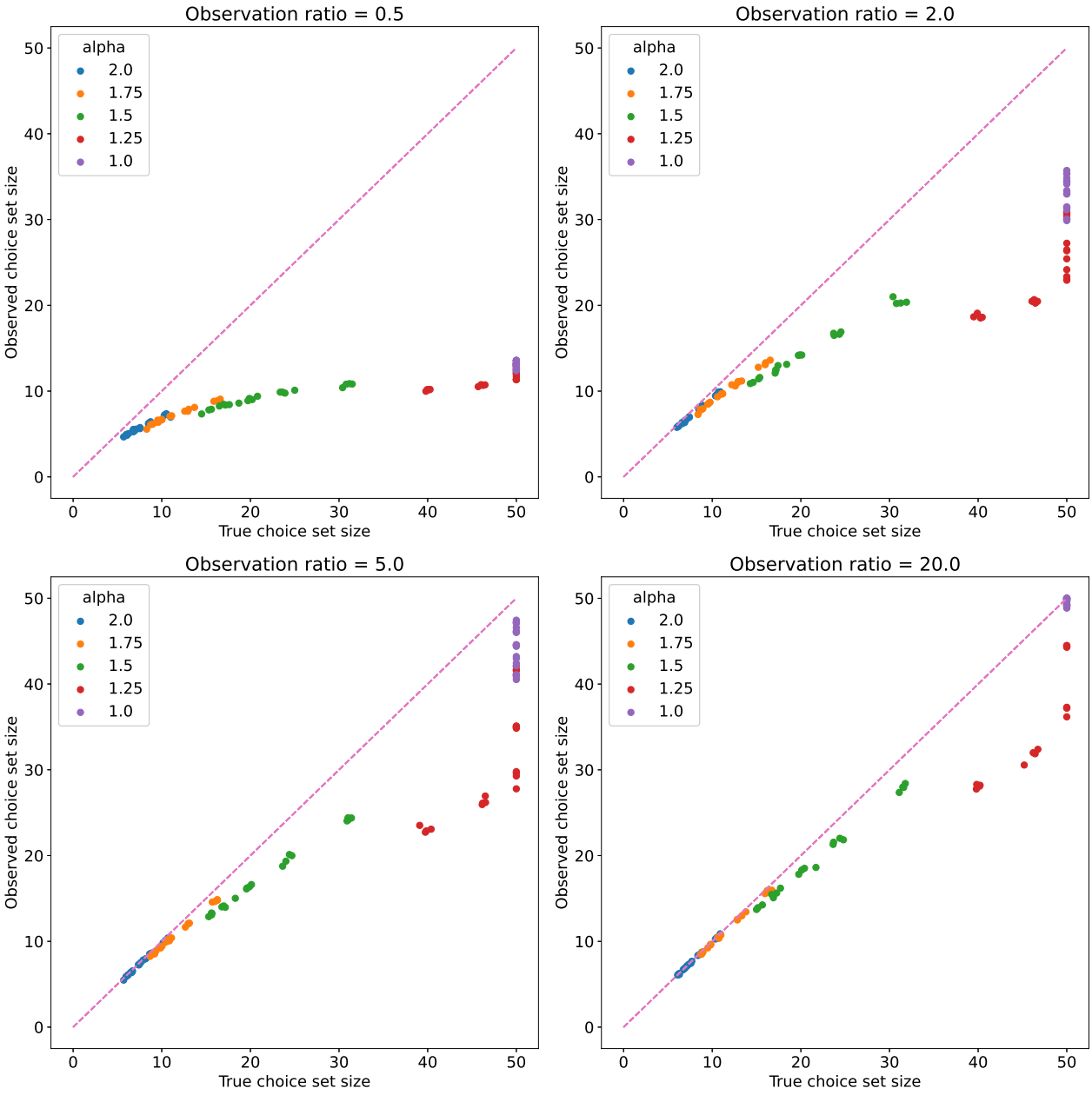


図-4　真の選択肢集合サイズと観測データ内で正の流量が観測された選択肢数の関係．各図は経路候補集合サイズ $C_m = 50$ に対する観測数 N_m の比率（観測率; observation ratio）が異なる．

かということが非常に重要な課題になる．また，経路候補集合の取り方や旅行者集合内の異質性が推定に与える影響を評価することや，ある経路が選択肢集合に含まれるかどうかを確率的に評価する方法を提案していくことも興味深い．なお，ここで提案した手法は，行動モデルにおいて内生的に選択肢集合を形成するため，補償的な選択肢集合形成を仮定していることになる．実際の選択肢集合形成過程は非補償的である場合も想定されるため，非補償型の選択肢列挙と提案モデルを組み合わせることで，より現実的なモデルの構築が可能になろう．

REFERENCES

1) Ben-Akiva, M., Bergman, M. J., Daly, A. J., & Ramaswamy, R. (1984). Modelling inter urban route choice behaviour. In Papers presented during the Ninth International Symposium on Transportation and Traffic Theory held in Delft the Netherlands, 11-13 July 1984.
2) Bovy, P. H., & Hoogendoorn-Lanser, S. (2005). Modelling route choice behaviour in multi-modal transport networks. Transportation, 32, 341-368.
3) Frejinger, E., Bierlaire, M., & Ben-Akiva, M. (2009). Sampling of alternatives for route choice modeling. Transportation Research Part B: Methodological, 43(10), 984-994.
4) Flötteröd, G., & Bierlaire, M. (2013). Metropolis – Hastings sampling of paths. Transportation Research Part B: Methodological, 48, 53-66.
5) Manski, C. F. (1977). The structure of random utility models. Theory and decision, 8(3), 229.
6) Swait, J., & Ben-Akiva, M. (1987). Incorporating random constraints in discrete models of choice set generation. Transportation Research Part B: Methodological, 21(2), 91-102.
7) Ben-Akiva, M., & Boccara, B. (1995). Discrete choice models with latent choice sets. International journal of Research in Marketing, 12(1), 9-24.
8) Morikawa, T. (1996). A Hybrid Probabilistic Choice Set Model with Compensatory and Noncompensatory Choice Rules. Volume 1: Travel Behavior. In World Transport Research. Proceedings of the 7th World Conference on Transport ResearchWorld Conference on Transport Research Society.
9) Cascetta, E., & Papola, A. (2001). Random utility models with implicit availability/perception of choice alternatives for the simulation of travel demand. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 9(4), 249-263.
10) Watanabe, A. & Hidaka, K. (2023). Representing Zero-Flow: Perturbed Utility Based Stochastic User Equilibrium Assignment Model. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=4493779.
11) Watanabe, A. & Hidaka, K. (2023). A Perturbed Utility Route Choice Model Allowing Zero-Flow. The 67th Conference of Infrastructure Planning and Management, Fukuoka, Japan.
12) Blondel, M., Martins, A. F., & Niculae, V. (2020). Learning with fenchel-young losses. The Journal of Machine Learning Research, 21(1), 1314-1382.
13) Peters, B., Niculae, V., & Martins, A. F. (2019). Sparse sequence-to-sequence models. In Proceedings of the 57th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics, pages 1504 – 1519, Florence, Italy. Association for Computational Linguistics.
14) Correia, G. M., Niculae, V., & Martins, A. F. (2019). Adaptively sparse transformers. In Proceedings of the 2019 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing and the 9th International Joint Conference on Natural Language Processing (EMNLP-IJCNLP), pages 2174 – 2184, Hong Kong, China. Association for Computational Linguistics.
15) Eppstein, D. (1998). Finding the k shortest paths. SIAM Journal on computing, 28(2), 652-673.
16) Giudici, P., Givens, G. H., & Mallick, B. K. (2013). Wiley series in computational statistics (Vol. 596). Hoboken, NJ: Wiley Online Library.

(Received ??? ?? 202?)
(Accepted ??? ?? 202?)

ESTIMATING THE SIZE OF ROUTE CHOICE SETS: A PERTURBED UTILITY MODEL APPROACH

Aoi WATANABE and Ken HIDAKA