

# 交通混雑を考慮した Fujita and Ogawa (1982) モデルに基づく定量的都市経済モデルの開発

杉本 達哉<sup>1</sup>・杉浦 聡志<sup>2</sup>・高山 雄貴<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 八千代エンジニアリング株式会社 (〒111-8648 東京都台東区浅草橋 5-20-8 CS タワー)  
E-mail: tt-sugimoto@yachiyo-eng.co.jp (Corresponding Author)

<sup>2</sup>正会員 北海道大学准教授 工学研究院 (〒060-8628 北海道札幌市北区13条西8)  
E-mail: sugiura@eng.hokudai.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 東京工業大学教授 環境・社会理工学院 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山2-12-1)  
E-mail: takayama.y.af@m.titech.ac.jp

本研究では、交通混雑を考慮した Fujita and Ogawa (1982) 型の定量的都市経済モデルを開発する。そして、開発したモデルにポテンシャル関数が存在することを示したうえで、その性質を利用した効率的な数値解析手法を提示する。開発したモデルの特徴・数値解析手法の効率性を確認するために、二次元格子状空間下で安定均衡状態として創発する都市空間構造を示す。最後に、実都市を対象とした反実仮想実験を実施する。

**Key Words:** *quantitative urban model, traffic congestion, polycentric urban configurations, potential function*

## 1. はじめに

標準的な住宅立地理論<sup>1,2,3)</sup>では、地代と通勤費用のトレードオフ関係をもとに都市空間構造の分析を行っている。さらに、長年に亘り蓄積された研究において、(現実に観測された)異質な家計の居住地分布の規則性や、混雑料金などの政策の効果を説明することにも成功している<sup>4,5,6,7)</sup>。土木計画学分野では、これらの理論的知見を基礎として、交通・立地統合モデルや CUE モデルに関する研究が蓄積されており、政策効果の空間分布を計量するための標準的な分析枠組が確立している (e.g., 上田ら<sup>8)</sup>)。しかし、これらの理論的枠組は都心の内生的形成メカニズムが考慮されていないことから、都心の空洞化・郊外化などの、現実に観測される重要な現象を表現することができない。

都心の内生的形成メカニズムに関する理論は、Beckmann<sup>9)</sup>以降、一連の研究により蓄積されてきた。これらの理論では、経済行動主体間の市場外での相互作用 (e.g., 生産外部性, 居住アメニティ外部性) により、都心の内生的形成現象を説明している。なかでも、Fujita and Ogawa<sup>10)</sup>は複数箇所に都心が形成される現象を説明できる理論的枠組の開発に成功している。このモデルは、

複数の都心が形成されるパターンが安定均衡状態として創発し得ることが明らかにされるなど<sup>11)</sup>、重要な現象を適切に表現できる枠組であることが広く知られている。実際、現実的な都市空間を対象とした計量分析を可能にする“定量的都市経済モデル<sup>12,13)</sup>”はFujita and Ogawa<sup>10)</sup>を基礎に組み立てられている。しかし、これらの研究のほとんどが、その分析の困難を避けるために、通勤時の交通混雑現象を考慮していない。交通混雑がほとんどすべての都市において問題になっていることを考えると、この状況は都市空間構造と交通の間に働く相互作用の重要な部分が無視されていることを意味する。

Allen and Arkolakis<sup>14)</sup>は、これらの課題を解決し得る分析枠組を提案している。彼らは居住アメニティ・生産外部性と交通混雑を考慮した理論的枠組を提示したうえで、現実的な都市空間を対象とした計量分析を実施している。しかし、Allen and Arkolakis<sup>14)</sup>で提示された均衡状態の解析手法は、大規模な都市空間を対象とした分析を可能にしているものの、その適用範囲は次のものに限定される:

- 均衡状態が一意に定まる (ie., 都心の内生的形成現象を説明できないパラメータ下の解析しか適用できない)
- 道路リンクは立地点間を直接結ぶものに限定さ

れ、その起終点の両方に居住者・就業者が存在する (ie., 複雑な道路ネットワークを含む空間に適用できない)

本研究では、これらの課題を解決するために、交通混雑を考慮した Fujita and Ogawa<sup>10)</sup>に基づく定量的都市経済モデルを開発するとともに、創発する安定均衡状態を得るための数値解析手法を提示する。このモデルは複雑な道路ネットワークを含む都市空間を対象とすることが可能であるとともに、複数の均衡状態が存在する場合にも適用できる。ただし、その計算負荷が大きい可能性があることから、本稿は開発したモデル・数値解析手法の特徴を明らかにする基礎的な分析に焦点を当てる。具体的には、二次元格子状空間において創発する安定均衡状態の特徴を調べ、Fujita and Ogawa<sup>10)</sup>と同様に、複数箇所に都心が形成される現象を、開発モデルが表現できることを示す。そして、1,656 立地点・11.7 万リンクからなる金沢都市雇用圏を対象とした計量分析が可能であることを具体的な解析例を通じて明らかにする。

本稿の構成は次のとおりである。まず第 2 章では Fujita and Ogawa<sup>10)</sup>に基づく定量的都市経済モデルを構築する。そして、第 3 章において構築モデルにポテンシャル関数が存在することを示し、その性質を利用した安定均衡状態の数値解析手法を提示する。第 4 章で計量分析に必要なパラメータ設定手法を整理したうえで、第 5 章において反実仮想実験の結果を示す。最後に、第 6 章で本稿の成果と今後の課題を述べる。

## 2. モデル

本章では、Fujita and Ogawa<sup>10)</sup>モデルに基づいた、企業と家計の立地選択に関する相互作用を考慮したモデルを構築する。そのために、都市・交通条件と家計・企業・デベロッパー行動に関する設定を示す。そして、均衡条件を定式化する。

### (1) 都市と交通条件の設定

本モデルでは、離散的な  $A$  箇所の立地点が存在する都市を考える。この都市には、立地主体である家計と企業に加えて、それらに床面積を供給するデベロッパーが存在する。立地点の集合は  $\mathcal{A}$  とし、立地点  $a \in \mathcal{A}$  の面積は  $K_a$ 、立地点  $a, b$  間の距離は  $d_{ab}$  であると仮定する。

任意の立地点間は道路ネットワークにより接続されている。道路ネットワークは、 $N$  箇所のノードと、それらを結ぶ  $L$  個のリンクから構成される。本稿では、ノード  $i$  と  $j$  を結ぶリンクをリンク  $ij$  と呼び、そのノード集合を  $\mathcal{N}$ 、リンク集号を  $\mathcal{L}$  と表す。各立地点にセントロイドとなるノードを 1 つ設定し、そのノードが移動の起点・終

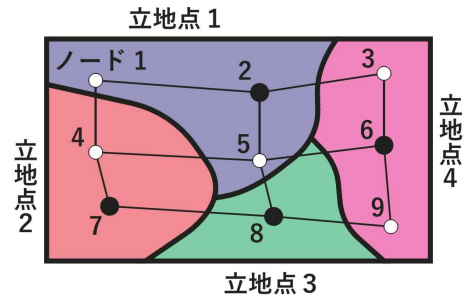


図-1 立地点とノードの関係  
(黒点のノードが各立地点のセントロイド)

点になると考える。立地点  $a$  のセントロイドをノード  $i_a$  と表す。立地点  $a$  を起点、 $b$  を終点とする経路  $p$  の集合  $\mathcal{P}_{ab}$  を、その経路  $p$  に含まれるリンク集号を  $\mathcal{L}_{ab}^p$  とする。立地点とノードの関係を図-1 に示す。

家計は均質であり、都市全体に固定的に  $H$  存在する。各家計は、居住地  $a \in \mathcal{A}$ 、就業地  $b \in \mathcal{A}$  に加えて、通勤時の経路  $p \in \mathcal{P}_{ab}$  を選択する。居住地・就業地・経路別の家計数 (ie., 立地点  $a$  に居住し、就業地  $b$  に経路  $p$  を利用して通勤する家計数) を  $h_{ab}^p$  と表す。このとき、居住地が立地点  $a$  の総家計数  $n_a$ 、就業地が立地点  $b$  の総家計数  $m_b$  は以下で与えられる:

$$n_a = \sum_{b \in \mathcal{A}} \sum_{p \in \mathcal{P}_{ab}} h_{ab}^p, \quad m_b = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{p \in \mathcal{P}_{ab}} h_{ab}^p. \quad (1)$$

道路リンク  $ij \in \mathcal{L}$  を通過する際にかかる交通費用は、標準的な交通ネットワークモデルと同様、当該リンクを利用する家計数 (交通量)  $x_{ij}$  のみに依存する。より具体的には、交通費用  $t_{ij}(x_{ij})$  は、非負、 $x_{ij}$  の単調増加、かつ凸関数で与えられると仮定する。ここで、リンク  $ij$  を通過する家計数  $x_{ij}$  は、次のとおり表される:

$$x_{ij} = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{b \in \mathcal{A}} \sum_{p \in \mathcal{P}_{ab}} \delta_{ab,ij}^p h_{ab}^p, \quad (2)$$

$$\delta_{ab,ij}^p = \begin{cases} 1 & \text{if } ij \in \mathcal{L}_{ab}^p, \\ 0 & \text{if } ij \notin \mathcal{L}_{ab}^p \end{cases}$$

このとき、居住地  $a \in \mathcal{A}$  から就業地  $b \in \mathcal{A}$  に経路  $p \in \mathcal{P}_{ab}$  を使う場合の通勤費用  $c_{ab}^p(\mathbf{x})$  は、以下で与えられる:

$$c_{ab}^p(\mathbf{x}) = \sum_{ij \in \mathcal{L}_{ab}^p} t_{ij}(x_{ij}). \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{x} = (x_{ij})_{ij \in \mathcal{L}}$  である。

### (2) 主体行動

#### a) 家計の行動

家計は合成財・床面積の消費量と居住地のアメニティ水準に応じた効用を得る。ただし、Fujita and Ogawa<sup>10)</sup>と同様、家計が消費する床面積は固定的に  $s^H$  である。したがって、居住地  $a \in \mathcal{A}$ 、就業地  $b \in \mathcal{A}$ 、経路  $p \in \mathcal{P}_{ab}$  の家計の効用水準  $u_{ab}^p$  は、合成財消費量  $z_{ab}^p$  と立地点  $a$  のアメニティ水準  $B_a$  に応じて定まる。具体的には、家計

の効用 $u_{ab}^p$ は以下で与えられると仮定する:

$$u_{ab}^p = z_{ab}^p + B_a. \quad (4)$$

また、合成財の価格を 1 に基準化するため、予算制約は以下で与えられる:

$$w_b = z_{ab}^p + r_a s^H + \tau c_{ab}^p(\mathbf{x}). \quad (5)$$

ここで、 $w_b$ は勤務地 $b$ の賃金率、 $r_a$ は立地点 $a$ の単位床面積の価格、 $c_{ab}^p$ は経路 $p$ の通勤費用、 $\tau$ は正のパラメータである。以上より、 $u_{ab}^p$ は次のように表される:

$$u_{ab}^p = w_b - r_a s^H - \tau c_{ab}^p(\mathbf{x}) + B_a. \quad (6)$$

### b) 企業の行動

企業は、参入や撤退が自由であり、完全競争下で財を生産する。財の生産には、 $s^F$ 単位の床面積と 1 単位の労働を投入する必要がある。また、その生産額は他企業とのコミュニケーション外部性の水準 $F_b(\mathbf{m})$ と、立地点固有の生産性 $D_b$ に応じて定まると仮定する。このとき、立地点 $b$ の企業の利潤 $\pi_b$ には次のように与えられる:

$$\pi_b = \alpha F_b(\mathbf{m}) + D_b - r_b s^F - w_b. \quad (7)$$

ここで、 $\alpha > 0$ はコミュニケーション外部性の大きさを表すパラメータ、 $\mathbf{m} = (m_a)_{a \in \mathcal{A}}$ である。立地点 $b$ の企業の生産額 $F_b(\mathbf{m})$ は、以下に示すように、多くの企業が近接して立地し、コミュニケーションが容易になるほど高くなる:

$$F_b(\mathbf{m}) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \exp[-\rho d_{ba}] m_a. \quad (8)$$

ここで、 $\rho$ は正のパラメータである。なお、 $\rho$ が高いことは、離れた位置に立地する企業が生産性に与える影響 (i.e., 空間的な波及効果) が小さいことを意味する。

このとき、企業の利潤ゼロ条件より、立地点 $b$ の企業の賃金 $w_b$ は次のように表される:

$$w_b = \alpha F_b(\mathbf{m}) + D_b - r_b s^F. \quad (9)$$

### c) デベロッパの行動

デベロッパーは、各立地点で不在地主から借りた単位面積の土地と資本を開発し、完全競争のもとで床面積を家計と企業に供給する。Ahlfeldt et al.<sup>12)</sup>と同様、生産関数は Cobb-Douglas 型であると仮定することから、立地点 $a$ の土地を開発するデベロッパの利潤最大化行動は次のように表される:

$$\max_{Q_a} \Pi_a = r_a S_a - P Q_a - R_a - C, \quad (10a)$$

$$\text{s. t. } S_a = Q_a^\mu. \quad (10b)$$

ここで、 $\mu \in (0, 1)$ は資本の投入割合、 $S_a$ は床面積の供給量、 $Q_a$ は資本投入量、 $R_a$ はデベロッパが不在地主に支払う立地点 $a$ の単位面積あたりの土地に対する地代、 $C$ は固定費用である。また、 $P$ は資本の価格であり、立地点によらず同一の水準である。本稿では、 $P = 1$ となるように資本の単位を基準化する。

利潤最大化問題の 1 階条件および利潤ゼロ条件から、 $Q_a$ 、 $r_a$ は、各々、以下で与えられる:

$$Q_a = (\mu r_a)^{\frac{1}{1-\mu}}, \quad (11a)$$

$$r_a = \frac{(R_a + C)^{1-\mu}}{\mu^\mu (1-\mu)^{1-\mu}}. \quad (11b)$$

立地点 $a$ の床面積需要量は $s^H n_a + s^F m_a$ 、供給量は $S_a K_a$ であることから、であることから、需給均衡条件 (i.e.,  $S_a K_a = s^H n_a + s^F m_a$ ) より、 $r_a$ 、 $R_a$ が $n_a$ 、 $m_a$ の関数として次のように表される:

$$r_a(n_a, m_a) = \frac{1}{\mu} \left( \frac{s^H n_a + s^F m_a}{K_a} \right)^{\frac{1-\mu}{\mu}}, \quad (12)$$

$$R_a(n_a, m_a) = \frac{1-\mu}{\mu} \left( \frac{s^H n_a + s^F m_a}{K_a} \right)^{\frac{1}{\mu}} - C. \quad (13)$$

式(9)、式(12)を式(6)に代入することにより、居住地 $a$ 、就業地 $b$ 、経路 $p$ を選択する家計の効用 $u_{ab}^p$ が以下で与えられる:

$$u_{ab}^p(\mathbf{h}) = \alpha F_b(\mathbf{m}) + D_b - s^F r_b(n_b, m_b) - s^H r_a(n_a, m_a) - \tau c_{ab}^p(\mathbf{x}) + B_a. \quad (14)$$

ここで、 $\mathbf{h} = (h_{ab}^p)_{p \in \mathcal{P}_{ab}, a, b \in \mathcal{A}}$ である。

### (3) 均衡条件

家計は効用 $u_{ab}^p(\mathbf{h})$ が最大となる居住地 $a$ 、就業地 $b$ 、経路 $p$ を選択する。その結果として定まる均衡状態が満たす均衡条件は、以下で与えられる:

$$\begin{cases} u^* = u_{ab}^p(\mathbf{h}^*) & \text{if } h_{ab}^p > 0, \\ u^* \geq u_{ab}^p(\mathbf{h}^*) & \text{if } h_{ab}^p = 0. \end{cases} \quad (15a)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{b \in \mathcal{A}} \sum_{p \in \mathcal{P}_{ab}} h_{ab}^p = H. \quad (15b)$$

ここで、 $u^*$ は均衡状態における効用水準を表す。

均衡条件式(15a)は、居住地・就業地・経路選択の無裁定条件を表している。すなわち、この条件は、均衡状態ではどの家計も自らの選択を変更するインセンティブを持たないことを意味している。条件式(15b)は家計数保存則である。

均衡条件式(15)は、比較的短い期間で変更が行われる経路選択に関する条件式(16a)、(16b)と、長期的な選択と考えられる居住地・就業地に関する条件式(16c)、(16d)に分けた、次の表現と等価である:

$$\begin{cases} c_{ab}^* = c_{ab}^p(\mathbf{x}^*) & \text{if } h_{ab}^p > 0, \\ c_{ab}^* \leq c_{ab}^p(\mathbf{x}^*) & \text{if } h_{ab}^p = 0. \end{cases} \quad (16a)$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_{ab}} h_{ab}^p = H_{ab}^*. \quad (16b)$$

$$\begin{cases} u^* = v_{ab} & \text{if } H_{ab}^* > 0, \\ u^* \geq v_{ab} & \text{if } H_{ab}^* = 0. \end{cases} \quad (16c)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{b \in \mathcal{A}} H_{ab}^* = H. \quad (16d)$$

ここで、 $c_{ab}^*$ は均衡状態における居住地 $a$ から就業地 $b$ への通勤費用、 $H_{ab}^*$ は居住地 $a$ ・就業地 $b$ の家計数、 $v_{ab}$ は以下で与えられる効用水準を表す:

$$v_{ab} = \alpha F_b(\mathbf{m}^*) + D_b - s^F r_b(n_b^*, m_b^*) - s^H r_a(n_a^*, m_a^*) - \tau c_{ab}^* + B_a. \quad (17)$$

### 3. 均衡状態の解析手法

本章では、構築したモデルの均衡状態の特性を調べるための手法を提示する。そのために、構築したモデルにポテンシャル関数が存在することを明らかにする。その性質を利用すれば、特定の初期状態から創発する安定均衡状態が得られることを示す。そして、この安定均衡状態を効率的に導出するための数値解析方法を提示する。

#### (1) ポテンシャル関数

本節では、均衡状態の特性を調べるために、均衡条件を満たす居住地・就業地・経路分布 $\mathbf{h}^*$ が（プレイヤーが家計の）ポテンシャルゲームの Nash 均衡状態とみなすことができることを示す。均衡状態は、均衡条件式(15)より、利得関数が $\mathbf{u}(\mathbf{h}) = (u_{ab}^p(\mathbf{h}))_{p \in \mathcal{P}_{ab}, a, b \in \mathcal{A}}$ と与えられる population game の Nash 均衡状態と捉えることができる。なお、以降では、この population game をゲーム $\mathbf{u}$ と表記する。

このゲーム $\mathbf{u}$ は、Sandholm<sup>15), 16)</sup>により示されているように、任意の $\mathbf{h} \in \Delta \equiv \{\mathbf{h} | \mathbf{h} \cdot \mathbf{1} = H, \mathbf{h} \geq \mathbf{0}\}$ に対して、次の条件を満たす関数 $f(\mathbf{h})$ が存在すれば、ポテンシャルゲームである：

$$\frac{\partial f(\mathbf{h})}{\partial h_{ab}^p} = u_{ab}^p(\mathbf{h}) \quad \forall p \in \mathcal{P}_{ab}, \forall a, b \in \mathcal{A}. \quad (18)$$

本稿で構築したモデルには、この条件を満足する次の関数 $f(\mathbf{h})$ が存在する：

$$f(\mathbf{h}) = f_1(\mathbf{m}) - f_2(\mathbf{n}, \mathbf{m}) - f_3(\mathbf{x}) + f_4(\mathbf{n}), \quad (19a)$$

$$f_1(\mathbf{m}) = \sum_{b \in \mathcal{A}} \left\{ \frac{1}{2} \alpha F_b(\mathbf{m}) + D_b \right\} m_b, \quad (19b)$$

$$f_2(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \sum_{b \in \mathcal{A}} (s^H n_b + s^F m_b)^{\frac{1}{\mu}} K_b^{-\frac{1-\mu}{\mu}}, \quad (19c)$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \tau \sum_{ij \in \mathcal{L}} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(x) dx, \quad (19d)$$

$$f_4(\mathbf{n}) = \sum_{a \in \mathcal{A}} B_a n_a. \quad (19e)$$

ここで、 $f_1(\mathbf{m})$ 、 $f_2(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ 、 $f_3(\mathbf{x})$ 、 $f_4(\mathbf{n})$ は、各々、生産性効果、土地・床面積消費、通勤混雑、アメニティに関する影響を表す関数であり、 $\mathbf{n} = (n_a)_{a \in \mathcal{A}}$ である。以上より、次の命題が得られる：

**命題 1** ゲーム $\mathbf{u}$ は、ポテンシャル関数が式(19)で与えられるポテンシャルゲームである。

ゲーム $\mathbf{u}$ がポテンシャルゲームであることから、その均衡状態は、次の最適化問題の Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件を満たす $\mathbf{h}^*$ の集合と一致する：

$$\max_{\mathbf{h} \in \Delta} f(\mathbf{h}). \quad (20)$$

この事実は、上記の問題の KKT 条件が均衡条件式(15)と

一致することから容易に確認できる。

#### (2) ポテンシャル関数と安定均衡状態

本稿で構築したモデルには正の外部性が考慮されているため、均衡状態が一意に定まるとは限らない。この均衡状態の非一意性は、式(20)より、ポテンシャル関数 $f(\mathbf{h})$ の形状により確認できる。これは、 $f(\mathbf{h})$ が単峰であれば KKTpoint が唯一に定まる (i.e., ゲーム $\mathbf{u}$ の均衡状態が一意) 一方で、そうでなければ KKTpoint が複数存在する (i.e., 均衡状態が一意に定まらない) ためである。この事実と $f_1(\mathbf{m})$ の凸性より、次の命題が得られる：

**命題 2** ゲーム $\mathbf{u}$ の均衡状態は、必ずしも一意ではない。

**証明**  $f_1(\mathbf{m})$ が凸関数であるため、 $f(\mathbf{h})$ は必ずしも凹関数ではなく、凸関数にもなりうる。したがって、 $f(\mathbf{h})$ は必ずしも単峰ではない。

命題 2 より、均衡状態が複数存在し得ることが示された。そこで、均衡選択のために、ゲーム $\mathbf{u}$ の均衡状態の局所的な漸近安定性を調べる。この均衡状態の安定性を調べるには、均衡状態への調整ダイナミクス $\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{V}(\mathbf{h})$ を定義する必要がある。ここで、 $\dot{\mathbf{h}}$ は状態 $\mathbf{h}$ の変化速度を表す。本稿では、そのダイナミクスとして、次の2つの条件を満たす admissible dynamics を考える：

[PC]  $\mathbf{V}(\mathbf{h}) \neq \mathbf{0}$ のときは常に $\mathbf{V}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{h}) > 0$ 。

[NS]  $\mathbf{V}(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$ であれば、 $\mathbf{h}$ はゲーム $\mathbf{u}$ の均衡状態。

条件[PC]は、positive correlation と呼ばれ、調整ダイナミクスと利得（効用）関数が正の相関を持つことを要求している。また、[NS]は、Nash stationarity と呼ばれる条件であり、調整ダイナミクスの定常状態がゲーム $\mathbf{u}$ の均衡状態と一致することを要求している。なお、この admissible dynamics は、best response dynamic, Brown-von Neumann-Nash dynamic, projection dynamic を特殊ケースに含んでいる<sup>注1)</sup>。

ポテンシャルゲーム $\mathbf{u}$ の均衡状態の安定性は、Sandholm<sup>15)</sup>で示されているように、次の特性を持つ：

ポテンシャルゲーム $\mathbf{u}$ において、ポテンシャル関数 $f(\mathbf{h})$ を局所的に最大化する均衡状態 $\mathbf{h}^s$ は、admissible dynamics の下で（局所的に）安定である。それ以外の均衡状態 $\mathbf{h}^u$ は、不安定である。

したがって、ゲーム $\mathbf{u}$ の均衡状態の安定性は、ポテンシャル関数の形状のみから確認できることが分かる。

ポテンシャル関数が有する性質と admissible dynamics の性質[PC]より、状態 $\mathbf{h}^0$ を初期状態とした際に実現する安定均衡状態 $\mathbf{h}^s$ は、ポテンシャル関数を局所的に最大化する $\mathbf{h}$ を $\mathbf{h}^0$ から探索することで得られる。すなわち、最

適化問題の式(20)を局所的に解くだけで容易に安定均衡状態を得ることができる。そこで、次節以降では、その性質を利用した安定均衡状態の数値解析手法を提案する。

### (3) 安定均衡状態の数値解析手法

#### a) ポテンシャル最大化問題の解法

本節では、ポテンシャル最大化問題の式(20)を用いて、初期状態 $\mathbf{h}^0$ から創発する安定均衡状態を導出する方法を提案する。素朴には、このポテンシャル最大化問題を局所的に解くことが考えられる。しかし、第2章(3)節で示したとおり、本モデルには日々、変更することが容易な“通勤経路選択”と、それが困難な“居住地・就業地選択”の両方が考えられている。すなわち、状態の調整に必要な期間が異なる選択行動が存在する。そこで、本稿では、状態の調整に要する期間の違いを反映した、数値解析アルゴリズムを提案する。

本研究で提案する数値解析アルゴリズムは、以下に示すとおりである：

**step1:** 初期状態 $\mathbf{h}^{(0)}$ を与えて、繰り返し計算回数を $n = 1$ とする。

- $\mathbf{h}^{(0)}$ から、居住地・就業地別の家計数 $\mathbf{H}^{(0)} = (H_{ab}^{(0)})$ を求める。

$$H_{ab}^{(0)} = \sum_{p \in \mathcal{P}_{ab}} h_{ab}^{p(0)}. \quad (21)$$

**step2:** 条件式(16a), (16b)を満たす状態における通勤費用 $\mathbf{c}^{*(n)} = (c_{ab}^{p*(n)})_{a,b \in \mathcal{A}, p \in \mathcal{P}_{ab}}$ を導出する。

- $\mathbf{H}^{(n-1)}$ を与件として、以下の最適化問題を解く。

$$\min_{\mathbf{h}} f_3(\mathbf{x}) \quad \text{s.t. 式(16b), } \mathbf{h} \geq 0. \quad (22)$$

- 得られた $\mathbf{h}^{(n)}$ から $\mathbf{c}^{*(n)}$ を導出する。

**step3:** 通勤費用 $\mathbf{c}^{*(n)}$ を与件として、 $\mathbf{h}^{(n-1)}$ の改訂方向 $\delta \mathbf{h}^{(n)}$ を求める：

$$\delta \mathbf{h}^{(n)} = \text{proj}_{\Delta}(\mathbf{v}(\mathbf{h}^{(n-1)}, \mathbf{c}^{*(n)}) + \mathbf{h}^{(n-1)}) - \mathbf{h}^{(n-1)}, \quad (23a)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{h}, \mathbf{c}^*) = (v_{ab}^p(\mathbf{h}, \mathbf{c}^*))_{a,b \in \mathcal{A}, p \in \mathcal{P}_{ab}}, \quad (23b)$$

$$v_{ab}^p(\mathbf{h}, \mathbf{c}^*) = \alpha F_b(\mathbf{m}) + D_b - s^F r_b(n_b, m_b) - s^H r_a(n_a, m_a) - \tau c_{ab}^{p*} + B_a. \quad (23c)$$

ここで、 $\text{proj}_{\Delta}$ は $\Delta$ への射影を表す。

**step4:** 次の最適化問題からステップサイズ $\alpha$ を求める。

$$\max_{\alpha \in [0,1]} f(\mathbf{h}^{(n-1)} + \alpha \delta \mathbf{h}^{(n)}). \quad (24)$$

**step5:** 解を改訂 ( $\mathbf{h}^{(n)} = \mathbf{h}^{(n-1)} + \alpha \delta \mathbf{h}^{(n)}$ ) して、収束判定を行う。

- $\epsilon$ を外生的に与え、 $\|\mathbf{h}^{(n-1)} - \mathbf{h}^{(n)}\| < \epsilon$ であれば計算終了。
- そうでなければ、 $n = n + 1$ ,  $H_{ab}^{(n-1)} = \sum_{p \in \mathcal{P}_{ab}} h_{ab}^{p(n-1)}$ としてstep2に戻る。

このアルゴリズムの各 step は、次の計算を実施していることと対応する：

**step1:** 初期状態を与える。

**step2:** 居住地・就業地を与件として、経路選択に関する均衡条件式(16a), (16b)を満たす通勤費用 $\mathbf{c}^*$ を求める。

**step3:** 通勤費用 $\mathbf{c}^*$ を与件として、居住地・就業地・経路別の家計数の変化方向を求める。

**step4:** ポテンシャル関数を用いて、居住地・就業地・経路別の家計数の変化量を定める。

**step5:** 収束判定。

この計算手順に従えば、初期状態 $\mathbf{h}^{(0)}$ からポテンシャル関数を局所的に最大化する状態を求めることができる。したがって、この数値計算アルゴリズムを採用すれば、(admissible dynamics の下で) 初期状態から創発する安定均衡状態を得ることができる。

#### b) 複雑な交通ネットワークに対応するための数値計算アルゴリズムの改良

前項で示した数値計算アルゴリズムでは、 $\mathbf{h}$ を変数として解析を行う。これは、安定均衡状態における $\mathbf{h}^*$ を導出できる一方で、全ての立地点 $a, b$ 間の経路集合 $\mathcal{P}_{ab}$ を列挙する必要が生じることを意味する。しかし、全ての立地点間の経路を列挙することは、一次元空間などの極端に単純化された空間を考えない限り、ほぼ不可能である。したがって、前項のアルゴリズムは、実都市を対象とした解析には利用できない。

そこで、本項では、複雑な交通ネットワークを対象とした場合においても、安定的な均衡状態における居住地・就業地別の家計数 $\mathbf{H}^*$ とリンク交通量 $\mathbf{x}^*$ を得るためのアルゴリズムを提案する。より具体的には、 $\mathbf{h}$ を $\mathbf{H}$ と $\mathbf{x}$ に分解して、安定均衡状態を導出することを考える。ここで注目するのは、“解析に経路集合 $\mathcal{P}_{ab}$ が必要となるのは、アルゴリズムの step2 のみ”であり、“step2 は標準的な利用者均衡配分（経路選択に関する均衡問題）と捉えられる”という点である<sup>注2)</sup>。標準的な交通均衡配分は、経路列挙が不要となる形に問題を変換可能であり、複雑な交通ネットワークへの対応方法が確立している<sup>17)</sup>。この性質を利用すると、前項のアルゴリズムを修正した以下の手順で初期状態から創発する安定均衡状態の $\mathbf{H}^*, \mathbf{x}^*$ を導出することができる：

**step1:** 初期状態 $\mathbf{H}^{(0)}, \mathbf{x}^{(0)}$ を与えて、繰り返し計算回数を $n = 1$ とする。

**step2:**  $\mathbf{H}^{(n-1)}$ を与件として、式(22)と等価な以下の問題を解くことで、立地点 $a, b$ 間の最短経路の

通勤費用  $\hat{\mathbf{c}}^{*(n)} = (\hat{c}_{ab}^{*(n)})_{a,b \in \mathcal{A}}$ ,  $\mathbf{x}^{*(n)}$  を導出する.

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} f_3(\mathbf{x}), & (25a) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ij} + \sum_{a \in \mathcal{A}} n_a \delta_{ai} - \sum_{a \in \mathcal{A}} m_a \delta_{ai} = 0 \\ & \forall i \in \mathcal{N}, \quad \mathbf{x} \geq 0. & (25b) \end{aligned}$$

ここで、最初の制約条件は各ノードのフロー保存則を表し、 $\delta_{ai}$  はノード  $i$  が立地点  $a$  のセントロイドであれば 1, そうでないなら 0 をとる変数である:

$$\delta_{ai} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = i_a, \\ 0 & \text{if } i \neq i_a. \end{cases} \quad (26)$$

**step3**: 最短経路の通勤費用  $\hat{\mathbf{c}}^{*(n)}$  を与件として,

$\mathbf{H}^{(n-1)}$  の改訂方向  $\delta \mathbf{H}^{(n)}$  を求める:

$$\delta \mathbf{H}^{(n)} = \text{proj}_{\hat{\Delta}}(\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{H}^{(n)}, \hat{\mathbf{c}}^{*(n)}) + \mathbf{H}^{(n)}) - \mathbf{H}^{(n)}, \quad (27a)$$

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{c}}^*) = (\hat{v}_{ab}(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{c}}^*))_{a,b \in \mathcal{A}}, \quad (27b)$$

$$\begin{aligned} \hat{v}_{ab}(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{c}}^*) = & \alpha F_b(\mathbf{m}) + D_b - s^F r_b(n_b, m_b) \\ & - s^H r_a(n_a, m_a) - \tau \hat{c}_{ab}^* + B_a. \end{aligned} \quad (27c)$$

ここで、 $\hat{\Delta} \equiv \{\mathbf{H} | \mathbf{H} \cdot \mathbf{1} = H, \mathbf{H} \geq \mathbf{0}\}$  である.

**step4**: 次の最適化問題からステップサイズ  $\alpha$  を求める.

$$\max_{\alpha \in [0,1]} \hat{f}\left((1-\alpha)\mathbf{H}^{(n-1)} + \alpha \hat{\mathbf{H}}^{(n)}, (1-\alpha)\mathbf{x}^{(n-1)} + \alpha \hat{\mathbf{x}}^{(n)}\right). \quad (28)$$

ここで  $\hat{f}(\mathbf{H}, \mathbf{x}) = f_1(\mathbf{m}) - f_2(\mathbf{n}, \mathbf{m}) - f_3(\mathbf{x}) + f_4(\mathbf{n})$ ,  $\hat{\mathbf{H}}^{(n)} = (\hat{H}_{ab}^{(n)})_{a,b \in \mathcal{A}} = \mathbf{H}^{(n-1)} + \delta \mathbf{H}^{(n)}$  である. また、 $\hat{\mathbf{x}}^{(n)}$  は、 $\mathbf{x}^{(n)}$  を与件としたときの立地点間の最短経路の 1 つに交通需要  $\hat{H}_{ab}^{(n)}$  の全てを利用させる場合のリンク交通量である.

**step5**: 解を改訂 ( $\mathbf{H}^{(n)} = \mathbf{H}^{(n-1)} + \alpha \delta \mathbf{H}^{(n)}$ ) して、収束判定を行う.

- $\epsilon$  を外生的に与え、 $\|\mathbf{H}^{(n-1)} - \mathbf{H}^{(n)}\| + \|\mathbf{x}^{(n-1)} - \mathbf{x}^{(n)}\| < \epsilon$  であれば計算終了.
- そうでなければ、 $n = n + 1$  として step2 に戻る.

なお、このアルゴリズムは、経路選択に関する均衡条件の式(16a), 式(16b)を step2 で、居住地・就業地に関する均衡条件の式(16c), 式(16d)を step3, step4 で解いていることに対応している. 以降で実施する数値計算では、step2 の解析に機械学習でも使用される Coordinate Descent 法を適用した. その具体的なアルゴリズムは、杉浦<sup>18</sup>参照.

#### 4. 反実仮想実験のための準備

本章では、実都市を対象とした反実仮想実験を実施するための準備を行う. まず、Ahlfeldt et al.<sup>12</sup>, Monte et al.<sup>19</sup>,

Allen and Arkolakis<sup>14</sup> などと同様、家計の居住地・就業地選択に関する異質性を導入する. これにより、モデルの本質的な特徴を失うことなく、反実仮想実験を行いやすくする. これは、第 2 章で示したモデルには、データを用いたパラメータ推定が困難であること、安定均衡状態がパラメータ値に応じて極端に変化する現象が生じる可能性が高いことなどの、反実仮想実験を行ううえでの課題があるためである. そして、異質性を導入したモデルの基本的特徴を確認するために、二次元格子状空間の解析を実施し、開発したモデルにおいて複数の都心が形成される安定均衡状態が創発し得ることを確認する. 最後に、モデルのパラメータを設定するための方法を提示する.

##### (1) 家計の異質性の導入

本節では、反実仮想実験を容易にするために、家計の居住地・就業地選択に異質性を導入する<sup>注 3</sup>. 具体的には、居住地  $a \in \mathcal{A}$ , 就業地  $b \in \mathcal{A}$ , 経路  $p \in \mathcal{P}_{ab}$  の家計  $k$  の効用  $u_{ab}^p(k)$  を以下で与える:

$$u_{ab}^p(k) = u_{ab}^p + \varepsilon_{ab}(k). \quad (29)$$

ここで、 $\varepsilon_{ab}(k)$  は家計  $k \in [0, H_{ab}]$  固有の効用であり、任意の  $a, b \in \mathcal{A}$  に対して独立で同一の Gumbel 分布からの標本とみなせると仮定する.

このとき、均衡条件は、経路選択に関する条件の式(16a), 式(16b)と居住地・就業地に関する以下の条件で表される:

$$H_{ab} = \frac{\exp[\theta v_{ab}]}{\sum_{c \in \mathcal{A}} \sum_{d \in \mathcal{A}} \exp[\theta v_{cd}]} H \quad \forall a, b \in \mathcal{A}. \quad (30)$$

ここで、 $\theta$  は家計の異質性の大きさを表すスケールパラメータである.

異質性を導入した場合においても、前章で示した数値解析手法はほとんどそのまま適用できる. 相違点は、ポテンシャル関数  $f(\mathbf{h})$ ,  $\hat{f}(\mathbf{H}, \mathbf{x})$  にエントロピー項  $-\frac{1}{\theta} \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{b \in \mathcal{A}} H_{ab} \ln H_{ab}$  を加える点のみである<sup>注 4</sup>. ここで、以降の解析は、家計に異質性を導入したモデルを採用する.

##### (2) 二次元格子状空間の解析

本節では、家計に異質性を導入したモデルで創発する安定均衡状態の特徴を明らかにするために、二次元格子状空間の解析を実施する. そして、その結果から開発したモデルにおいて複数箇所に都心が形成される安定均衡状態が創発するか否かを確認する. ここでは、図-2 のように全てのノードがセントロイドとなる、 $9 \times 9$  箇所の立地点からなる格子状の空間を考える.

この解析では、全てのリンクを同質とし、交通費用  $t_{ij}(x)$  は以下で与えた:

$$t_{ij}(x) = 1 + t_0 \left(\frac{x}{S}\right)^\beta. \quad (31)$$

また、全ての立地点も同質 ( $K_a = 1, B_a = D_a = 0.0 \forall a \in \mathcal{A}$ ) とし、隣接する立地点間の距離を1とした。その他の各種パラメータは以下のとおり設定した。

$$\begin{aligned} \mu = 0.5, \quad \alpha = 3.0, \quad \rho = 2.0, \quad s^H = s^F = 2.0, \\ H = 100, \quad t_0 = 0.48, \quad s = 80, \quad \beta = 2.89. \end{aligned} \quad (32)$$

なお、交通費用のパラメータ  $t_0$ ,  $\beta$  は土木学会<sup>20)</sup>に記載の標準値を使用した。

以上の設定のもとで、パラメータ  $\tau$  の値を変化させ、安定均衡状態がどのように推移するかを調べた。その結果は、**図-3**~**図-5** に示すとおりとなった。これらの結果から、交通費用の影響が大きい場合 ( $\tau = 4.5$ ) は居住地と就業地が近接し、道路リンクがほとんど利用されないことが確認できる。一方で、交通費用の影響が低下すると、居住地区と就業地区が分離するようになり、複数箇所に都心が形成されることを表すパターンが見られる

ようになることも明らかとなった (**図-5**)。これは、開発したモデルにおいて、Fujita and Ogawa<sup>10)</sup>モデルの特徴である複数都心の形成が確認できたことを意味する。

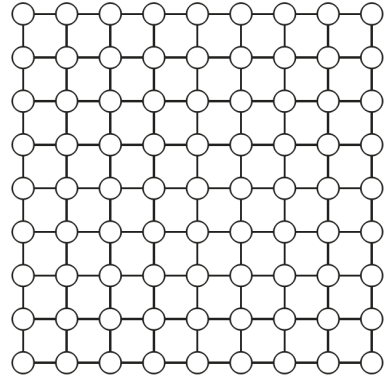


図-2 二次元格子状空間

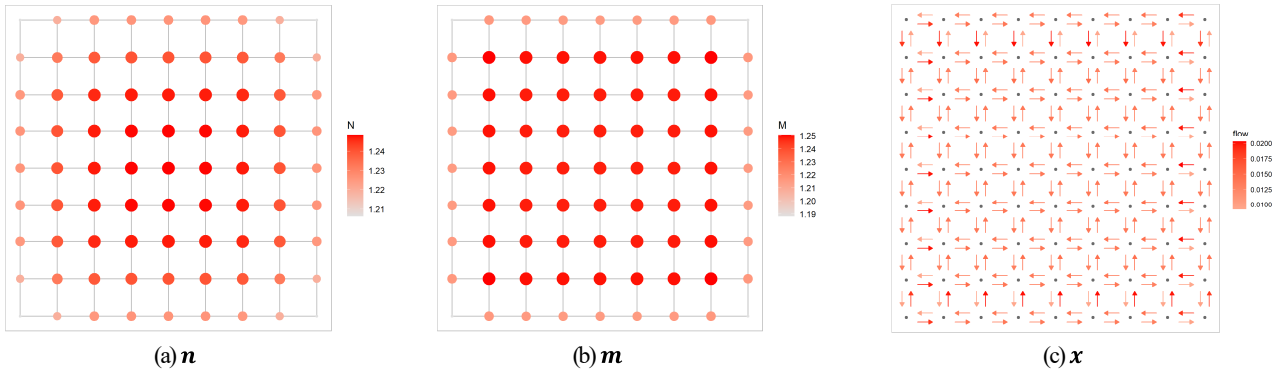


図-3  $\tau = 4.5$ とした場合の安定均衡状態

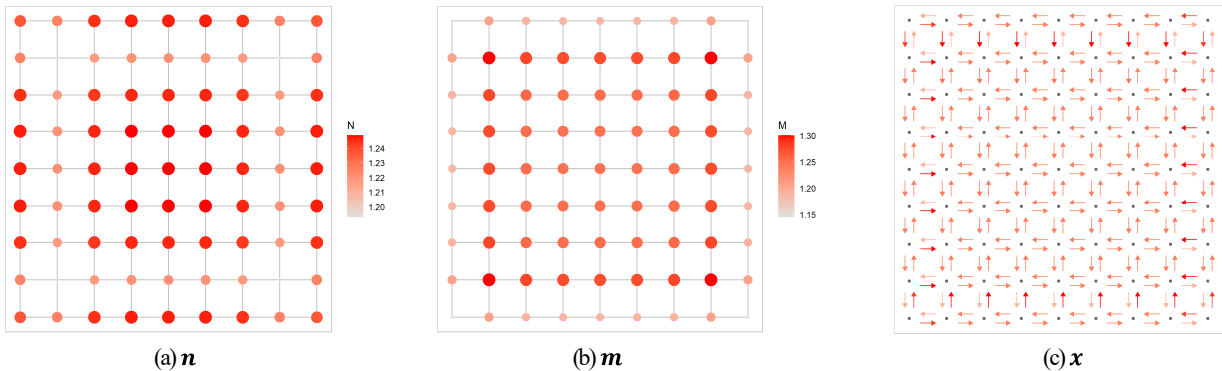


図-4  $\tau = 3.0$ とした場合の安定均衡状態

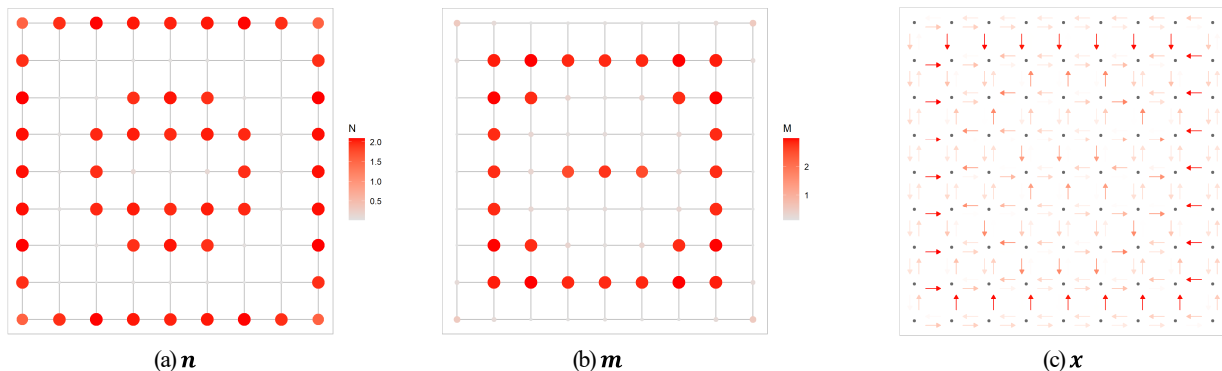


図-5  $\tau = 1.5$ とした場合の安定均衡状態

### (3) パラメータ設定方法

本章では、本モデルの均衡状態を実データと整合させるために、Ahlfeldt et al.<sup>12)</sup>に倣ったパラメータ設定方法を提示する。このパラメータは、家計に対する企業（就業者一人当たり）の土地使用比率 $s^F/s^H$ 、各立地点の家計数 $n_a$ ・企業数 $m_a$ ・土地面積 $K_a$ ・土地の地代 $R_a$ ・賃金 $w_a$ 、居住地・就業地別の家計数 $H_{ab}$ ・最短経路の交通費用<sup>注5)</sup> $c_{ab}^*$ に関するデータが得られているという前提で設定する。その手順は以下の Step1-6 に示すとおりである。

#### a) STEP1：デベロッパの土地投入割合 $1 - \mu$ 、外部性の距離減衰パラメータ $\rho$

床面積の建設費用のうち土地に必要な費用の割合 $1 - \mu$ は、Ahlfeldt et al.<sup>12)</sup>と同様に、既往研究で推定された値0.25とする。距離減衰パラメータ $\rho$ は、Ahlfeldt et al.<sup>12)</sup>、Arzaghi and Henderson<sup>22)</sup>と整合する値に定める。Ahlfeldt et al.<sup>12)</sup>では、徒歩の移動時間が9分となると外部性の効果が4%に減衰するという結果を得ている。対象地域を金沢とする場合、移動は基本的に自動車であると想定されることから、移動速度が20km/hであるとの前提のもとで、この値と整合するよう $\rho = 1.0851$ とする。

#### b) STEP2：床面積消費量 $s^H, s^F$

家計の単位あたり床面積 $s^H$ および企業の単位あたり床面積 $s^F$ の設定を行う。そのために、式(13)が以下のように書き換えられることを利用して、 $(s^H)^{1/\mu}$ を単回帰分析により推定する：

$$R_a = \frac{1 - \mu}{\mu} (s^H)^{\frac{1}{\mu}} \left\{ \frac{n_a + (s^F/s^H)m_a}{K_a} \right\}^{\frac{1}{\mu}} - C. \quad (33)$$

そして、推定された $(s^H)^{1/\mu}$ に加えて、 $\mu$ 、 $s^F/s^H$ から $s^H$ 、 $s^F$ を求める。

#### c) STEP3：交通費用に関するパラメータ $\theta\tau$

交通費用に関するパラメータ $\theta\tau$ を推定するために、均衡条件式(30)を利用する。具体的には、式(30)の両辺に自然対数を取り、居住地に関する変数と就業地に関する変数をそれぞれダミー変数に置き換える：

$$\ln[H_{ab}] = -\theta\tau c_{ab}^* + F_a + F_b + \text{const}. \quad (34)$$

ここで、 $F_a$ は居住地 $a$ に関するダミー変数、 $F_b$ は就業地 $b$ に関するダミー変数、 $\text{const}$ は定数項を表す。そして、重回帰分析により $\theta\tau$ を推定する。

#### d) STEP4：アメニティ水準に関する項 $\theta(B_a - r_a s^H)$ 、賃金項 $\theta w_b$

アメニティ水準に関する項 $\theta(B_a - r_a s^H)$ および賃金項 $\theta w_b$ を算出するために、均衡条件式(30)を以下のように変形する：

$$n_a = \sum_{b \in \mathcal{A}} \frac{\exp[\theta(B_a - r_a s^H) - \theta\tau c_{ab}^*]}{\sum_{d \in \mathcal{A}} \exp[\theta(B_d - r_d s^H) - \theta\tau c_{db}^*]} m_b, \quad (35a)$$

$$m_b = \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{\exp[\theta w_b - \theta\tau c_{ab}^*]}{\sum_{d \in \mathcal{A}} \exp[\theta w_d - \theta\tau c_{ad}^*]} n_a. \quad (35b)$$

この非線形方程式を解くことで、 $\theta(B_a - r_a s^H)$ 、 $\theta w_b$ を

得ることができる。ただし、この非線形連立方程式は、自由度が1足りないため解が一意に定まらない。そのため、何らかの基準化を行う必要がある点に注意が必要である。

#### e) STEP5：スケールパラメータ $\theta$

スケールパラメータ $\theta$ は、モデルの $w_b$ の分散がデータと一致するように設定する。具体的には、STEP4で得られる $\theta w_b$ の分散 $\sigma_{\text{model}}^2$ とデータから得られる $w_b$ の分散 $\sigma_{\text{data}}^2$ を外生値として、 $\theta$ を以下で与える：

$$\theta = \sqrt{\frac{\sigma_{\text{model}}^2}{\sigma_{\text{data}}^2}}. \quad (36)$$

#### f) STEP6：アメニティ水準 $B_a$ 、生産性 $\text{Prod}_b$

居住地のアメニティ水準 $B_a$ と生産性 $\text{Prod}_b = \alpha F_b(\mathbf{m}) + D_b$ は、これまでに得られた変数・パラメータから求める。具体的には次の関係を利用する：

$$B_a = \frac{\theta(B_a - r_a s^H)}{\theta} + r_a s^H, \quad (37a)$$

$$\text{Prod}_b = \frac{\theta w_b}{\theta} + r_b s^F. \quad (37b)$$

ここで、 $r_a$ の値は式(12)から得られる。

次に、得られた $B_a$ 、 $\text{Prod}_b$ を用いて、パラメータ $\alpha$ の推定とともに、アメニティ水準および生産性効果に関する変数選択とパラメータ推定を行う。ここでは、空間的自己相関に対処するために、固有ベクトル空間フィルタリング<sup>23)</sup>を採用する。このアプローチは、地点間距離の逆数を要素に持つ空間重み行列の固有ベクトル $\mathbf{Z}$ を説明変数に導入するだけで空間的自己相関に対処できる。それゆえ、詳細・広域な都市内空間を対象とした分析であっても、容易にパラメータ推定を実施できるという利点を持つ。

なお、本稿では $B_a$ 、 $\text{Prod}_b$ を次で与えて、 $\alpha$ 、 $\kappa^{\text{AME}}$ 、 $\kappa^{\text{PRO}}$ を推定する：

$$B_a = \kappa^{\text{AME}} \mathbf{X}_a^{\text{AME}} + \mathbf{v}^{\text{AME}} \mathbf{Z}_a + \text{const}^{\text{AME}} + \delta_a^{\text{AME}}, \quad (38a)$$

$$\text{Prod}_b = \alpha F_b(\mathbf{m}) + \kappa^{\text{PRO}} \cdot \mathbf{X}_b^{\text{PRO}} + \mathbf{v}^{\text{PRO}} \mathbf{Z}_b + \text{const}^{\text{PRO}} + \delta_b^{\text{PRO}}. \quad (38b)$$

ここで、 $\mathbf{X}_a^{\text{AME}}$ は立地点 $a$ のアメニティ水準に関する変数（e.g. 地理的条件、土地利用規制）、 $\kappa^{\text{AME}}$ はそのパラメータ、 $\mathbf{X}_b^{\text{PRO}}$ は立地点 $b$ の生産性効果に関する変数、 $\kappa^{\text{PRO}}$ はそのパラメータ、 $\text{const}^{\text{AME}}$ 、 $\text{const}^{\text{PRO}}$ は定数項、 $\delta_a^{\text{AME}}$ 、 $\delta_b^{\text{PRO}}$ は残差である。また、説明変数に加える空間重み行列の固有ベクトル $\mathbf{Z}$ は、Tiefelsdorf and Griffith<sup>23)</sup>に基づき、正の固有値に対応した固有ベクトルのみを用いる。これは、これらの固有ベクトルが正の空間相関を捉えることが知られているためである。用意した説明変数では観測されない効果 $\delta_a^{\text{AME}}$ 、 $\delta_b^{\text{PRO}}$ は、パラメータ推定結果と式(37)で計算される値との差（i.e., 残差）を与える。この観測されない効果を明示的に考えて $B_a$ 、 $D_b = \text{Prod}_b - \alpha F_b(\mathbf{m})$ を設定することで、モデルの初期均衡状態がデータと完全に整合することが保障される。

## 5. 実都市を対象とした反実仮想実験

### (1) 分析対象圏域および使用データ

本稿では、金沢都市雇用圏を分析対象とする。具体的には、**図-6**に示す金沢都市雇用圏を国勢調査の調査区である小地域に分割した空間を扱う。そして、ネットワークは DRM の全道路リンクデータに基づき、金沢都市雇用圏では全道路種別、その隣接市町村では高速道路自動車道・都市高速道路・一般国道・主要地方道のみを扱う。この場合、立地点数は 1,656・道路リンク数は 117,175 である。ここでは、各リンクの交通費用  $t_{ij}(x)$  を以下で与える：

$$t_{ij}(x) = 1 + t_0 \left( \frac{x}{s_{ij}} \right)^\beta \quad (39)$$

ここで、 $s_{ij}$  はリンク  $ij$  の容量、 $t_0$ 、 $\beta$  はパラメータであり、前章と同様、土木学会<sup>20)</sup>の標準値を採用する。

第 4 章(3)節で説明したパラメータ設定方法に使用するデータの出典は以下に示すとおりである：

**立地点・就業地別の家計数  $H_{ab}$ ：** 道路交通センサス OD 交通量 (2015 年)，国勢調査就業者数 (2015 年)，経済センサス従業者数 (2014 年)

**居住地別家計数  $n_a$ ：** 国勢調査就業者数 (2015 年)

**就業地別家計数  $m_b$ ：** 経済センサス従業者数 (2014 年)

**地代  $R_a$ ：** 公示地価 (2015 年)，10 年国債利回り (2015 年)

**家計に対する企業の土地使用比率  $s^F/s^H$ ：** 建築物ストック統計床面積 (2013 年)

**土地面積  $K_a$ ：** 国勢調査土地面積 (2015 年)

**地域間の距離  $d_{ab}$ ，道路容量  $s_{ij}$ ：** DRM (2019 年)，国勢調査境界データ (2015 年)

**賃金  $w_a$ ：** 賃金構造基本統計調査所得等

**アメニティ水準・生産性効果に関する変数  $X_a^{AME}$ ， $X_b^{PRO}$ ：** 国土数値情報道路密度メッシュデータ (2010 年)，鉄道時系列 (2015 年)，用途地域 (2019 年)

なお、データは 2015 年を基準として収集できるデータのうち最も近い時点のものを使用した。

居住地・就業地毎の家計数  $H_{ab}$  は、該当するデータを得ることが困難であったため、道路交通センサスの Bゾーン単位の OD 交通量を、国勢調査の就業者数および経済センサスの従業者数により設定した按分値<sup>21)</sup>を用いて按分することで設定した。地代は、公示地価に 10 年国債利回りを乗じた値を用いた。家計に対する企業の土地使用比率  $s^F/s^H$  は、単位あたりの就業者数に対する延床面積と、単位あたりの従業者に対する延床面積の比で算出した。データは、建築ストック統計から得られる住宅用・法人用の延床面積と国勢調査・経済センサスで得られる就業者・従業者数を用いた。アメニティ水準・生

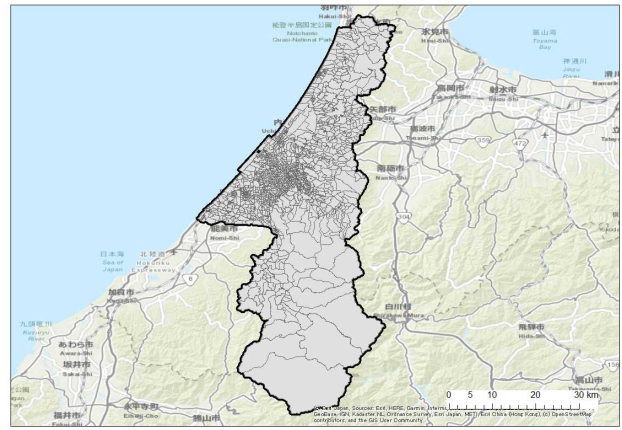


図-6 対象圏域

表-1 パラメータ設定値

項目	設定値	t 値
$s^H$	$3.312 \times 10^1$	—
$s^F$	$1.422 \times 10^1$	—
$\theta$	$8.061 \times 10^{-3}$	—
$\tau$	$1.872 \times 10^1$	—
$\kappa^{AME}$ (道路密度)	$2.602 \times 10^7$	8.200
$\kappa^{AME}$ (最寄り駅までの距離)	$-6.700 \times 10^0$	-6.854
$\kappa^{AME}$ (住居系用途地域面積)	$5.101 \times 10^4$	3.502
$\kappa^{AME}$ (商業系用途地域面積)	$3.143 \times 10^3$	4.432
$\kappa^{UNI}$ (道路密度)	$2.731 \times 10^6$	1.765
$\kappa^{UNI}$ (最寄り駅までの距離)	$-7.708 \times 10^0$	-3.271
$\kappa^{UNI}$ (住居系用途地域面積)	$5.669 \times 10^4$	9.394
$\kappa^{UNI}$ (商業系用途地域面積)	$1.615 \times 10^3$	5.234
$\kappa^{UNI}$ (工業系用途地域面積)	$7.494 \times 10^4$	11.542
$\alpha$	$8.475 \times 10^2$	11.387

産性に関する変数候補は、次の 5 種類とした：道路密度 (km/km<sup>2</sup>)・最寄り駅までの距離 (km)・住宅系用途地域面積 (km<sup>2</sup>)・商業系用途地域面積 (km<sup>2</sup>)・工業系用途地域面積 (km<sup>2</sup>)。

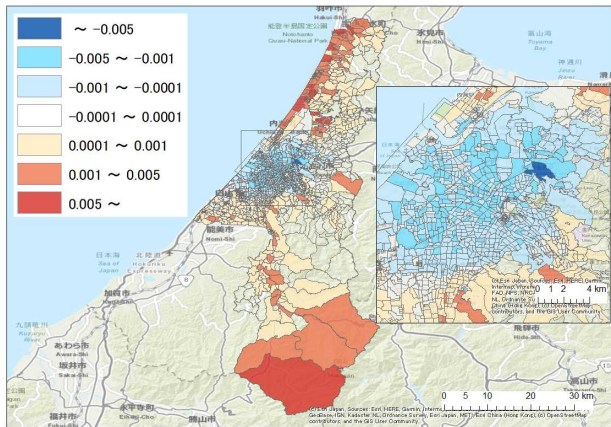
### (2) パラメータ設定の結果

アメニティ水準、生産性効果に関する変数は、R 言語 MASS パッケージの stepAIC 関数を用いて、ステップワイズ法により AIC 基準で変数選択を行った。パラメータの設定値は**表-1**に示すとおりである。

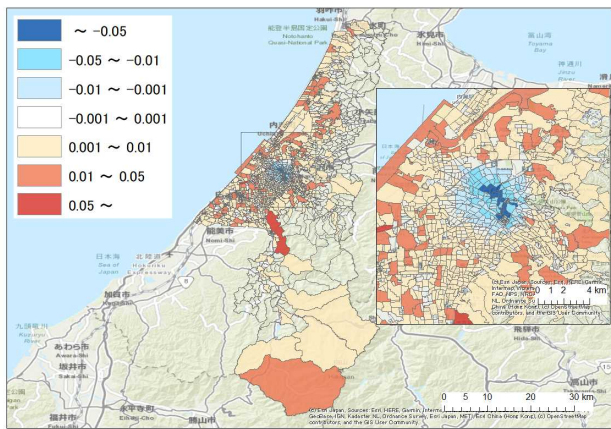
パラメータ設定の際に実施した Step2, Step3 の回帰分析では、いずれの変数も有意に推定された。アメニティ水準に関する変数選択では、道路延長・最寄り駅までの距離・住宅系用途地域面積・商業系用途地域面積が採用された。これら全ての変数において、符号が直観と一致することが確認された。生産性に関する変数選択では、道路延長・最寄り駅までの距離・住居系用途地域面積・商業系用途地域面積・工業系用途地域面積が採用された。ここで、用途地域面積が全て選択されていることから、

生産性には用途地域（市街化区域）であることが影響していることが分かる。また、こちらもアメニティ水準と同様、全ての変数において、符号が直観と一致していた。

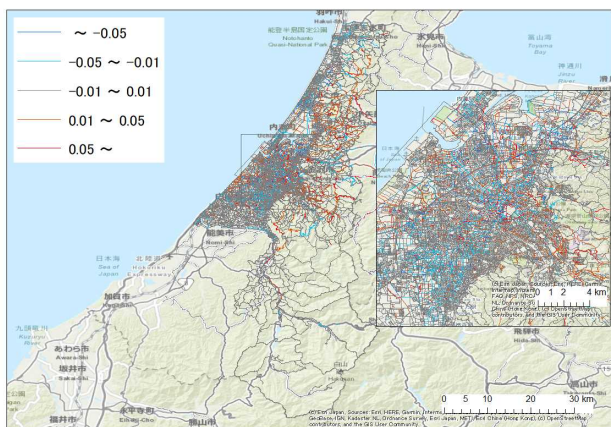
本稿で示したパラメータ設定の手順では、初期均衡状態が安定になることを保証できない。初期均衡状態の安定性を保証するためのパラメータ設定手法は、未だ確立した手法が存在しないことから、今後の重要な研究課題である。なお、次節で実施した数値解析を通じて、本節で設定したパラメータの下では、初期均衡状態は安定均衡状態であることは確認済みである。



(a)  $n$  の変化



(b)  $m$  の変化



(c)  $x$  の変化

図-7 反実仮想実験の結果： $\tau$ を3%低下させた際の変化

### (3) 反実仮想実験

本章(1)節で示したように、反実仮想実験の対象は、立地点数 $A = 1,656$ 、リンク数 $L = 117,175$ の地域である。このため、金沢都市雇用圏 ( $H = 371,405$ ) を対象とした場合でも、比較的大規模なモデルの解析が必要となる。そこで、本節は、第3章で示した数値解析手法により、現実的な計算時間で解析ができるかを確認することを主な目的とする。

数値解析では、交通費用の影響を表すパラメータ $\tau$ を3%低下させた場合 (e.g. 交通費用の低下、時間価値の低下) の影響を調べるために実施した。Python を利用した数値計算にかかった時間は数時間程度であり、第3章で提案した (素朴な) アルゴリズムであっても、十分な計算速度であることが確認できた。また、 $\tau$ の変化前後の安定均衡状態における居住地別の家計数 $n$ 、就業地別の家計数 $m$ 、リンク交通量 $x$ の変化は図-7 に示すとおりである。ここで、各立地点の家計数 $n_a$ 、 $m_a$ の変化 $\delta n_a$ 、 $\delta m_a$ は、以下の値を用いた：

$$\delta n_a = \frac{n_a^B - n_a^A}{H} \times 100, \quad \delta m_a = \frac{m_a^B - m_a^A}{H} \times 100. \quad (40)$$

ここで、上付き添え字 $B$ 、 $A$ は、パラメータ変化前・後の安定均衡状態であることを表す。また、リンク交通量 $x$ の変化は、その割合 $(x_{ij}^A - x_{ij}^B)/x_{ij}^B$ を図示した。その結果から、 $\tau$ の低下に伴い、居住地・就業地・リンク交通量が大きく変化していることことから、“均衡状態の変化が小さいために計算時間が短縮された”という訳ではないことも確認できた。

図-7から確認できる人口分布変化は、日本の都市内部の人口分布の長期的変化に関する実証的知見<sup>24)</sup>と整合している。具体的には、中心部付近の人口密度低下、郊外部の人口密度上昇が見られた。これは、交通費用の影響が低下し、より遠方からの移動に対する抵抗が弱まったため、混雑を避けて経済活動が分散化したためであると考えられる。

## 6. おわりに

本研究では、Fujita and Ogawa<sup>10)</sup>に交通混雑の影響を導入した定量的都市経済モデルを開発した。そして、そのモデルにポテンシャル関数が存在することを利用し、大規模な都市空間・複雑な交通ネットワークを対象とした分析を可能にする効率的な数値解析手法も提示した。最後に、この数値解析手法を用いて、金沢都市雇用圏を対象とした反実仮想実験を通して、現実的な計算時間で分析を実施できることを示した。

上記の成果は、これまで困難と考えられてきた計量分析を可能・容易にするための基礎的知見であると捉えら

れるものの、まだ多くの課題を残している。特に、家計・企業行動に関する仮定 (e.g., 床面積消費が一定値) の緩和, 家計の通勤経路選択に関する異質性の導入, 初期均衡状態の安定性を保証するパラメータ設定法は、重要な研究課題であると考えられる。また、系統的な数値計算による開発モデルの基本特性の把握, 実現象と定性的・定量的に整合させるためのモデルの拡張に向けた発展も期待される。

**謝辞:** 本研究は、国土交通省新道路技術会議「道路政策の質の向上に資する技術研究開発：公共交通ターミナル整備の空間経済分析に関する研究開発（代表者：高山雄貴金沢大学准教授）」および JST 創発的研究支援事業 JPMJFR215M の支援を受けたものである。ここに記して謝意を表したい。

## NOTES

注1) admissible dynamics に含まれる他の例は Sandholm<sup>25)</sup> 参照。

注2) 交通ネットワーク均衡に関する分野で良く知られているように、経路選択に関する均衡条件を満たす経路交通量は一意に定まらない一方で、リンク交通量は一意に定まる。したがって、 $\mathbf{h}$ を $\mathbf{H}$ と $\mathbf{x}$ に分解することは、交通ネットワークにおける均衡状態の性質を考えると自然なアプローチであると考えられることができる。

注3) 本稿では、大規模な都市空間を対象とした場合の数値解析の実行可能性の検証を行うため、Allen and Arkolakis<sup>14)</sup>とは異なり、経路選択には異質性を導入しない。これは、経路選択に異質性を導入すること自体は容易であるものの、数値計算時の変数を大幅に増加させる (i.e., 数値計算時に必要となるメモリが大幅に増える) ためである。より具体的には、経路選択に異質性を導入しない場合は居住地・就業地別の家計数 $\mathbf{H}$ とリンク交通量 $\mathbf{x}$ が変数となる (i.e.,  $A^2 + L$ 個の変数) 一方で、異質性を導入すると $\mathbf{H}$ と起点別リンク交通量 $(\mathbf{x}_a)_{a \in \mathcal{A}}$ が変数となる (i.e.,  $A(A + L)$ 個の変数)。

注4) エントロピー項を加えたポテンシャル関数は、logit potential function (Sandholm, 2010, p.227)<sup>16)</sup>と呼ばれる。

注5) 最短経路の交通費用は、居住地・就業地毎の家計数 $\mathbf{H}$ を与件として経路選択均衡状態を導出することで求められる。ここで、 $\mathbf{H}$ は国勢調査の総就業者数を、国勢調査の就業者数および経済センサスの従業者数により按分することで設定した値を使用した:

$$H_{ab} = \frac{n_a m_b}{H} H. \quad (41)$$

注6) 按分値は、以下のとおり設定した。ここで、就業者数は国勢調査のため居住地ベースの集計であり、従業者数は経済センサスのため従業地ベースの集計であるため、どちらか一方のみで按分値を設定すると偏りが生じる。このため、両方を用いて按分値を設定した:

$$\text{Weight} = (\text{Weight}_1 + \text{Weight}_2)/2. \quad (42)$$

ここで、 $\text{Weight}_1$ は対象圏域内の全就業者数に対する当該小地域の就業者数の比率、 $\text{Weight}_2$ は対象圏域内の全従業者数に対する当該小地域の従業者数の比率を表す。

## REFERENCES

- 1) Alonso, W.: *Location and Land Use*, Harvard University Press, 1964.
- 2) Mills, E. S.: An aggregative model of resource allocation in a metropolitan area, *American Economic Review*, Vol.57, No.2, pp.197–210, 1967.
- 3) Muth, R. F.: *Cities and Housing*, University of Chicago Press, 1969.
- 4) Kanemoto, Y.: *Theories of Urban Externalities*, North-Holland, 1980.
- 5) Fujita, M.: *Urban Economic Theory: Land Use and City Size*, Cambridge University Press, 1989.
- 6) Wheaton, W. C.: Land use and density in cities with congestion, *Journal of Urban Economics*, Vol.43, No.2, pp.258–272.
- 7) Anas, A., Arnott, R., and Small, K. A.: Urban spatial structure, *Journal of Economic Literature*, Vol.36, No.3, pp.1426–1464, 1998.
- 8) 上田孝行編著: *Excel で学ぶ地域・都市経済分析*, コロナ社, 2010.
- 9) Beckmann, M. J.: Spatial equilibrium in the dispersed city, in Papageorgiou, G. J. ed. *Mathematical Land Use Theory*, Lexington Books, pp.117–125, 1976.
- 10) Fujita, M. and Ogawa, H.: Multiple equilibria and structural transition of nonmonocentric urban configurations, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.12, No.2, pp.161–196, 1982.
- 11) Osawa, M. and Akamatsu, T.: Equilibrium refinement for a model of non-monocentric internal structures of cities: A potential game approach, *Journal of Economic Theory*, 187, 105025, 2020.
- 12) Ahlfeldt, G. M., Redding, S. J., Sturm, D. M. and Wolf, N.: The Economics of density: Evidence from the Berlin wall, *Econometrica*, Vol.83, No.6, pp.2127–2189, 2015.
- 13) Redding, S. J. and Rossi-Hansberg, E.: Quantitative spatial economics, *Annual Review of Economics*, Vol.9, pp.21–58, 2017.
- 14) Allen, T. and Arkolakis, C.: The welfare effects of transportation infrastructure improvements, *The Review of Economic Studies*, Vol.89, No.6, pp.2911–2957, 2022.
- 15) Sandholm, W. H.: Potential games with continuous player sets, *Journal of Economic Theory*, Vol. 97, No. 1, pp.81–108, 2001.
- 16) Sandholm, W. H.: *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT Press, 2010.
- 17) 土木学会 (編): *交通ネットワークの均衡分析: 最新の理論と解法*, 丸善, 1998.
- 18) 杉浦聡志: 起点別リンク交通量の部分的更新による利用者均衡配分の効率的求解アルゴリズムの提案, *土木計画学研究・講演集*, Vol.62, 46–08, 2020.
- 19) Monte, F., Redding, S. J., and Rossi-Hansberg, E.: Commuting, migration, and local employment elasticities, *American Economic Review*, Vol.108, No.12, pp.3855–3890, 2018.

- 20) 土木学会（編）：道路交通需要予測の理論と適用：第 I 編利用者均衡配分の適用に向けて，丸善，2003. *Environment and Planning A*, Vol.39, No.5, pp.1193–1221, 2007.
- 21) Arzaghi, M. and Henderson, J. V.: Networking off Madison Avenue, *Review of Economic Studies*, Vol.75, No.4, pp.1011–1038, 2008. 24) Mori, T. and Osawa, M.: Cities in a world of diminishing transport costs, *arXiv*, 2012.12503, 2021.
- 22) Griffith, D. A.: Spatial autocorrelation and spatial filtering: Gaining understanding through theory and scientific visualization, *Springer*, pp.247, 2003. 25) Sandholm, W. H.: Negative externalities and evolutionary implementation, *The Review of Economic Studies*, Vol.72, No.3, pp. 885–915,2005.
- 23) Tiefelsdorf, M. and Griffith, D. A.: Semiparametric filtering of spatial autocorrelation: The eigenvector approach,

DEVELOPMENT OF A QUANTITATIVE URBAN ECONOMIC MODEL BASED ON FUJITA AND OGAWA (1982) MODEL CONSIDERING TRAFFIC CONGESTION

Tatsuya SUGIMOTO, Satoshi SUGIURA and Yuki TAKAYAMA