

交通結節点検討のための グラフスパンナーデザイン問題

佐藤 欽哉¹・杉浦 聡志²

¹学生会員 北海道大学大学院 工学院北方圏環境政策工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8)
E-mail: sato.kinya.h4@elms.hokudai.ac.jp

²正会員 北海道大学大学院准教授 工学研究院 (〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8)
E-mail: sugiura@eng.hokudai.ac.jp

近年、人口減少にさらされるわが国では、低コストで高いサービス水準を保つ公共交通網の実現が急務である。本論文では、そのために重要な要素である、交通結節点を検討するための規範的手法論を提案する。交通結節点は、効率的に乗客を輸送できるネットワーク設計問題によって最適化され、特定される。先行研究では乗客の移動経路を全域木状に集約しハブを見つけたが、本研究ではグラフスパンナー状に集約することでより拡張的な検討を可能とした。また、本論文で扱う問題は求解範囲が膨大なため厳密解の導出は困難である。そこで本論文ではクロスエントロピー法を用い、発見的に解を導出するモデルを構築した。テストネットワークにおいてモデルの挙動を確認し、得られた解について種々の考察を行った。

Key Words: *traffic node, transit network design, graph spanner, cross entropy method*

1. はじめに

近年、わが国では高齢化とそれに伴う過疎化が急激に進行しており、地方部では特に顕著である。人口減少により都市が衰退・縮小する中でいかに持続可能な生活基盤を維持するか、という視点は今後全国的に重視されると考えられる。公共交通サービスも、人々の生活を支えるための政策手段の一つである。地方部では今後、利用者の減少や運転手不足など運営環境の悪化が予想され、サービスのレベルの低下が危惧されている。したがって、低いコストで維持でき、かつ高いサービス水準を保つような効率的な公共交通運営は、交通事業者や政策意思決定者にとって喫緊の課題である。

地域公共交通に関する取り組みは本来、事業者ごとに局所最適化を図るのではなく、ネットワーク全体から俯瞰的に行うのが望ましい。この取り組みの例として、機能階層型道路ネットワーク¹⁾の考え方が提案されている。都市や都市圏は、目的レベルの異なる拠点の集合であり、各拠点には交通ターミナル、ローカルバスタ、ミニバスタなど、異なるレベルの交通結節機能が存在する。機能階層化とは、この各層に存在する交通結節機能の接続を強化し、効率的なネットワークを実現することである。このネットワークと拠点の概念は、公共交通計画の基礎である。つまり、どの位置に、どのレベルの交通結節機能

を配置、接続するかという点が重要な検討事項となる。しかしながら、こうした計画の策定手法論については未だ明確な手法が確立されておらず、交通事業者や政策意思決定者による経験と勘の中で多くの意思決定がなされていると、Kepaptsoglou and Karlaftis²⁾は述べる。効率的に乗客を輸送できるネットワーク形状が得られれば、経路の分岐位置や需要の大小から階層型ネットワークの概形を見ることができる。そこで本研究では、効率的な OD 間輸送を実現するための接続関係を示すネットワークの導出を目的とし、交通結節点を検討するための規範的手法論を提供する。

2. 既往研究の整理と本研究の位置づけ

公共交通機関の計画手法は、TND (Transit Network Design) と呼ばれ、多くの研究が蓄積している。TND には膨大な検討事項があり、その複雑さから、いくつかの問題に分割されて議論されるのが一般的である。Guihaire and Hao³⁾では TND の広範なレビューにおいて、(1)交通ネットワークデザイン、(2)運行頻度設計、(3)ダイヤ編成、(4)車両編成、(5)乗務員編成・配置の 5 つのステップによって成り立つと整理している。本研究はどの地点間を接続し、ハブをどこに配置すると効果的かを考察するた

めの NDP (Network Design Problem) の手法論を提供するものであり、(1) 交通ネットワークデザインに分類できる。したがって、詳細な運行経路やその本数、バスターミナルの配置位置決定など詳細な計画事項は、本手法で得られたネットワークの概形をもとに以降のステップで検討することになる。

Kepaptsoglou and Karlaftis²⁾は、公共交通の NDP に関する研究のほとんどは、利用者の便益と計画者の便益を合わせた総合的な便益を最大化することを目的としていると指摘した。ここで、利用者の便益には、移動コストやアクセスコスト、待ち時間や乗り換えの最小化などが挙げられ、計画者の便益には利用率の最大化、運行コストの最小化、使用する車両サイズの最小化などが挙げられる。本研究では乗客の便益は総旅行時間 (Total Travel Distance, 以下 TTD) の最小化とし、計画者の便益は運行経路の縮約、すなわちネットワークにおけるリンク数の最小化であると整理する。以降、両者を考慮したうえで、最適なネットワーク形状を導出する NDP を開発する。

ネットワーク構造の最適化は組み合わせ最適化問題であり、大規模なネットワークでは膨大な解空間を持つ。したがって、最適化問題の求解を行うにあたり、何らかの制約を設けて解の候補を限定する必要がある。例えば初期の研究には、Vaughan⁹⁾の提案したような単純な放射状ネットワークや、Tsao and Schonfeld⁹⁾の提案したような格子状のネットワークの例がある。

全域木 (spanning tree) を用いて求解範囲を限定する手法が Bell et al⁶⁾によって提案されている。彼らは、シドニーのフェリーネットワークにおいて、エントロピーを最大化する全域木を導出する手法を提案した。ここで全域木とは、対象ネットワークの全ノードが連結であり、かつ閉路をもたないもののうち、最も少ないリンク数で構成されるグラフ構造のことである。この特性から、需要が集中する地点や多くの需要が通過する地点にハブが形成されるようなネットワークの出力が期待できる。本研究でもこの性質に基づき、リンク数が少ない条件において、目的関数を最適化するネットワーク形状の結果から結節点を発見する NDP を取り扱う。しかしながら、全域木制約はネットワーク形状に対する極めて強い制約であり、大幅な迂回を必要とする経路が発生する可能性がある。すなわち、全域木はリンク数が最小であることから計画者の便益が最大化されるネットワーク構造である一方、TTD の大幅な増加が懸念される。計画者がより現実的にハブの位置や接続関係を考察するためには、この全域木制約を緩和したネットワークが必要である。

本研究では、グラフスパナ (以下スパナと略す) を用いたアプローチを提案する。スパナの詳細については、Ahmed et al⁷⁾が広範なレビューを与えている。スパナの定義を整理する。ノード集合 V 、リンク集合 E からなる

グラフ $G(V, E)$ が与えられたとき、スパナとは、 G におけるノード間距離をある一定の範囲で増加させた部分グラフ $G'(V, E')$ のことである。スパナにはいくつかの種類とそれに応じた定義があるが、多くのスパナは元のグラフからノード間距離がどの程度増加するかを表す関数 f と、距離を近似的に保存するための元グラフのノードペアを示す集合 $P \in V \times V$ で定義される。すなわち、スパナ $G'(V, E')$ は、 $(u, v) \in P$ のグラフ G 上の距離を $d_G(u, v)$ として

$$d_{G'}(u, v) \leq f(d_G(u, v)) \quad \forall (u, v) \in P \quad (1)$$

を満たす。スパナには上記の関数 f によっていくつかの種類があるが、ここでは t -スパナを考える。 t -スパナとは、ある定数 $t \geq 1$ において、 $f(x) = tx$ で与えられるスパナである。ここで、 t は伸長係数と呼ばれる。式(1)を満たすためには少なくとも V が $G'(V, E')$ において連結であることが求められるため、求めるスパナは元グラフの全域部分グラフであるものとする。 t -スパナは $(u, v) \in P$ それぞれにおいて伸長係数を考慮した距離で接続されることを要求するが、ネットワークに需要が存在するとき、著しく需要の少ない $(u, v) \in P$ も考える必要があるため、全体のリンク数は多くなり、非効率なネットワーク構造になりうる。そこで、利用者全体の輸送距離である TTD を考える。すなわち、元グラフを $G(V, E)$ 、スパナを $H(V, E')$ とすると、本論文で H は以下の 2 式を満たすものと定義する。

$$E' \subseteq E \quad (2)$$

$$TTD(H) \leq t * TTD(G) \quad (3)$$

where

$$TTD(G) = \sum_{(u,v) \in P} q_{uv} d_G(u, v) \quad (4)$$

ここで q_{uv} は (u, v) 間の需要量である。

式(2)はリンク数の条件を表すことから計画者の便益と関係し、式(3)は TTD を表すことから利用者の便益と関係する。

3. モデルの構築

(1) モデルの仮定

本研究では概略的なネットワーク構造を議論するため、交差点等を示すノードは捨象し、例えば市町村の役場など地域の中心点となる代表的なノードを定め、それらの接続関係のみを対象とするネットワークを考える。また、すべてのノードが需要の発生集中心点であるとする。したがって、OD(Origin-Destination)ペアの起点数 (もしくは終点数) はノード数と等しい。また、日単位などの比較的長い時間帯での移動需要を考慮することから、ノード間の需要は往復で大きな差異がないと仮定し、無向グラフ

で議論する。グラフ中のリンクはノード間の旅行距離、あるいは旅行時間を概念的に示すものとして定義する。すなわち、道路等の接続構造によらず、両端点の移動にかかわるコストを示すものとする。具体的なリンクの重みは、道路ネットワークや公共交通ネットワークによる所要コストを最短経路探索等で与えることとする。したがって、提案手法ではネットワーク上すべての2点間の距離行列を入力として必要とする。また、2点間の需要量は事前に調査されていることを前提とし、OD表が入力として必要である。

(2) 記号整理

定式化に用いる記号について以下に整理する。

V	ネットワーク中のノード n の集合
E	ネットワーク中のリンク a の集合
W	ODペア w の集合。
θ_a	リンク a が存在する場合は1, そうでない場合は0となる変数。
c_a	リンク a の旅行時間。
x_{ao}	リンク a を通過する OD 起点 o 別のフロー。
q_w	ODペア w のトリップ合計。
O	OD起点 o の集合。
T	グラフ G の TTD。
t	TTD 許容率。伸長変数。

(3) 定式化

スパナ一最適化問題では、元グラフと比較したスパナ一のリンク数(sparsity), または元グラフの最小全域木と比較したスパナ一のリンクの総重み(lightness)を考慮することが一般的である。本研究ではリンク本数またはTTDの最小化が目的関数として考えられる。Bell et al⁹⁾を自然に拡張するならば、ネットワーク形状に全域木制約を持つ問題、すなわちリンク数を任意の本数に制約したうえで TTD を最小にするような最適化問題が考えられる。しかしながら、計画者が事前に適切なリンク数を定める指針が存在しない。すなわち、公共交通網としていくつのリンクを有する部分グラフが適切であるかを事前に検討することは困難である。一方で、政策意思決定者が TTD に許容値を設定し、その感度分析を通して適切なネットワーク形状を検討することは可能である。このことから本稿では TTD を制約条件とし、リンク本数を目的関数とした最適化問題を考える。この問題をリンク数最小 t-TTD スパナ一デザイン問題(Minimum Sparsity t-TTD Spanner Design Problem, 以下 MS^tTTDP と呼ぶ。この問題は混合整数計画問題(Mixed Integer Linear Problem)として定式化できる。

$$\min_{\theta, x} \sum_{a \in E} \theta_a \tag{5}$$

subject to

$$\sum_{a \in E} \sum_{w \in W} c_a x_{ao} \leq tT \tag{6}$$

$$x_{ao} \leq \sum_{w \in W^o} q_w \theta_a \quad \forall a \in E, o \in O \tag{7}$$

$$\sum_{In(n)} x_{ao} - \sum_{Out(n)} x_{ao} = \begin{cases} - \sum_{w \in W^o} q_w & \text{If } n = o \\ q_w & \text{If } n = d | (o, d) = w \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall n \in V, o \in O \tag{8}$$

$$\theta_a \in \{0,1\}, x_{ao} \geq 0 \tag{9}$$

以下、定式化について概説する。式(5)は最適化問題の目的関数である。後述する制約条件のもとでスパナ一のリンク数を最小化する。式(6)は TTD 制約を示している。左辺は求めるスパナ一におけるTTD, 右辺は元のグラフ $G(V, E)$ におけるTTDに伸長係数 t を乗じたものである。式(7)はリンク $a \in E$ が $\theta_a = 1$ であり、スパナ一に含まれるとき、起点別交通量 x_{ao} が最大で起点交通量となるように制約する。一方で $\theta_a = 0$ となるとき、通行できない。式(8)は各ノードにおける起点別フロー保存則を示している。式(9)は未知変数の定義域を示す。

(4) 求解アルゴリズム

MS^tTTDP は組み合わせ最適化問題であり、膨大な解空間をもつ。特にこの問題では得られた $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{|E|}\}$ に部分全域木の制約があることから実行可能領域が非常に複雑であり、実行可能解を得ることも容易でない。したがって、大きなネットワークにおいて厳密解の導出は現実的でなく、何らかのメタヒューリスティクスを用いて発見的に近似解を求める方針をとる。Ibarra-Rojas et al⁹⁾らのレビューによると、公共交通に関するNDPの解法には遺伝的アルゴリズムや、蟻コロニー最適化、人工蜂コロニーアルゴリズム等が一般的に用いられている。一方、吉野・羽藤⁹⁾は、これらの手法は問題に応じた解の改訂ルール設計、近傍の設定、パラメータチューニング等に対して労力がかかる点が課題であると指摘し、これらの負担を必要とせず、アルゴリズム設計において任意性がほとんど介入しないクロスエントロピー法(Cross Entropy Method, 以下 CEM)を用いた。Jing Li¹⁰⁾は、クロスエントロピー法の意義は高度なシミュレーション理論に基づき、高速で、最適な更新・学習ルールを導き出す正確な数学的枠組みを定義している点にあると述べている。この有効性を踏まえ、本研究ではMS^tTTDPの求解方法としてCEMを採用する。

CEMの概要について、伏見・逆瀬川¹¹⁾をもとに記す。

CEM は複雑な推定問題および最適化問題を解決するための汎用的なモンテカルロ技法である。以下に概説する。

S を \mathbf{y} 上の目的関数とする。 S の最大値を求めることとし、最大値をとる状態を \mathbf{y}^* 、最大値を γ^* と表すと、次式が得られる。

$$S(\mathbf{y}^*) = \gamma^* = \max_{\mathbf{y} \in Y} S(x) \quad (10)$$

標本確率密度 $f(\cdot; \mathbf{v})$ のクラスと、標本の大きさ N 、希少性パラメータ ρ が与えられると、最適化のための一般的な CEM アルゴリズムは以下のように示される。

Step1

初期パラメータベクトル $\hat{\mathbf{v}}_0$ を選ぶ。 $N^e = [\rho N]$ と置き、レベルカウンタを $t = 1$ に設定する。

Step2

独立分布 $f(\cdot; \hat{\mathbf{v}}_{t-1})$ に従う $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_N$ を生成する。すべての i について性能評価値 $S(\mathbf{Y}_i)$ を計算し、小さい順に並べ替える。 $S_{(1)} \leq \dots \leq S_{(N)}$ 、 $\hat{\mathbf{y}}_t$ を性能の標本 $(1 - \rho)$ 分位点とする。 $\hat{\mathbf{y}}_t = S_{(N - N^e + 1)}$ である。

Step3

同じ標本 $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_N$ を用いて、標本の選り抜き集合 $\varepsilon_t = \{\mathbf{Y}_k; S(\mathbf{Y}_k) \geq \hat{\mathbf{y}}_t\}$ を決定し、確率計画

$$\max_{\mathbf{v}} \sum_{\mathbf{Y}_k \in \varepsilon_t} \ln f(\mathbf{Y}_k; \mathbf{v}) \quad (11)$$

を解く。その解を $\hat{\mathbf{v}}_t$ とする。

Step4

停止条件を満たしていれば終了する。そうでなければ、 $t = t + 1$ と設定し、 **Step2** に戻る。

MSfTTDP は組み合わせ最適化問題であるが、CEM を組み合わせ最適化問題に適用するためには、状態空間 Y のオブジェクト生成にあたり何らかの無作為な方法が必要である。 Y が 0-1 変数のベクトルであれば、ベルヌーイ分布から独立に各成分を決める方法が簡単であり、 $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_N$ において、 $Y_i \sim \text{Ber}(p_i), i = 1, \dots, n$ とすると、更新式は以下である。

$$\hat{p}_i = \frac{\sum_{\mathbf{Y} \in \varepsilon} Y_i}{N^e}, i = 1, \dots, n \quad (12)$$

また、無作為に各リンクを生成する方法では、全ノード間の接続を保証せず、本研究でのスパナーの定義を満たさないグラフが多数生成される。例えば全域木構造においてランダムにリンクの採否を決定する場合において、全ノードが互いに連結である確率 p は以下式(13)で求められる。

$$p = \frac{|N|^{|N|-1}}{\frac{|N|(|N|-1)}{2} C_{|N|-1}} \quad (13)$$

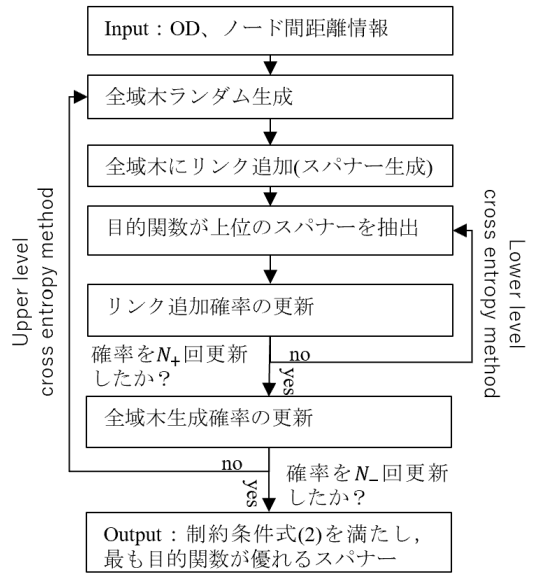


図-1 求解フローチャート

式(13)の分子はノード数が $|N|$ における全域木の総数であり、分母は完全グラフを想定した全リンク数において、リンク数が $|N| - 1$ となる組み合わせの数である。例えば $|N| = 100$ において、この値は 4.291×10^{-12} と極めて小さな値となる。スパナーではリンク数が多いほど全てのノードが相互に連結である確率は大きくなるのが期待されるが、目的関数がリンク数最小化であることから、やはり確率的に選択する場合において連結グラフが得られる確率は大きくないであろう。そのため、提案手法においては周辺解が必ず全域部分グラフであることを制約する必要がある。したがって、本研究ではアルゴリズムを二段階に分割し、確率分布の設定と更新を二重に行う CEM を提案する。下位の CEM においては全域木をインプットとして与え、確率分布は全域木に追加するリンクに設定する。確率更新により周辺解スパナーが生成される。上位の CEM においては、全域木を構成する。優れた全域木を生成するために、全域木に含まれるリンクを選択するためのリンク生成確率を設定する。生成確率の重み付けは、周辺解スパナーのうち上位サンプルのリンク採用回数に基づく。確率更新により、優れたスパナーの出力が期待される全域木の生成確率が増加する。

(5) CEM を二重適用したヒューリスティックアルゴリズム

近似解の求解は図-1に示したフローに従い、二段階の CEM を適用する手順によって構成されている。

a) 事前準備

本問題で扱うグラフは、すべてのノードに需要が発生・集中しているという仮定から、全ノード間の OD を考慮する完全グラフである。ここで、ノード数 $|N|$ 個の

完全グラフのリンク数は $\frac{N(N-1)}{2}$ 本であり、大規模ネッ

トワークではリンク本数が爆発的に増加する。CEM の実装において解候補の増加は必要サンプル数の増加に直結し、計算負荷が問題となる可能性がある。したがって、完全グラフよりも少ないリンク数のグラフを対象として計算することが妥当であろう。ここで、OD ペア間の所要時間行列を計算するための実際の道路ネットワークと最短経路に着目しよう。実際の道路ネットワークを対象とすると、複数 OD 間の最短経路が重複する、すなわち、複数のセントロイド間の経路を組み合わせると、他の 2 点間を結ぶ経路と類似する 경우가多く考えられる。例えば、図-2 のような道路ネットワークにおいて、OD の組み合わせは図-3 の通りである。このうち、リンク 1-4 の旅行時間に着目する。道路ネットワークの接続関係から、リンク 1-4 の旅行時間は、図-4 のようにノード 1 から 4 までを 2 点間ずつ結んだ旅行時間の合計と比較し差が小さいと考えられるため、図-3 のリンク 1-4 は代替可能とする。他のノードペアについても同様であり、代替可能としたリンクを全て削除すると図-5 のようなグラフが出力される。詳細な手順を示す。k は任意のパラメータである。

手順 1 : $n = 1$ とする。

手順 2 : グラフ $G(V, E)$ から n 番目に旅行時間の長いリンク (i, j) (旅行時間を t_{ij} とする) を抽出し、 G から (i, j) を削除したグラフ G' を生成する。

手順 3 : G' におけるノードペア (i, j) 間の最短経路の旅行時間 (t'_{ij}) とする) を計算し、 $t'_{ij} < k * t_{ij}$ であればグラフ G から (i, j) を削除し、手順 2 に戻る。そうでない場合手順 4 に進む。

手順 4 : $n = n + 1$ とし、 $n \leq |E|$ ならば手順 1 に戻る。

$n = |E|$ ならば手順 5 に進む。

手順 5 : 手順 2-4 において、すべての (i, j) が $t'_{ij} \geq k * t_{ij}$ であれば G を出力する。そうでなければ手順 1 に戻る。

処理の初期段階において、 G は完全グラフに近いグラフであることから、初期段階で $t'_{ij} \geq k * t_{ij}$ であったノードペアが、終盤では $t'_{ij} < k * t_{ij}$ と判定される可能性がある。そのため手順 5 により手順 1-4 の処理を出力が収束するまで繰り返している。以上により対象とするグラフのうち、旅行時間の観点から代替可能とみなせるリンクを除去した部分グラフを生成する。例えばこの処理を北海道ネットワークに適用 ($k = 1.2$) すると、図-6,7 のようにリンクを削減することができる。これは実際の主要道路ネットワークとほとんど同じ形状である。

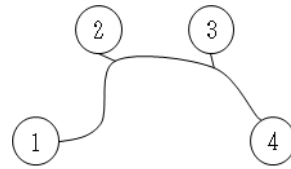


図-2

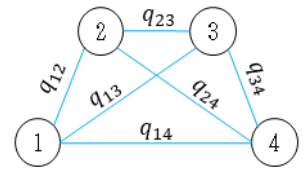


図-3

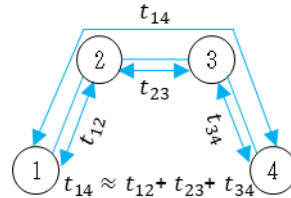


図-4

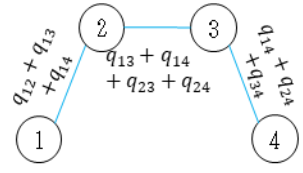
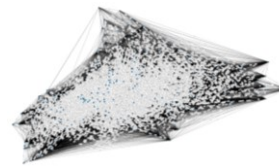


図-5



リンク数 : 16836
TTD : 13894341

図-6



リンク数 : 255
TTD : 15625367

図-7

b) 計算アルゴリズム

Step1 初期化

繰り返し識別子 $m = 0, n = 0$, 上位の CEM に用いるリ

ンク生成確率 $p_a^n = \frac{1}{|E|} \forall a \in E$ と初期化する。

Step2 全域木の生成

グラフ $G(V, E)$ から全域木生成のためのリンク生成確率 $P_n^+ = \{p_1^n, p_2^n, \dots, p_{|E|}^n\}$ をもとに全域木 $T(V, A) | (|A| = |V| - 1, A \subseteq E)$ 任意の数 k 個生成し、その集合を $T^n = \{T_1^n, T_2^n, \dots, T_k^n\}$ とする。全域木を生成する手順について記す。

初期設定 : 繰り返し識別記号 $i = 0$ とする。

手順 1 : グラフ g , 候補リンク集合 E を初期化する。

手順 2 : リンク集合 E の中から一つのリンク $a (a \in E)$ を確率集合 P_n^+ をもとに取り出し、グラフ g に付与する。

手順 3 : リンク a を候補リンク集合 E から消去する。

手順 4 : グラフ g に閉路が存在するか判定する。閉路が存在する場合、グラフ g からリンク a を削除し手順 1 に戻る。閉路がない場合手順 5 に進む。

手順 5 : グラフ g のリンク数が $|V| - 1$ 本か判定する。 $|V| - 1$ 本でない場合手順 1 に戻る。 $|V| - 1$ である場合、グラフ g を全域木 T_k^n として出力する。繰り返し識別記号 $i \leftarrow i + 1$ とし、手順 1 に戻る。

この手順 1-5 を、繰り返し識別記号 $i = k$ となるまで繰り返す。なお実装にあたっては、Python のライブラリである networkx から、関数 random_spanning_tree を呼び出して使用した。

Step3 周辺解スパナーの生成

全域木 $T_i^n(V, A_i)$ に追加するリンク集合 $L_i = \{E - A_i\}$ に与えられるリンクの付与確率集合 $\mathbf{P}_{mi}^- = \cup_{a \in L_i} p_a^m$ に基づき、リンク $a \in L_i$ を全域木 T_i^n に追加し、スパナー H_{il} を生成する。この処理を任意の N_r 回繰り返し、 N_r 個のスパナー集合 $\mathbf{H}_i^m = \{H_{i1}, H_{i2}, \dots, H_{iN_r}\}$ を生成する。

なお、全域木 $T_i^n(V, A_i)$ から生成される周辺解は、追加できるリンクの本数が $|L_i|$ 本であることから、解候補が $\sum_{k=1}^{|L_i|} C_k$ 個存在する。大規模ネットワークでの適用を想定する場合、きわめて膨大な探索範囲である。ここで、繰り返し回数 m 回目で追加するリンク数を、繰り返し回数が $m = m - 1$ の試行で生成したスパナー集合 \mathbf{H}^{m-1} の中で、目的関数値が最上位のスパナーにおいて追加されたリンク数とする。これにより、 m 回目の処理で生成されるスパナーのリンク本数は、 $m - 1$ 回目の処理で生成される最適スパナーのリンク数以下であることが保証される。 $m - 1$ 回目の最適スパナーの追加リンク集合を $L_i^{m-1} (L_i^{m-1} \in L_i)$ とすると、このリンク数の制約により、 m 回目の解候補は、 $\sum_{k=1}^{|L_i^{m-1}|} C_k$ 個にまで削減され、必要サンプル数の削減に寄与する。この処理により局所解に陥る可能性も生じるが、筆者らがこの処理を与えなかったときには膨大な周辺解を生成しない限り収束が十分でなかった実験的な経験により、この処理を与えた。

Step4 周辺解スパナーの評価

\mathbf{H}^m に含まれるスパナーそれぞれにおいて式(15)の目的関数を計算し、上位 ρN_r 番目までのスパナーを抽出する。(e.g., $\rho = 0.1$)。 λ はスケールパラメータであり、 $\sum_{a \in E} \theta_a$ と比べて十分に小さな数である(e.g., $\lambda = 0.000001$)。このパラメータにより、解の目的関数値は(スパナーのリンク数)(小さな値)となる。スパナーの評価をリンク数によって行くと同時に、リンク数が同じスパナーについては TTD が少ないスパナーを優良解とすることができる。

$$\min_{\mathbf{x}, \theta} \sum_{a \in E} \theta_a + \lambda \left(\sum_{a \in E} \sum_{w \in W} c_a x_{ao} - tT \right) \quad (15)$$

Step5 リンク付与確率 \mathbf{P}_{mi}^- の更新

スパナー H_{il} において、リンク a が追加されている場合 1、そうでないとき 0 とする変数を y_a^{Hi} とする。式(16)によりリンク追加確率集合 \mathbf{P}_{mi}^- を更新する。 $\sum_{H_{il} \in \mathbf{H}_i^m} y_a^{Hi} = 0$ となるリンク a は $p_a^m = 0$ となり、以降の周辺解で採用されなくなることを避けるため、小さい数 ε を与える。(e.g., $\varepsilon = 0.01$)

$$p_a^m = \begin{cases} \varepsilon & \text{if } \sum_{H_{il} \in \mathbf{H}_i^m} y_a^{Hi} = 0 \\ \frac{\sum_{H_{il} \in \mathbf{H}_i^m} y_a^{Hi}}{\rho N_r} & \text{otherwise} \end{cases}, \forall a \in L_i \quad (16)$$

Step6 下位レベル CEM の実行

Step3 から Step5 を実行し、 $m \leftarrow m + 1$ と更新する。この作業を $m = N_-$ となるまで繰り返す。このときに得られたスパナーのうち、制約条件式(9)を満たし、目的関数が優れるスパナーの集合を $\overline{\mathbf{H}}_i$ とする。これは全域木 T_i から生成されたスパナーの集合であるため、これを \mathbf{T}^n に含まれるすべての全域木に適用し、得られたスパナーの集合 $\overline{\mathbf{H}}^n = \{\overline{\mathbf{H}}_1, \overline{\mathbf{H}}_2, \dots, \overline{\mathbf{H}}_k\}$ を得る。

Step7 全域木生成のためのリンク生成確率 \mathbf{P}_n^+ の更新

$\overline{\mathbf{H}}^n$ に含まれるスパナーにおいて、各リンクが何回採用されたかを参照し、 \mathbf{P}_n^+ を更新する。

Step8 上位レベル CEM の実行

\mathbf{P}_n^+ が更新されたときに $n \leftarrow n + 1$ とし、Step1 から Step7 までを $n = N_+$ となるまで繰り返す。このときに得られたスパナーのうち、最も目的関数が優れるスパナーを出力する。

4. 小規模ネットワークへの適用

(1) 計算条件

図-8 に示す Sioux Falls ネットワーク¹²⁾を試算対象ネットワークとし、モデルの試算を行う。ネットワーク内のノード数は 24 である。入力として必要なデータはすべての 2 点間の距離行列と OD 表のみであるが、3 章(5)節 a)項の処理を行うことにより、確率分布を設定すべきリンクは図中の 38 本のみに限定される。すべてのノード間に需要が発生・集中しており、その総数は 1,080,300 トリップである。ノードの発生交通量から、需要の多い地点はノード 10 付近であることが見てとれるが、実際にノード 10 付近は Sioux Falls の中心市街である。また、リンクには旅行時間を表すリンクコストが設定されている。例えばノード 10 付近は値が大きく、13-1-2 や 7-18-20 のような外周部は小さい値となっているが、これはノード 10 付近が中心市街であること、また市街縁部に高速道路が整備されていることに起因する。

このテストネットワークを対象に、前章に示したアルゴリズムをプログラミング言語 Python で記述した。計算環境としては、AMD Ryzen 9 5900X 12-Core Processor 3.70 GHz、メモリ 128GB の計算機を使用している。

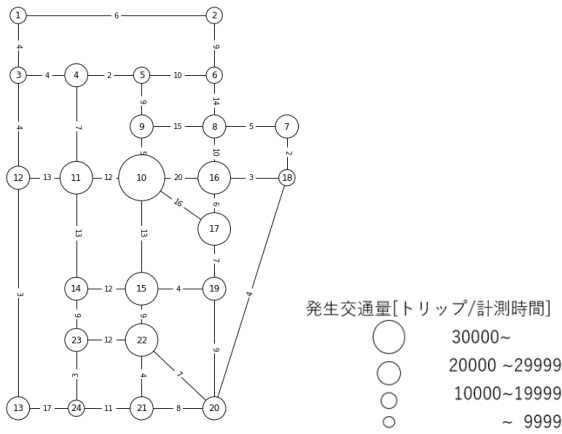


図-8 Sioux Falls ネットワーク

(2) CEMの挙動確認

2段階のCEMがどのように挙動するかテストネットワークを用い確認する。主要パラメータの設定に関しては、 $N_- = 5$, $N_r = 100$, $\rho = 0.1$ としたが、これらの数値は(3)に後述する感度分析に基づく。また、TTD 制約は $t = 1.2$ とした。

図-9 に、上位レベル CEM の繰り返し処理各回において生成された解の目的関数の推移を示す。繰り返し処理2回目まではリンク数27本のスパナーが優良解とされているが、3回目にリンク数26本のスパナーが見つかる。その後の繰り返し処理では、リンク数26本のスパナーの中でもある一つの解に収束した。CEMの二重適用により期待される、局所解への収束を防ぐような挙動が確認できる。

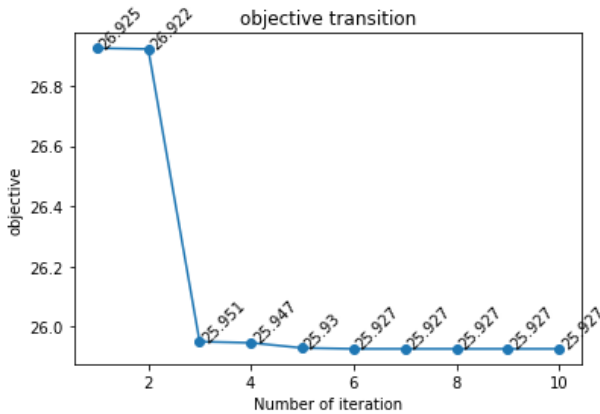


図-9 目的関数の推移

(3) パラメータの感度分析

CEMにおける主要な設計パラメータの感度分析を行う。CEMの感度分析については、小池・中西ら¹³⁾が詳しい。これを参考にし、一つの全域木から生成するスパナー数 N_r 、上位解抽出率 ρ 、下位レベルCEMの繰り返し回数 N_- を対象に、目的関数値と計算時間の変化に着目した感度分析を行う。

まず、一つの木から生成するスパナーのサンプル数

N_r について、サンプル数を10から1000まで変化させた際の目的関数値の変化と計算時間を図-10,11に示す。ここでは $N_- = 5$, $\rho = 0.1$ とした。なお、各試行において最も目的関数値が優れたものを解として採用している。感度分析の結果より、今回の小規模ネットワークにおいては100サンプル程度あれば目的関数が収束することが示された。同時に、計算時間は線形にしか増加しないことも示された。大規模なネットワークにおいても、十分なサンプル数を生成することで解の精度を上げることができると考えられる。

続いて下位レベルCEM繰り返し回数 N_- について、1から50まで変化させた際の目的関数値の変化と計算時間を図-12,13に示す。なお $N_r = 100$ とし、 $\rho = 0.1$ とした。なお、各試行において最も目的関数値が優れたものを採用している。結果より、今回の小規模ネットワークにおいては5回程度繰り返せば目的関数は収束することが示され、同時に、この場合も計算時間は線形にしか増加しないことも示された。

続いて上位解抽出率 ρ について0.1から1まで変化させた際の目的関数値の推移を図-14,15に示す。抽出率が大きいとき、質の悪い解も含めて確率更新を行うため、抽出率が50%を超えると精度の悪化をもたらすことが分かった。計算時間に大きな差はないことから、抽出率はある程度小さな値とする必要がある。以降の計算では、 $N_- = 5$, $N_r = 100$, $\rho = 0.1$ を用い計算を行う。

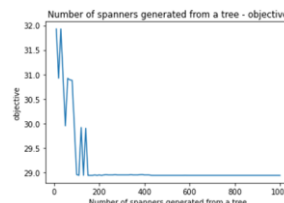


図-10 N_r -目的関数値の感度分析

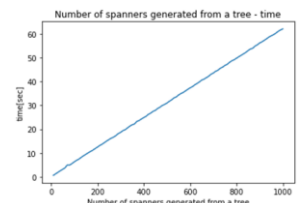


図-11 N_r -計算時間(sec)の感度分析

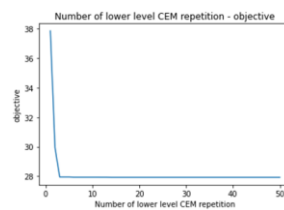


図-12 N_- -目的関数値の感度分析

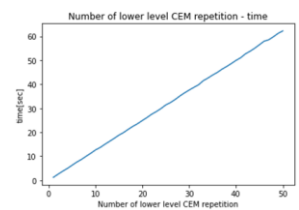


図-13 N_- -計算時間(sec)の感度分析

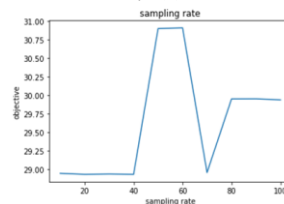


図-14 ρ -目的関数値の感度分析

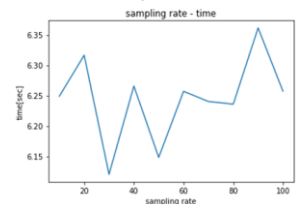


図-15 ρ -計算時間(sec)の感度分析

(4) 安定性の検証

続いて $t = 1.2$ のケースで CEM モデルを 10 回実行し、導出された近似解の安定性について検証する。結果を表-1 に示した。リンク数は 26 で安定している一方で、TTD は 10 回中 1 回異なる値の解が導出され、変動が存在することが確認される。しかしながら TTD の内訳を調べると数値の変動は 0.1% に留まっており、最適解に収束しない場合でもそれに準ずる良好な解が導出されることが言える。

表-1 近似解の安定性

	リンク数	TTD
1回目	26	8194400
2回目	26	8194400
3回目	26	8194400
4回目	26	8194400
5回目	26	8194400
6回目	26	8206000
7回目	26	8194400
8回目	26	8194400
9回目	26	8194400
10回目	26	8194400

(5) 伸長係数 t によるスパナ構造の変化

図-16 に t ごとの近似解を示す。リンクの太さとノードの大きさは、それぞれ通過交通量と発生交通量によって設定した。

試算結果について考察を行う。まず $t = 1.4$ の試算結果について述べる。需要の高いノードを一本の路線で接続する、TTD 最小全域木となった。なお、木構造となったのは、TTD 許容値が大きくなるほど疎なネットワークでも制約を満足するためであり、 $t = 1.4$ 以降の解は全て同一である。続いて $t = 1.3$ 、 $t = 1.35$ の試算結果については、ノード 22 やノード 17 付近の接続構造が大きく変化する結果となった。 $t = 1.4$ 以降のような TTD 制約が緩い、すなわち単にリンク数のみを最小化するような場合、18 リンクは迂遠な経路となるため、選択されない経路である。この経路は旅行時間の短い高速道路であり、 $t = 1.4$ と比して $t = 1.3$ 、 $t = 1.35$ のリンク数増加は 1 本のみだが、TTD は 8% 減少した。このことはリンク数の増大を少し許容することで、ネットワークが大幅に最適化されることを示唆している。 $t = 1.2$ や $t = 1.25$ の試算結果では、都心部を迂回する 4-11-14 のような経路が増え、リンク 10 を通らない環状のネットワークが形成された。 $t = 1.15$ の試算結果では 13-24 リンクが初めて追加され、さらに市街地を迂回する経路が増えた。TTD の制約が緩和されるほど、中心市街から離れた位置を通る経路が増えネットワークが最適化されることが確認できる。

また、 $t = 1.20$ の試算結果からはノード 2 の接続構造が他とは異なるものとなっている。このことは市街を迂回する環状経路の形成、10-17 のような放射経路の形成により、末端部を出発するトリップの移動経路が大きく変化することを示す。ノード 2 の接続構造もその一例であり、 $t = 1.10 \sim 1.20$ の場合、1-2 ではなく 2-6 の経路をとることでネットワークが最適化されることを確認できる。 $t = 1.10 \sim t = 1.05$ ではリンク数が増大し、元ネットワークから通過需要の少ないリンクを削減したような形状が出力された。

(6) ハブとするべき地点の考察

ハブとするべき地点の考察を行う。ハブ機能についてここでは、ノードを通過する需要が多いこと、またノードにおいて多くの需要が分岐していることと整理する。 $t = 1.2$ の場合において得られた解について、ノード次数が 3 以上の地点に着目し、発生交通量、通過交通量、接続するリンク間交通量の変動係数を計算し、表-2 に示した。接続するリンク交通量間の変動係数は、値が小さいときばらつきが少ない、すなわちそのノードにおいて交通が均等に分散されていることを示す(図-18)。逆に値が大きい場合はそのノードを通過する需要が殆ど(図-17)か、あるいはそのノードから発生する交通の殆どが一方であることを示している。

$t = 1.2$ の試算結果において、ノード次数が 3 以上の地点は 9 か所であった。まず、ノード 4、22 に着目する。これらは、発生交通量が多くない一方で、多くの需要が通過しており、なおかつその地点で、需要が均等に分割している地点である。したがってこれらの地点には、大規模な交通結節機能を設置するのが適当な地点であると考えられる。ノード 10 は、発生交通量が多く、需要も均等に分散しているが、通過交通量は先の 2 点に比べ少ない。つまり多くの需要の発着地点となる地点である。このことから、ノード 10 にはターミナル機能を持った交通結節機能を設けるのが適切であると考えられる。ノード 18 は、先の 3 点に比べ発生交通量や通過交通量は多くない一方で、需要が均等に分散している。このことは、中規模な交通結節機能を設置するのに適した地点であることを示唆する。

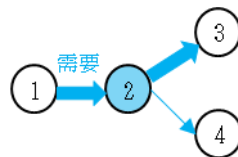


図-17 ハブ機能が低いと考えられる例

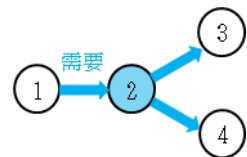


図-18 ハブ機能が高いと考えられる例

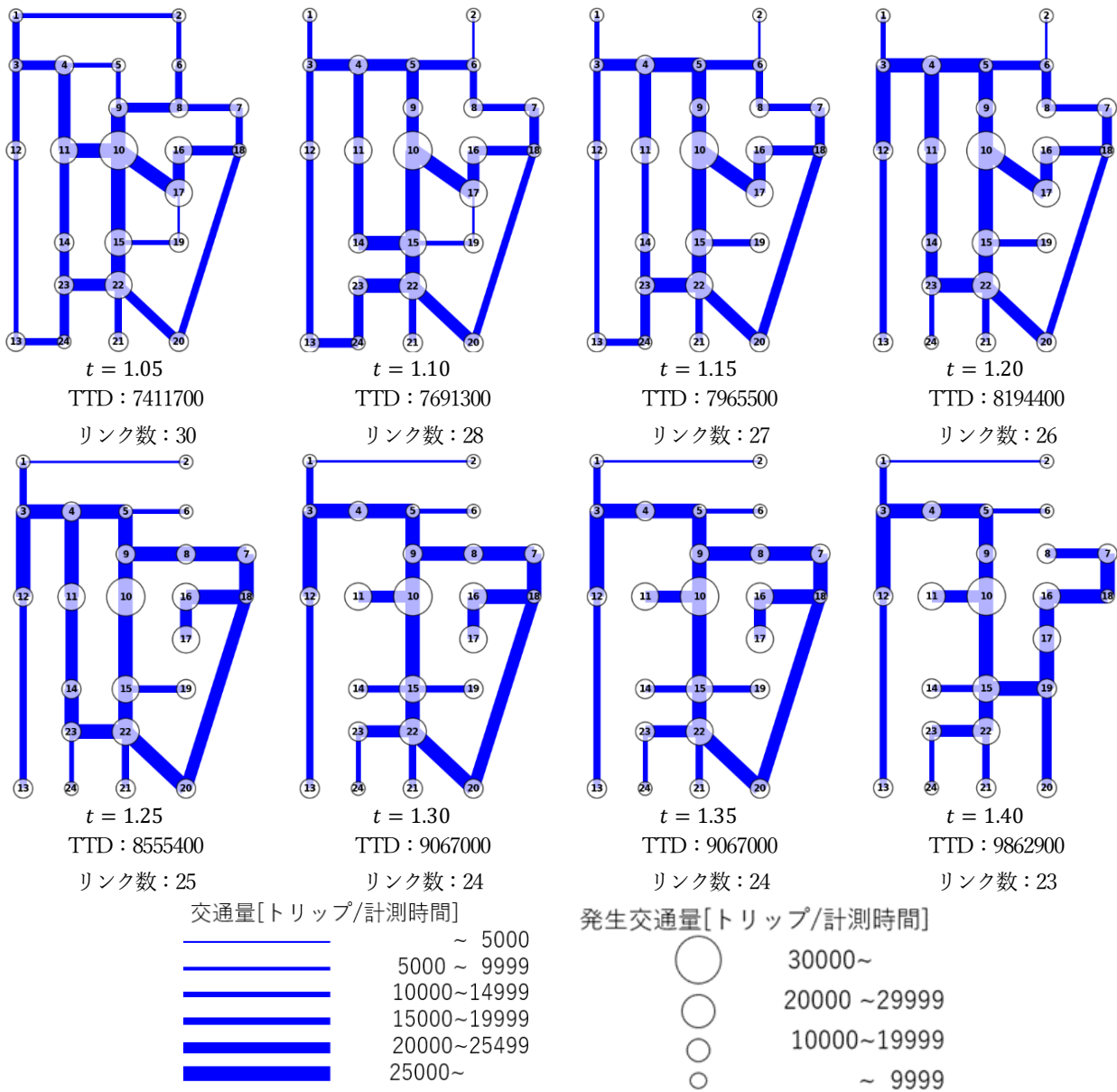


図-16 伸長係数 t によるスパナー構造の変化

表-2 ハブとするべき地点の考察($t = 1.2$)

ノード番号	発生交通量 [トリップ/計測時間]	通過交通量 [トリップ/計測時間]	接続リンク交通量間の変動 係数
3	11700	67200	0.452
4	6100	90400	0.126
5	7600	87600	0.281
6	12100	30400	0.459
10	22400	60400	0.040
15	26100	59700	0.282
18	12800	43700	0.093
22	14500	71000	0.064
23	7800	48600	0.399

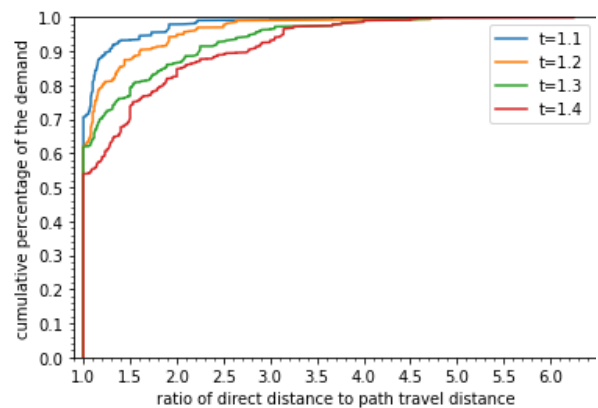


図-19 需要の累積比率と TD 増加率の関係

(7) 各トリップの TD 増加率

スパナーの生成において考慮する指標は、全体最適性を表す TTD であった。ここで、個別トリップに着目し、各トリップの旅行時間 (Travel Distance, 以下 TD) 増加率を調べる。ここで TD 増加率とは、各トリップ i の、元ネットワークの最短経路における旅行時間 c_i と、スパナー状のネットワークの最短経路における旅行時間 t_i とを比した増加率 $r_i = \frac{c_i}{t_i}$ と表せる。図-19 に TD 増加率ごとの累積

トリップ割合を需要量ベースで示した。縦軸は需要の累積比率である。2 章では、全域木状のネットワークには大幅な迂回をもたらす経路が発生する可能性があることを述べたが、実際に $t = 1.4$ のネットワークでは、6.25 倍もの迂回を必要とする経路が存在することが確認できる。一方で、 $t = 1.2$ と $t = 1.3$ のネットワークでは、最も TD が増えたトリップの増加割合が逆転する結果となった。具体的に $t = 1.2$ は 1-2 の経路が該当し、 $t = 1.3$ は 17-19 の経路が該当する。前者の需要は後者に比べて小さいため、 t の値を小さくすることでネットワーク全体の TTD は削減されるが、需要の小さい末端トリップの TD はあまり変わらない、または逆に増える可能性があることに注意が必要である。

(8) Greedy Algorithm との比較

本稿で提案した手法の他に簡便な方法として、TTD を最小とする全域木に Greedy Algorithm により TTD を最も小さくするリンクを一つずつ追加するスパナーを得る方法が考えられる。本手法の有効性を示すために、Greedy Algorithm により得られた解の構造を比較する。パラメータは 3 章(2)節で検討した値を用い、 $t = 1.2$ の場合で試算した。結果を図-20 に示す。リンク数は等しいが、TTD は CEM で導出したスパナーの方が優れた値となった。Greedy Algorithm で生成したスパナーは、あくまで最小 TTD 全域木にリンクを追加したものである一方、提案手法で発見的に得られたスパナーはそうした全域木のネットワークトポロジーの影響を受けない。したがって、18-20-22 リンクのような TD の短いリンクでネットワークを構成することができ、結果として優良な解が導出されることが確認できる。続いて、両手法によって得られた解における各トリップの TD 増加率の詳細を調べる。結果を図-21 に示す。縦軸は需要の累積比率である。提案手法がより優良な解を導出する一方で、各トリップに着目すると、Greedy Algorithm で導出した解の方が TD 増加率 1 倍のトリップが多いことが分かった。これは Greedy Algorithm が最小 TTD 全域木、つまりできるだけ多くの需要の TD 増加率が 1 になるような構造のグラフからスパナーを生成したこと起因すると考えられる。このことより、提案手法は TD 増加率が 1 の経路

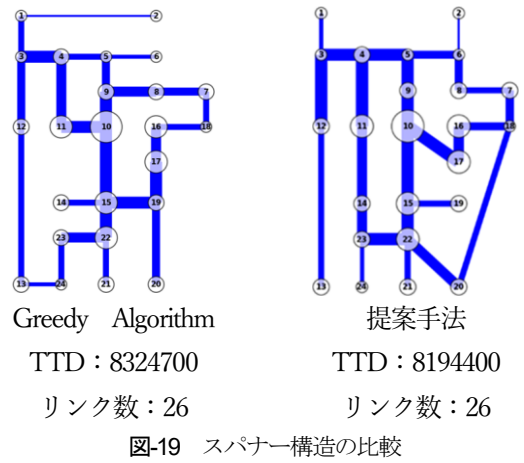


図-19 スパナー構造の比較

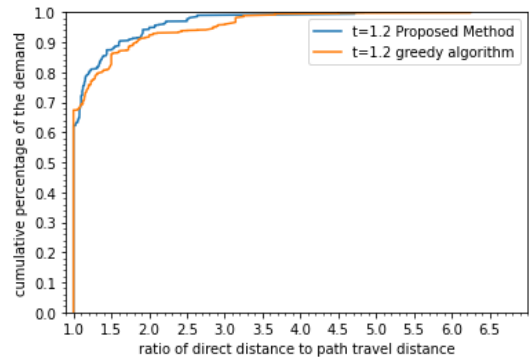


図-20 需要の累積比率と TD 増加率の関係

が少ない代わりに大幅な迂回をもたらすトリップを削減し、全体として最適な解を導出することができる点に優位性があるといえる。

6. おわりに

本研究では、交通結節点を検討するための規範的手法として、効率的な OD 間輸送の接続構造を導出する NDP を構築した。先行研究では乗客の移動経路を全域木状に集約しハブを見つけたが、本研究ではグラフスパナー状に集約することでより拡張的な検討を可能とした。本問題は求解範囲が膨大であることから、クロスエントロピー法を用いて発見的に解を導出するアルゴリズムを構築した。導出した近似解の妥当性については、目的関数の推移や感度分析、また Greedy Algorithm との比較により確認している。伸長係数 t の変化による解のネットワーク構造の違いを確認することで、効果的な需要の集約方法について示し、結節点の整備によるネットワークの最適化を示唆した。ネットワークトポロジーの観点からの考察に加えて、ノードの発生交通量、通過交通量、ノードにおける需要の分散度合いから各地点のハブ機能の多寡を確認した。また、今回評価指標としたのは TTD、つまり全体の旅行時間であったが、個別トリップの旅行時間

も確認することでネットワークの特性を示した。

今後の課題について述べる。まず、今回テストネットワークで近似解を導出することができたが、大規模ネットワークでは計算負荷が問題となる可能性がある。例えばグラフ $G(V, E)$ から生成した全域木について、周辺解スパンナーの候補数は $\sum_{k=1}^{|E|-|V|+1} C_k$ 個存在し、ネットワークの大規模化に伴いこの個数は爆発的に増加する。3章(5)節 b)項に記した処理によりこの候補数を絞る工夫を行っているが、筆者の環境では 100 個以上のノードを持つネットワークにおいて演算に膨大な時間を要し求解が困難であった。実ネットワークへの適用を踏まえ、アルゴリズムの更なる改良が必要である。また、アルゴリズムの高度化による演算高速化は CEM の繰り返し可能回数に直結し、解の精度にも影響することから併せて重要であると考えられる。

また、本手法は公共交通のハブを見つけるための需要の概念的な接続関係を示すに留まる。一方で、詳細な路線設計や頻度設定、具体的なハブ機能の検討はネットワーク設計において重要な検討事項である。これらは本論文で得られた解をもとに、新たな下位問題として取り扱う必要がある。

参考文献

- 1) 一般社団法人交通工学研究会：機能階層型道路ネットワーク計画のためのガイドライン（案），平成 27~29 年度 基幹型研究課題, 2018.
- 2) Konstantinos Kepaptsoglou, and Matthew Karlaftis.: Transit Route Network Design Problem: Review, Journal of Transportation Engineering 135(8): 491-505, 2009
- 3) Valérie Guihaire, Jin-Kao Hao : Transit network design and scheduling: A global review, Transportation Research Part A 42, 1251-1273, 2008.
- 4) Vaughan, R. : ptimum polar networks for an urban bus system with a many-to-many travel demand Transp. Res., Part B, th odol., 20B(3), 215-224, 1986
- 5) Tsao, S., and Schonfeld, P. M : Optimization of zonal transit service J. Transp. Eng, 109(2), 257-272, 1984.
- 6) Michael G.H. Bell, Jing-Jing Pan, Collins Teye, Kam-Fung Cheung, Supun Perera: An entropy maximizing approach to the ferry network design problem, Transportation Research Part B 132, 2020.
- 7) Reyan Ahmed, Greg Bodwin, Faryad Darabi Sahneh, Keaton Hamm, Mohammad Javad Latifi Jebelli, Stephen Kobourov, Richard Spence, Graph Spanners: A Tutorial Review arXiv:1909.03152v2 [cs.DM] 14 Mar 2020.
- 8) O.J. Ibarra-Rojas F. Delgado R. Giesen J.C. Muñoz: Planning, operation, and control of bus transport systems: A literature review, Transport Re-search Part B, Vol.77, pp.38-75, 2015.
- 9) 吉野大介, 羽藤英二：公共交通計画のための計算アルゴリズムの提案と低密度分散化する被災地におけるバス路線再編への適用, 土木計画学研究発表会・講演集, Vol.51, 2015
- 10) Jing Li, Zaifu Guo : Solve Constrained Minimum Spanning Tree By cross-entropy (CE) method, ICAITA 2019
- 11) 伏見正則, 逆瀬川浩孝: モンテカルロ法ハンドブック, 朝倉書店, pp. 485-503, 2014.
- 12) 小池卓武・中西航・柳沼秀樹・朝倉康夫：クロスエントロピー法による交通ネットワーク最適計画問題の数値計算：進行方向規制された交差点の最適配置問題を例に, 土木計画学研究発表会・講演集, Vol.58, 2018.
- 13) Leblanc, L.J., Morlok, E. K. and Pierskalla, W.P.: An Efficient Approach to Solving the Road Network Equilibrium Assignment Problem, Transportation Research, Vol.9, pp.309-318, 1975.

(?)
(?)

GRAPH SPANNER DESIGN PROBLEM FOR TRAFFIC NODAL PLACEMENT

Kinya SATO and Satoshi SUGIURA

In Japan, where the population has been declining in recent years, there is an urgent need to realize a low-cost public transportation network that maintains a high level of service. In this paper, we propose a normative methodology for studying transportation nodes, which are an important element for this purpose. Transportation nodes are optimized and identified through a network design problem that can efficiently transport passengers. In the previous study, hubs were found by aggregating passenger travel routes in the form of a spanning tree, but in this study, hubs are aggregated in the form of a graph spanner, which allows a more expansive study. In addition, the problem treated in this paper has a huge solution range, making it difficult to derive an exact solution. Therefore, this paper constructs a model that derives solutions heuristically using the cross-entropy method. The behavior of the model is verified on a test network, and the obtained solution is discussed.