

ゼロ流量を表現可能な摂動効用経路選択モデル

渡邊 葵¹・日高 健²

¹正会員 (株) 豊田中央研究所 (〒480-1118 愛知県長久手市横道 41-1)
E-mail: Aoi.Watanabe@mosk.tytlabs.co.jp

²正会員 (株) 豊田中央研究所 (〒480-1118 愛知県長久手市横道 41-1)
E-mail: hidaka@mosk.tytlabs.co.jp

ランダム効用最大化に基づく典型的な確率的利用者均衡配分 (SUE) では、選択肢集合内のどれほど遠回りの経路にも正の流量が配分されてしまうという課題がある。そこで本研究では、Tsallis エントロピーを摂動項に用いることでゼロ流量を表現可能な摂動効用経路選択モデルを定式化し、これに対応する SUE を新たに α SUE と定義する。摂動効用とは、期待効用に対し、各選択肢の選択確率を変数とする摂動項を加えたものである。ゼロ流量が表現可能な既往モデルは、パラメータ設定がアドホックで、計算負荷も高かったのに対し、提案モデルは、ロジットモデルを特殊解に含みながら流量ゼロを表現でき、かつ、推定が単純な線形回帰となり、計算量を大幅に削減できる。

Key Words: *perturbed utility, route choice, stochastic user equilibrium, Tsallis entropy, zero flow*

1. 序論

交通量配分においては、確率的利用者均衡¹⁾ (Stochastic User Equilibrium; SUE) が長らく中心的な役割を果たしてきた。確定的利用者均衡²⁾ (Deterministic User Equilibrium; DUE) では、Wardrop の第一原則、すなわち、旅行者は最短経路を選択することが仮定されているのに対し、SUE では、旅行者の経路選択行動として、加法的ランダム効用最大化³⁾ (Additive Random Utility Maximization; ARUM) が仮定されている。すなわち、旅行者の効用は確定項と確率項の和から成ると考え、確率項の導入により DUE の仮定を緩和していると言える。

ここで、旅行者の経路選択モデルに多項ロジット (Multinomial Logit; MNL) モデルや多項プロビット (Multinomial Probit; MNP) モデルを仮定するような典型的な SUE には、流量ゼロを表現できないという課題がある。すなわち、これらの典型的な SUE では、どれほど遠回りの経路にも正の流量が配分されてしまう。SUE のこうした特徴は、旅行者の経路集合には時空間制約があること⁴⁾、また、旅行者の認知能力には限界があること⁵⁾などから不自然であると言える。また、実際の経路選択結果においても、最短経路よりもあまりにも遠回りの経路は選択されないことが確認されている⁶⁻¹⁰⁾。

この課題に対し、近年 Bounded Choice Model (BCM) と

呼ばれる新しいタイプの経路選択モデルが提案されている^{11,12)}。ここでは、ある選択肢の効用が、全選択肢の中で最大の効用値から δ を引いたものより小さい場合には、その選択肢の選択確率は厳密にゼロとなるよう、ARUM を拡張して定式化されている。BCM は流量ゼロを表現できるだけでなく、限定合理性を仮定するモデル^{13,14)}と異なり点推定である点、選択肢集合を事前生成する方法^{6,15)}と異なり均衡時の経路効用を用いて選択肢集合が決まる点が従前の方法論より優れている。

しかしながら、BCM は効用の具体的な値を用いて選択確率がゼロになる効用値の範囲 δ を外生的に設定する必要があり、アドホックな方法論であると言える。また、パラメータ推定や交通量配分においては、経路集合の中で効用最大となる経路を特定し、各経路の効用との比較を行うというステップが繰り返す計算内で都度必要となるため、計算量が増加してしまうという課題がある。

こうした課題に対し本研究では、ARUM ではなく、摂動効用最大化 (Perturbed Utility Maximization; PUM) の枠組みで経路選択行動を記述する方法を提案する。摂動効用とは、効用確定項に基づく期待効用と選択確率分布から計算される非線形な摂動項の値の和で定義される効用の形式である。特筆すべき点として、任意の ARUM の選択確率式は PUM により表現可能である¹⁶⁾。その意味で、PUM は ARUM を含む、より一般的な枠組みである。

本研究では、Tsallis エントロピー¹⁷⁾を摂動項に用い、PUM により経路ベースの経路選択行動を定式化する。また、こうした行動原理に基づき実現する SUE を α SUE と定義する。提案モデルは MNL モデルを特殊解に持ちながら、選択確率をゼロにする効用の範囲を外生的に設定することなく選択確率ゼロを表現可能であり、かつ、推定の計算が回帰で可能なため、計算負荷を大きく削減可能であることを示す。

なお、PUM の枠組みで経路選択行動の記述を試みた研究は管見の限りでは Fosgerau ら¹⁸⁾の一つしかない。ここでは、リンク単位で PUM モデルを定義し、流量保存則を制約条件とすることで、リンクごとの選択確率を導出している。結果として、適当な摂動項を導入すれば、経路列挙不要で、選択肢相関を考慮しながら、流量ゼロも表現可能であることが数値計算により確認されている。だが、リンク単位での定式化としたために、摂動項は BPR 関数のようなリンクパフォーマンス関数の役割を果たすに留まっており、ARUM と PUM との対応関係¹⁶⁾が明らかになっていない。結果として、なぜ特定の摂動項では MNL モデルがもつ課題が克服されるのか、その理論的な考察は行われておらず、具体的にどのように摂動項を設定すれば良いのか、ということについても議論が行われていない。そのため、例えば MNL モデルに対応する摂動項がどのような表式であるのか、ということも明らかでない。本研究では、経路列挙は必要であるが、旅行者の選択肢集合である経路集合に対して PUM を定義することで、MNL モデルに対応する PUM モデルも明示しながら、その自然な拡張として選択確率ゼロを表現できるモデルを提示する。

以降の構成は次の通りである。2章では、PUM に基づく経路ベースの経路選択モデルを定式化し、中でも選択確率ゼロを表現可能な α -entmax に対して、対応する SUE である α SUE を定義する。3章では、簡単なネットワークにおいて α SUE の数値計算を行い、流量ゼロを表現し得るモデルであることを数値的にも確認する。4章では、PUM モデルにおけるパラメータ推定法を示し、回帰による高速推定が可能であることを確認する。最後に5章で本研究のまとめと今後の展望を示す。

2. 定式化

本章では、はじめに2.1節で PUM に基づく経路ベースの経路選択モデルを定式化する。続いて2.2節では、摂動項を具体的に設定して対応する選択確率式を示す。最後に、2.3節において、本研究で提案する α SUE を定義する。

(1) 摂動効用最大化に基づく経路選択モデル

いま、同一 OD をもつ旅行者について、経路集合 C 内の各経路 $i \in C$ について効用確定項 V_i が与えられた時、旅行者の経路選択行動を

$$\max_{\mathbf{P} \in \mathbb{R}_+^{|C|}} U(\mathbf{P}) \equiv \mathbf{V}^t \mathbf{P} + F(\mathbf{P}) \quad s.t. \quad \mathbf{1}^t \mathbf{P} = 1 \quad (1)$$

で定義する。これが、PUM に基づく経路ベースの経路選択モデルの定義である。ただし、 $\mathbf{P} \equiv (P_i)_{i \in C}$ は経路選択確率の縦ベクトル、 $\mathbf{V} \equiv (V_i)_{i \in C}$ は効用確定項の縦ベクトル、 $\mathbf{1}$ は要素がすべて1で要素数 $|C|$ の縦ベクトルであり、選択確率ベクトル \mathbf{P} に対してスカラー値を返す関数 $F(\mathbf{P})$ を摂動項と呼び、 $U(\mathbf{P})$ を摂動効用と呼ぶ。制約条件式は経路選択確率の規格化条件に相当する。

式(1)で定義される PUM の解釈を確認しよう。式(1)の摂動効用 $U(\mathbf{P})$ の第一項 $\mathbf{V}^t \mathbf{P}$ は、効用確定項ベクトルと選択確率ベクトルの内積であり、効用確定項の値に基づく期待効用に相当する。そのため、仮に摂動項 $F(\mathbf{P})$ が存在しない場合には、式(1)の最大化問題は、効用確定項が最大の経路を確率1で確定的に選択することになる(最短経路探索、DUE に相当する)。よって、式(1)の PUM は、効用確定項に基づく期待効用最大化に対して、摂動項 $F(\mathbf{P})$ が文字通り摂動として加わることで、効用確定項が最大の経路の確定的な選択から離れ、様々な確率的選択を表現することが出来るモデルになっている。

(2) 摂動項へのエントロピー項の設定

式(1)で定義される PUM において、摂動項をいかに設定するかということが問題となる。Fosgerau ら¹⁸⁾と異なり、選択肢列挙を行って経路ベースで PUM を定義したため、摂動項は情報理論におけるエントロピー項に他ならず、ARUM との対応付け¹⁶⁾が可能になる。

a) softmax 関数 (MNL モデル)

いま、PUM モデルにおいて、摂動項 $F(\mathbf{P})$ を Shannon エントロピー $H^S(\mathbf{P})$ とする、すなわち、

$$F(\mathbf{P}) = H^S(\mathbf{P}) \equiv - \sum_{j \in C} P_j \log P_j$$

とすると、MNL モデルの選択確率式、つまりは softmax 関数が導出される。これは摂動項を Shannon エントロピーとして、式(1)の最適化問題の KKT 条件を考えることで確認できる。

b) sparsimax 関数

MNL モデルが選択確率ゼロを表現できないことは、交通の分野だけでなく、情報科学、特に自然言語処理の分野においても問題視されてきた。情報科学の分野では、効用確定項ベクトル \mathbf{V} から選択確率ベクトル \mathbf{P} を計算する関数を活性化関数と呼ぶが、選択確率ゼロを表現できるような、スパースな出力が可能な活性化関数が検討さ

れてきている．中でも，Martins ら¹⁹⁾は sparsemax 関数と呼ばれる関数を提案している． sparsemax 関数は

$$\text{sparsemax}(\mathbf{V}) \equiv \underset{\mathbf{P} \in \mathbb{R}_+^{C_1}}{\text{argmin}} \|\mathbf{P} - \mathbf{V}\|^2 \quad \text{s.t. } \mathbf{1}^T \mathbf{P} = 1$$

で定義され，選択確率ゼロを表現できることが解析的に示されている¹⁹⁾．

ここで，情報科学において，モデルの学習を改良する方法として，エントロピー正則化と呼ばれる方法論がある．活性化関数の構成で言えば，効用（スコア）確定項ベクトル \mathbf{V} に基づく期待効用（スコア）に，エントロピー項を加えた関数を目的関数に設定する学習方法である．情報科学におけるエントロピー正則化は，経済学においてはまさに PUM に相当していると言える．

Peters ら²⁰⁾は，MNL の選択確率式（softmax 関数）が Shannon エントロピーを摂動項とする PUM で書けたように， sparsemax 関数もエントロピー正則化の枠組みで導出できることを示した．実際，PUM モデルにおいて，摂動項 $F(\mathbf{P})$ を Gini エントロピー $H^G(\mathbf{P})$ とする，すなわち，

$$F(\mathbf{P}) = H^G(\mathbf{P}) \equiv \frac{1}{2} \sum_{j \in C} P_j (1 - P_j)$$

とすることで， sparsemax 関数を得られることが確認できる．このように，自然言語処理におけるスパースな活性化関数の構成は，専らエントロピー正則化の文脈で議論が行われてきている．エントロピー正則化は，経済学においてはまさに PUM に相当しており，経路選択モデルへもそのアナロジーを展開し得よう．

c) α -entmax

Peters ら²⁰⁾はさらに，摂動項を Tsallis エントロピー¹⁷⁾と呼ばれる一般化エントロピーの一種へと拡張した．Tsallis エントロピー $H_\alpha^T(\mathbf{P})$ は，Shannon エントロピー $H^S(\mathbf{P})$ 内の対数関数を， q 対数関数へと拡張（一般化）することでも導かれ，

$$H_\alpha^T(\mathbf{P}) \equiv \begin{cases} \frac{1 - \sum_{j \in C} P_j^\alpha}{\alpha(\alpha - 1)} & ; \alpha \neq 1 \\ H^S(\mathbf{P}) & ; \alpha = 1 \end{cases} \quad (2)$$

で定義される．式(2)を見ると， $\alpha \rightarrow 1$ で Shannon エントロピーに， $\alpha = 2$ で Gini エントロピーに一致することが確認できる．そのため，PUM モデルにおいて，摂動項 $F(\mathbf{P})$ を Tsallis エントロピー $H_\alpha^T(\mathbf{P})$ とすることで，softmax 関数（MNL モデル， $\alpha = 1$ ）や sparsemax 関数（ $\alpha = 2$ ）を特殊解として含んだ，より一般的なモデルを提案し得る．Peters ら²⁰⁾は，摂動項を Tsallis エントロピーとしたエントロピー正則化で得られる活性化関数を α -entmax と名付けた．本研究では，この α -entmax を用いることで，MNL モデルが抱える選択確率ゼロを表現できないという課題を克服する．本研究は，自然言語処理の分野で，エントロピー正則化の観点で発展してきた活性化関数の

スパース性に関する議論を，経路選択行動のモデル化へと展開した初めての研究と言える．なお，Nakayama and Chikaraishi²¹⁾は Tsallis エントロピーを経路選択行動へと取り込んでいるが，PUM の枠組みで定式化されておらず，ゼロ流量の表現は出来ないままとなっている．

最後に，Peters ら²⁰⁾で示されている α -entmax の諸性質に簡単に触れておく． α -entmax はパラメータ α の値によって，どの程度スパースな選択確率分布を出力するかが変化する．先述のとおり， $\alpha \rightarrow 1$ で softmax 関数に， $\alpha = 2$ で sparsemax 関数に一致し， $\alpha > 1$ で選択確率ゼロを出力し得る． α が大きいほど，出力される選択確率分布はスパースになる．選択肢が二つの例を考えた場合，二つの選択肢の効用値の差が $\pm 1/(\alpha - 1)$ の範囲を超えた場合には，一方の選択確率がゼロとなる．また，具体的な選択確率ベクトル \mathbf{P} の表式は， $\alpha = 1.5$ の場合を除いて解析的には表式を与えることはできない．そのため，選択確率ベクトル \mathbf{P} の導出にあたっては，数値的に求めることになる．解法は二つ提案されており，ソートベースの厳密解法と二分法ベースの反復数値解法がある．Github 上にはこれらのアルゴリズムが実装されたリポジトリがあり²²⁾，本研究ではそのソースコードを利用して数値計算を行っている．

(3) α SUE の定義

本研究では，MNL モデルを特殊解にもつ経路選択モデルとして， α -entmax を用いた経路ベースの PUM モデルを提案する．すなわち，式(1)で定義された経路ベースの PUM モデルで，摂動項を Tsallis エントロピー(2)とすることで， α -entmax により経路選択行動を記述する．このとき，対応する SUE として， α SUE が次のように定義される．

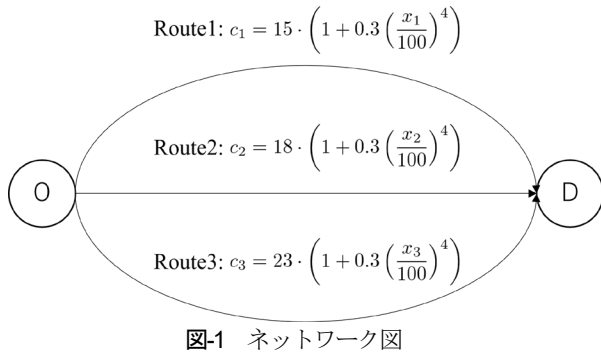
いま，OD ペア $m \in M$ に対して，需要が d_m ，経路集合が C_m であり，経路 $i \in C_m$ の流量が x_i^m ，経路選択確率が P_i^m であるとする．このとき，流量ベクトル $\mathbf{x} = (x_i^m)_{i \in C_m \times m \in M}$ が α SUE であるとは， \mathbf{x} が SUE，かつ， P_i^m が α -entmax の解である，ということである．すなわち，

$$x_i^m = d_m P_i^m \quad ; \forall i \in C_m, \forall m \in M$$

かつ，すべての OD ペア $m \in M$ について，経路選択確率ベクトル $\mathbf{P}^m = (P_i^m)_{i \in C_m}$ が，効用確定項ベクトル $\mathbf{V}^m = (V_i^m)_{i \in C_m}$ に対して，

$$\max_{\mathbf{P}^m \in \mathbb{R}_+^{C_m}} (\mathbf{V}^m)^t \mathbf{P}^m + H_\alpha^T(\mathbf{P}^m) \quad \text{s.t. } (\mathbf{1}^m)^t \mathbf{P}^m = 1$$

を満たしている，ということである．ただし， $\mathbf{1}^m$ は要素がすべて 1 で要素数 $|C_m|$ の縦ベクトルである． α -entmax が出力する選択確率分布のスパース性を鑑みれば， α SUE において実現する流量分布もスパースなものであり，配分時の流量ゼロを表現可能である．



3. α SUE の数値計算例

本章では、簡単なネットワークにおいて、実際に α SUE の交通量配分の数値計算を行い、提案手法が MNL モデルを特殊解に持ちながら選択確率ゼロ（流量ゼロ）を表現可能であることを確認する。なお、本章で扱う問題は SUE であり flow-dependent な問題である。

(1) 設定

本章で用いるネットワークの設定は図-1 の通りである。比較を容易にするため、この設定は BCM¹⁾における数値例と同一である。

交通ネットワークは単一 OD 間を結ぶ平行な 3 経路である。これら 3 経路の総需要は 200(台)とする。経路 $i \in \{1,2,3\}$ において、流量が x_i のときの所要時間 $c_i(\mathbf{x})$ は、 $i \in \{1,2,3\}$ について、

$$c_i(\mathbf{x}) = c_i(x_i) = t_{0i} \cdot \left(1 + 0.3 \cdot \left(\frac{x_i}{100}\right)^4\right) \quad (3)$$

であると仮定する。また、 $t_{01} = 15, t_{02} = 18, t_{03} = 23$ とする。各経路 i の効用 V_i は所要時間のみで決まるとし、 $V_i = -0.2c_i$ で計算されるとする。

(2) 解法

式(3)を見ると分かるように、ここで扱っている問題は、各経路の効用 V_i (所要時間 $c_i(\mathbf{x})$) がその経路の選択確率 P_i (流量 x_i) に依存する問題である。PUM の定式化(1)で言えば、両辺に選択確率 \mathbf{P} が存在する入れ子構造となっている。そのため、経路選択行動のパラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}$ を所与とされたからと言って、即座に選択確率 \mathbf{P} を導出できるわけではない。

こうした SUE に対する解法としては、入れ子構造をそのまま使い、繰り返し計算により選択確率ベクトルを収束させていく逐次平均法^{23,24)} (Method of Successive Averages; MSA) が最もシンプルな解法として挙げられる。今回の数値計算においては、MSA の考え方で、SUE における交通量を計算した。

(3) 結果

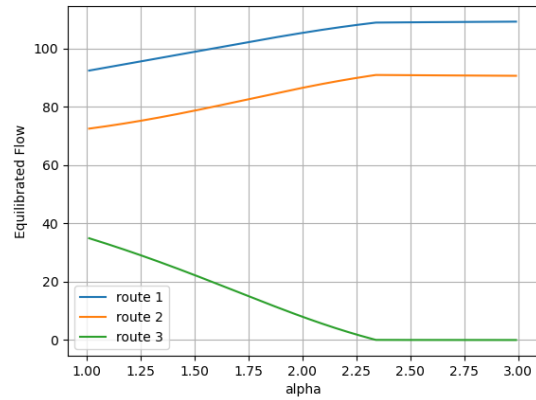


図-2 α を変化させたときの α SUE での各経路流量の変化。

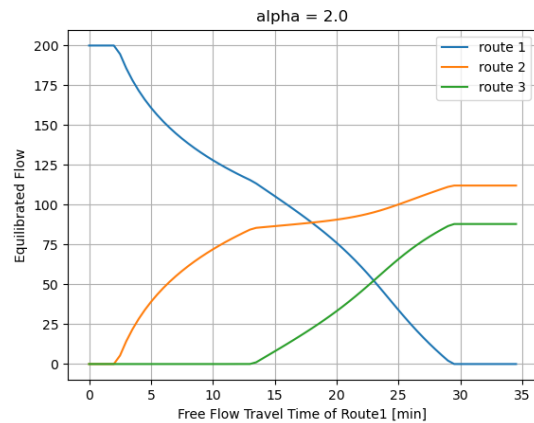


図-3 t_{01} を変化させたときの α SUE における各経路流量の変化。 $\alpha = 2.0$ で固定。

α を変化させたときの α SUE における各経路流量の変化を図-2 に示す。 α が大きくなるにつれて、所要時間が相対的に大きな経路 3 の流量が連続的に低下し、 $\alpha = 2.3$ を超えたあたりで、経路 3 の流量はゼロとなっている。このように、 α -entmax を経路選択問題へと展開することで、SUE であっても選択確率ゼロを表現できる。なお、 $\alpha = 1$ においては、MNL モデルと一致しており、実際、MNL モデルの選択確率式で計算される選択確率と一致していることが確認できる。本研究が提案する α -entmax に基づく PUM による経路選択モデルは、MNL モデルを特殊解に持ちながら、選択確率ゼロを表現できるモデルであることが確認できる。

次に、経路 1 における流量がゼロの場合の所要時間である t_{01} を変化させた際の、 α SUE における各経路流量の変化を図-3 に示す。 t_{01} が極端に小さい場合、経路 1 の所要時間が他の経路よりも大幅に短いため、経路 2 と経路 3 は選択されず、経路 1 がすべての需要を担っている。 t_{01} が大きくなるにつれ、他経路の所要時間が相対的に短くなっていき、 $t_{01} = 2$ を超えたあたりから経路 2 が、 $t_{01} = 13$ を超えたあたりから経路 3 も使われるようになり、最終的には $t_{01} = 29$ を超えたあたりで、経路 1 は流

量ゼロとなる。αSUE においては、これらの一連の流量の変化を連続的に表現可能となっている。

4. 線形回帰によるパラメータ推定法

本章では、PUM におけるパラメータ推定法を述べる。選択肢*i*の効用確定項 V_i が $V_i(\mathbf{X}_i; \boldsymbol{\beta})$ のように、説明変数ベクトル \mathbf{X}_i とパラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}$ で計算されるとき、パラメータ推定とは、観測された経路選択確率ベクトル \mathbf{P} を基に、パラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}$ を推定する問題である。ここでは一般的な経路選択モデルのパラメータ推定同様、flow-independent な状況を考える。すなわち、効用確定項ベクトル \mathbf{V} は選択確率ベクトル \mathbf{P} には依存しない。なお、ここでの議論は摂動項の具体的な表式によらず成立する。

いま、式(1)の最適化問題を解いて選択確率ベクトル \mathbf{P} を求めることを考える。Lagrange 関数は

$$L(\mathbf{P}, \lambda) = \mathbf{V}^t \mathbf{P} + F(\mathbf{P}) - \lambda(\mathbf{1}^t \mathbf{P} - 1)$$

となる。ただし、 λ は Lagrange 乗数である。First Order Condition は、最適解 $(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\lambda})$ に対して、

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{V} + \nabla F(\hat{\mathbf{P}}) - \hat{\lambda} \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^t \hat{\mathbf{P}} = 1 \end{cases} \quad (4)$$

となる。ただし、 $\mathbf{0}$ は要素数 $|\mathcal{C}|$ の縦零ベクトルである。式(4)の第一式について、任意の経路集合 $\tilde{\mathcal{C}}$ を抽出し、対応する各成分 $i \in \tilde{\mathcal{C}}$ について足し合わせると

$$\sum_{i \in \tilde{\mathcal{C}}} (V_i + \nabla_i F(\hat{\mathbf{P}})) = N \hat{\lambda}$$

となる。ただし、 $\nabla_i F(\hat{\mathbf{P}})$ は $\nabla F(\hat{\mathbf{P}})$ の*i*成分、 N は $\tilde{\mathcal{C}}$ の要素数 $|\tilde{\mathcal{C}}|$ である。ここから $\hat{\lambda}$ の表式を求め、式(4)の第一式の $\hat{\lambda}$ に代入して整理すると

$$V_i - \frac{1}{N} \sum_{k \in \tilde{\mathcal{C}}} V_k = - \left(\nabla_i F(\hat{\mathbf{P}}) - \frac{1}{N} \sum_{k \in \tilde{\mathcal{C}}} \nabla_k F(\hat{\mathbf{P}}) \right) \quad (5)$$

となる。通常、経路選択モデルにおいては、効用確定項ベクトル \mathbf{V} は、説明変数値とパラメータ値の線形和で表現される。そのため、経路*i*の説明変数値を並べた行ベクトル \mathbf{X}_i を、経路選択肢について積み上げた説明変数行列 \mathbf{X} を用いて、 $\mathbf{V} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ と表記できる。よって、式(5)は

$$\left(\mathbf{X}_i - \frac{1}{N} \sum_{k \in \tilde{\mathcal{C}}} \mathbf{X}_k \right) \hat{\boldsymbol{\beta}} = - \left(\nabla_i F(\hat{\mathbf{P}}) - \frac{1}{N} \sum_{k \in \tilde{\mathcal{C}}} \nabla_k F(\hat{\mathbf{P}}) \right) \quad (6)$$

と書き換えられる。

ゼロ流量を表現可能な BCM のパラメータ推定においては、経路選択確率を計算する際、経路集合内で効用最大となる経路を特定し、各経路の効用との比較を行うというステップが都度必要であり、計算負荷が高かった。対して、式(6)は最小二乗法によりパラメータ推定が可

能であるから、大幅に計算負荷を削減できると言える。

なお、2.2 節で挙げたような α -entmax (およびその特殊解である softmax や sparsemax) のように、 $\nabla_i F(\mathbf{P})$ が P_i のみで書ける場合、抽出する経路集合 $\tilde{\mathcal{C}}$ についての説明変数値と摂動項の微分値のみで $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を推定可能である。PUM における式(6)の回帰による推定法は、真の経路選択肢集合 \mathcal{C} を用いる必要はなく、抽出した経路集合 $\tilde{\mathcal{C}}$ のみの情報で推定が可能であり、その意味で経路全列挙不要な推定法であると言える。ただし、経路集合 $\tilde{\mathcal{C}}$ の抽出に伴うバイアスは生じるという点には注意する必要がある。なお、摂動項が Shannon エントロピーの場合、集計ロジットモデルにおける推定法と一致している。

5. 結論

本研究では、PUM に基づく、経路を選択肢集合とする経路選択モデルを提案した。中でも、摂動項に Tsallis エントロピーを採用した α -entmax は、MNL モデルを特殊解に持ちながら、選択確率ゼロを表現することが出来る。この点に着目し、 α -entmax を PUM による経路選択モデルへと展開して、対応する α SUE を定義した。結果として、 α SUE が流量ゼロを表現し得ることを確認し、パラメータ推定が線形回帰となることを示した。MNL モデルにおいて、選択確率ゼロを表現できないという課題に対しては、BCM が提案されているが、効用の具体的な値を用いずに選択確率ゼロを表現できる点、また、パラメータ推定が単純な線形回帰となり、計算負荷を大幅に削減し得るという点が優れている。

PUM で経路選択行動を定式化することで、今後の様々な発展が望まれる。PUM は任意の ARUM を表現できる¹⁰ため、選択肢間やサンプル間の相関を考慮したモデル、あるいは、その他の行動特性を表現可能なモデルも構成することが出来るだろう。また、特筆すべき事項として、今回は経路選択肢を列挙する形で PUM を定式化したのが、例えば Tsallis エントロピーのような摂動項をリンクベースに分解することが出来れば、真の意味でのリンクベースでの PUM の定式化が可能になる。これが可能になれば、経路列挙不要なモデルを構成することが出来、高速な推定が可能であることと合わせて、パラメータ推定・交通量配分において非常に有用なモデルを構築できよう。

参考文献

- (1) Daganzo, C. F.; Sheffi, Y. On Stochastic Models of Traffic Assignment. *Transportation Science* **1977**, *11* (3), 253–274.
- (2) Wardrop, J. G. Road Paper. Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* **1952**, *1* (3),

- 325–362.
- (3) McFadden, D. Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior. In *Frontiers in econometrics*; Academic Press: New York, 1973; pp 105–142.
 - (4) Papinski, D.; Scott, D. M.; Doherty, S. T. Exploring the Route Choice Decision-Making Process: A Comparison of Planned and Observed Routes Obtained Using Person-Based GPS. *Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour* **2009**, *12* (4), 347–358.
 - (5) Kaplan, S.; Prato, C. G. Closing the Gap between Behavior and Models in Route Choice: The Role of Spatiotemporal Constraints and Latent Traits in Choice Set Formation. *Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour* **2012**, *15* (1), 9–24.
 - (6) Bovy, P. H. L. On Modelling Route Choice Sets in Transportation Networks: A Synthesis. *Transport Reviews* **2009**, *29* (1), 43–68.
 - (7) Gao, S.; Frejinger, E.; Ben-Akiva, M. Cognitive Cost in Route Choice with Real-Time Information: An Exploratory Analysis. *Procedia - Social and Behavioral Sciences* **2011**, *17*, 136–149.
 - (8) Jan, O.; Horowitz, A. J.; Peng, Z.-R. Using Global Positioning System Data to Understand Variations in Path Choice. *Transportation Research Record* **2000**, *1725* (1), 37–44.
 - (9) Nielsen, O. A. Behavioral Responses to Road Pricing Schemes: Description of the Danish AKTA Experiment. *Journal of Intelligent Transportation Systems* **2004**, *8* (4), 233–251.
 - (10) Morikawa, T.; Miwa, T.; Kurauchi, S.; Yamamoto, T.; Kobayashi, K. Driver's Route Choice Behavior and Its Implications on Network Simulation and Traffic Assignment. In *Simulation Approaches in Transportation Analysis: Recent Advances and Challenges*; Kitamura, R., Kuwahara, M., Eds.; Operations Research/Computer Science Interfaces Series; Springer US: Boston, MA, 2005; pp 341–369.
 - (11) Watling, D. P.; Rasmussen, T. K.; Prato, C. G.; Nielsen, O. A. Stochastic User Equilibrium with a Bounded Choice Model. *Transportation Research Part B: Methodological* **2018**, *114*, 254–280.
 - (12) Duncan, L. C.; Watling, D. P.; Connors, R. D.; Rasmussen, T. K.; Nielsen, O. A. A Bounded Path Size Route Choice Model Excluding Unrealistic Routes: Formulation and Estimation from a Large-Scale GPS Study. *Transportmetrica A: Transport Science* **2022**, *18* (3), 435–493.
 - (13) Mahmassani, H. S.; Chang, G.-L. On Boundedly Rational User Equilibrium in Transportation Systems. *Transportation Science* **1987**, *21* (2), 89–99.
 - (14) Guo, X.; Liu, H. X. Bounded Rationality and Irreversible Network Change. *Transportation Research Part B: Methodological* **2011**, *45* (10), 1606–1618.
 - (15) Frejinger, E.; Bierlaire, M.; Ben-Akiva, M. Sampling of Alternatives for Route Choice Modeling. *Transportation Research Part B: Methodological* **2009**, *43* (10), 984–994.
 - (16) Hofbauer, J.; Sandholm, W. H. On the Global Convergence of Stochastic Fictitious Play. *Econometrica* **2002**, *70* (6), 2265–2294.
 - (17) Tsallis, C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics. *J Stat Phys* **1988**, *52* (1), 479–487.
 - (18) Fosgerau, M.; Paulsen, M.; Rasmussen, T. K. A Perturbed Utility Route Choice Model. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* **2022**, *136*, 103514.
 - (19) Martins, A.; Astudillo, R. From Softmax to Sparsemax: A Sparse Model of Attention and Multi-Label Classification. In *International conference on machine learning*; PMLR, 2016; pp 1614–1623.
 - (20) Peters, B.; Niculae, V.; Martins, A. F. T. Sparse Sequence-to-Sequence Models. arXiv June 12, 2019.
 - (21) Nakayama, S.; Chikaraishi, M. A Unified Closed-Form Expression of Logit and Weibit and Its Application to a Transportation Network Equilibrium Assignment. *Transportation Research Part B: Methodological* **2015**, *7*.
 - (22) Entmax, 2023. <https://github.com/deep-spin/entmax> (accessed 2023-01-18).
 - (23) Sheffi, Y.; Powell, W. A Comparison of Stochastic and Deterministic Traffic Assignment over Congested Networks. *Transportation Research Part B: Methodological* **1981**, *15* (1), 53–64.
 - (24) Powell, W. B.; Sheffi, Y. The Convergence of Equilibrium Algorithms with Predetermined Step Sizes. *Transportation Science* **1982**, *16* (1), 45–55.

(Received ?)
(Accepted ?)

A PERTURBED UTILITY ROUTE CHOICE MODEL ALLOWING ZERO-FLOW

Aoi WATANABE and Ken HIDAKA

Stochastic User Equilibrium (SUE) has a drawback that it assigns positive flow to any route in the choice set, no matter how long it is. In this study, we formulated a route choice model by perturbed utility maximization employing Tsallis entropy as a perturbation term, and defined the corresponding SUE as α SUE. Perturbed utility is defined as the sum of an expected utility and a perturbation term that accounts for the probability of choosing each alternative. Previous models that could express zero-flow were ad-hoc in their parameter settings and computationally demanding. Our proposed model not only considers zero-flow but also includes the logit model as a special case and can be estimated through linear regression, making it much more efficient.