

劣化の時間依存性を考慮した 離散ワイブル分布による劣化予測手法の構築

四方滉也¹ 貝戸清之²

¹学生会員 大阪大学大学院 工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail: k.shikata@civil.eng.osaka-u.ac.jp

²正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

社会基盤施設のアセットマネジメントの重要性の高まりに伴い、施設の劣化状態を離散的に評価した指標である健全度を対象とした劣化予測モデルの開発が進んでいる。供用開始時点からの経過時間を考慮可能な劣化予測モデルとして多段階ワイブル劣化ハザードモデルが開発されている。一方、同モデルは推計時に実施する多重積分に起因し計算時間が膨大になるという課題が存在した。そのため、これまで乱数の生成法の改良により計算時間の短縮が行った推計手法が開発されている。しかし、推計を行う上での専門性が高く、多様な分析者の存在を考えた場合必ずしも容易であるとは言えない。そのため、本研究では、離散確率分布を用いて劣化過程を表現することにより推計時に数値積分を用いない劣化の時間依存性を考慮可能な劣化予測モデルの構築を行う。さらに、提案手法の有用性を実際の目視点検により得られたデータを用いて検証する。

Key Words : *asset management, deterioration prediction, Bayesian estimation*

1. はじめに

高度経済成長期に国主導の下、日本の社会基盤施設は急速に整備が進められた。それから、およそ半世紀が経過し、各地で施設の劣化が顕在化している。しかし生産年齢人口の減少や、国の財政状況の悪化などの近年の国内情勢を鑑みると、社会基盤施設の維持管理・更新に対する支出の増大は避けなければならない。そのため、国はこれまで以上に戦略的な維持管理に取り組む姿勢を明確にしておき、維持管理・更新等に係るトータルコストの縮減を図るため、平成 25 年にはインフラ長寿命化基本計画の策定に至っている¹⁾。トータルコストの縮減を実現するためには、将来時点における施設の状況を把握することが重要な要素となる。しかし、施設の劣化は環境条件や利用状況などの複合的な要素に依存するため、将来時点の施設の劣化状況を確定的に把握することは困難である。このような場合、施設の点検データを集積し、統計的に劣化予測を行う手法が有効となる。

統計的劣化予測手法として、施設の劣化状況の離散的に評価した指標である健全度を対象とする手法が数多く開発されてきた。たとえば、津田等²⁾は施設の健全度間の推移を瞬間的な劣化確率であるハザードを用いて表現した。その際、ハザードが時点に依らず一定であるとしてハザードモデルを構築した。ハザードが一定である場合、施設の劣化過程は無記憶性を持つため、

前後 2 回の目視点検結果と、その点検間隔のみを用いて劣化予測を行うことができる。また、算出されるマルコフ推移確率により、容易に健全度寿命を算出できる。ハザードが一定であることは実際の劣化過程との乖離があるものの得られる利点が多いため劣化予測手法として多くの適用事例がある。一方、青木等³⁾はハザードの経時変化を考慮し、ハザードモデルの構築を行った。この場合、施設の劣化過程の時間依存性を考慮できるため、実際の劣化過程との融和性は高いといえる。しかし、このモデルの推定にあたっては、健全度情報や点検間隔に加え、供用開始時点の情報が必要となる。また、推移確率を解析的に算出することが困難であり、計算にあたって多重積分を行う必要があり、計算時間が数か月単位と膨大になる場合も存在することから、適用事例の蓄積が十分とはいえない。そのため、時間依存性を考慮しつつも、推定手法が比較的簡便で計算時間を短縮可能であるモデルが開発されれば、劣化予測の際の選択肢の一つとなると考えられる。

以上の問題意識の下、本研究では劣化過程の時間依存性を考慮することが可能な劣化予測モデルの構築を行う。具体的には各健全度の寿命を離散確率分布を用いて表現する。このとき、推移確率は総和計算により算出することができる。また、施設の劣化は単位時間の経過毎における劣化の生起の有無として表現されるため、概念的な理解が容易になるといえる。

以下、**2.**で本研究の基本的な考え方を述べ、**3.**で離

散時間モデルについて述べ、更に離散確率分布を用いて劣化予測モデルを構築する。4. で尤度関数を算出し、モデルの推定方法について述べる。

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 劣化の時間依存性

統計的劣化予測では施設の健全度寿命を確率変数として扱う。これまで、劣化過程をハザードを用いて表現するモデルが多数開発されている^{2),3)}。社会基盤施設においてハザードは、ある時点まで健全度を維持した施設が、次の時点において健全度の推移が生起するという条件付き確率として定義される。ハザードとして与える関数により、様々な劣化過程を表現することが可能となる。代表的な劣化予測モデルであるマルコフ劣化ハザードモデルでは、ハザードを定数として与えている。ハザードが常に一定値を取る場合、劣化過程は時間依存性を持たない。しかし、ハザードを定数として与えた場合、寿命の推定に必要な時間情報が点検間隔のみであることや、推移確率が解析的に表示できるため推計時の扱いが容易になるなど、様々な利点を獲得できる。また、マルコフ劣化ハザードモデルを基に拡張させたモデルが多数開発されている⁵⁾⁻⁸⁾。

一方で、多段階ワイブル劣化ハザードモデルでは、ハザードとしてワイブルハザード関数を与える。ハザードは経過時間のべき乗であるため、劣化が生起する確率は時間の経過に伴い変化する。そのため、より柔軟に劣化過程を表現することができる。しかし、ワイブルハザード関数を用いた場合、寿命の推定の際に点検間隔に加え、供用開始時点に関する情報が必要となる。また、推移確率が解析的に表示することが困難であり、推移確率の算出のためには多重積分を行う必要がある^{9),10)}。そのため、ハザードを定数とした場合と比較して、分析の際に多くの情報が必要になり、分析者に求められるスキルが高くなると考えられ、推計を実施する上での障壁が高くなるといえる。

劣化予測を行う場合、管理下の施設の劣化過程や、獲得できるデータの内容、分析環境などを踏まえて、劣化予測モデルを選択する必要がある。そのため、劣化速度の経時変化を考慮可能であり、比較的推定が容易な劣化予測モデルを構築することは、統計的劣化予測手法の利用の拡大に寄与するといえる。本研究では時間依存性を考慮しつつ、多段階ワイブル劣化ハザードモデルにおいて必要であった多重積分を必要としない劣化予測モデルの構築を行う。具体的には、施設の劣化過程を離散時間軸上で定義し、寿命の確率変数を離散確率分布に従うものとし、推移確率の算出が容易、かつ概念的な理解が容易なモデルの構築を試みる。また、

その際、施設の劣化過程の時間依存性が考慮可能であることを示す。

(2) モデル化の前提条件

社会基盤施設は材料や構造、周辺環境などの複合的な要因に影響を受け劣化が進展する。そのため、将来時点における施設の状態を確定的に予測することは困難である。いま、供用開始からの経過時点を利用し、施設の劣化状態を時間依存的な確率により表すことを考える。

まず、施設の点検が1回のみ実施されている場合を考える。供用が開始された時点をと τ_0 とする。時刻 t における施設の健全度を状態変数 $h(t) = i (i = 1, \dots, I)$ を用いて表す。時点 τ_0 から時間 s が経過した時点 $\tau (= \tau_0 + s)$ における健全度は $h(s)$ と表される。 τ_0, τ の2時点間の劣化過程は時点 τ_0 において健全度1が観測され、時点 τ において健全度 i が観測される確率として記述でき、

$$\text{Prob}[h(s) = i | h(0) = 1] = \pi_i(s) \quad (1)$$

となる。この確率を各健全度 $i (i = 1, \dots, I)$ に対して定義することにより、供用開始時点からの経過時間に依存する確率ベクトル

$$\mathbf{\Pi}(s) = \begin{pmatrix} \pi_1(s) \\ \vdots \\ \pi_I(s) \end{pmatrix} \quad (2)$$

が得られる。なお、 I は対象とする施設において最も劣化が進行している状態を表す。また、推移確率の定義より $\sum_{i=1}^I \pi_i(s) = 1$ が成立する。本研究においては、施設に対し複数回の点検が実施されている場合における推移確率の算出も行う。同様に供用開始時点をと τ_0 とする。時点 τ_0 を基準とした時間 s_A 経過後の時点 $\tau_A (= \tau_0 + s_A)$ において、健全度 $h(s_A) = i (i = 1, \dots, I)$ が観測され、さらに τ_A から時間 s_B だけ経過した時点 $\tau_B (= \tau_A + s_B)$ において、健全度 $h(s_A + s_B) = j (j = i, \dots, I)$ が観測されるという同時生起確率 $\pi_{ij}(s_A, s_B)$ は

$$\pi_{ij}(s_A, s_B) = \text{Prob}[h(s_A) = i, h(s_A + s_B) = j] \quad (3)$$

と表すことができる。同時生起確率を生起しうる各健全度の組 $i, j (1 \leq i \leq j \leq I)$ について考えると、供用開始時点からの経過時間に依存する同時生起確率行列

$$\mathbf{\Pi}(s_A, s_B) = \begin{pmatrix} \pi_{11}(s_A, s_B) & \dots & \pi_{1I}(s_A, s_B) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \pi_{II}(s_A, s_B) \end{pmatrix} \quad (4)$$

が得られる。健全度は補修等が実施されない限り自然に回復することはないため、同時生起確率行列は上三角行列となる。推移確率の定義より各行について $\sum_{j=i}^I \pi_{ij}(s_A, s_B) = 1$ が成立する。また、 I は最も劣

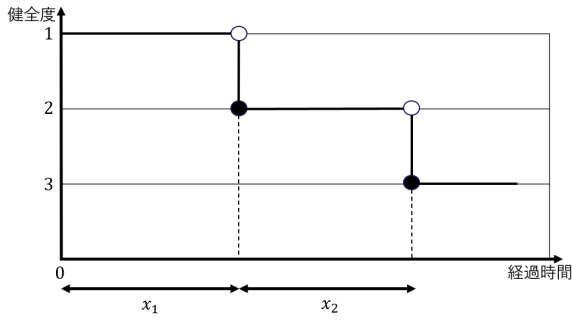


図-1-a 連続時間モデル

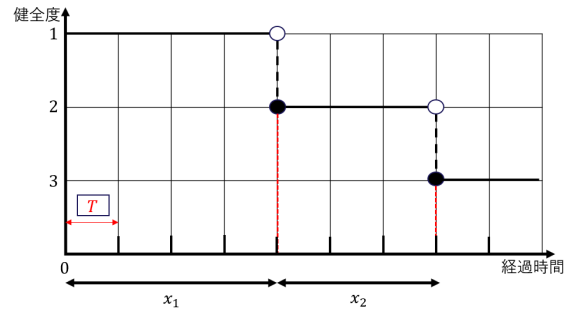


図-1-b 離散時間モデル

図-1 連続時間モデルと離散時間モデルの概念図

化が進行した状態であり常に $\pi_{II}(s_A, s_B) = 1$ が成立する。

(3) 連続時間モデルと離散時間モデル

時間軸の観点から、劣化予測モデルは健全度寿命を時間軸上の連続値として扱うモデル（以下、連続時間モデル）と、時間軸上の離散値として扱うモデル（以下、離散時間モデル）に大別できる。本研究では、健全度推移は時間軸上の離散点においてのみ許容されるため、以下では離散時間モデルについて取り上げる。連続時間モデルについては文献²⁾を参照されたい。離散時間モデルでは健全度 $i (i = 1, \dots, I)$ の寿命を離散確率変数として扱う。健全度はその値が大きいほど施設の劣化が進行していることを表し、 $i = I$ は施設の劣化が最も進行している状態であることを表す。また、施設の供用が開始された時点の劣化状態を健全度 1 とする。健全度 i の健全度寿命を x_i として離散確率変数 X_i を導入する。図-1 に両モデルの概念図を示す。図-1 では、施設の健全度が $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ と劣化が進行していく過程を示している。このとき、各健全度寿命は x_1, x_2 であり、これは確率変数 X_1, X_2 の実現値である。なお、同図では微小時間（連続時間モデルの場合）、単位時間（離散時間モデルの場合）における劣化が隣接健全度のみである場合を想定している。

3. 離散時間モデルの構築

(1) 離散確率分布による劣化過程の記述

ハザードとしてワイブルハザードを用いた場合、健全度寿命はワイブル分布に従う。本研究ではワイブル分布に対応する離散確率分布を用いて健全度寿命を表現する。 Y を形状パラメータ m' 、尺度パラメータ η' のワイブル分布に従う確率変数とする。ワイブル分布の

確率密度関数を $d(y)$ とする。 $d(y)$ は次式で与えられる。

$$d(y) = \frac{m'}{y} \left(\frac{y}{\eta'} \right)^{m'} \exp \left\{ - \left(\frac{y}{\eta'} \right)^{m'} \right\} \quad (5)$$

また、生存関数 $\tilde{D}(y)$ は、

$$\tilde{D}(y) = \exp \left\{ - \left(\frac{y}{\eta'} \right)^{m'} \right\} \quad (6)$$

と表される。 y が $y = \zeta T (\zeta \in \mathcal{N})$ と単位時間 T の自然数倍として表されるとすると、式 (6) は、

$$\tilde{D}(\zeta) = \exp \left\{ - \left(\frac{\zeta T}{\eta'} \right)^{m'} \right\} \quad (7)$$

と書き換えられる。 X を確率変数とする。また、 $r(x)$ を確率質量関数とする。 $r(x) = \text{Prob}(X = x)$ を $\tilde{D}(\zeta - 1) - \tilde{D}(\zeta)$ として定義すると、

$$\begin{aligned} r(x) &= \tilde{D}(\zeta - 1) - \tilde{D}(\zeta) \\ &= \exp \left\{ - \left(\frac{\zeta T - T}{\eta'} \right)^{m'} \right\} - \exp \left\{ - \left(\frac{\zeta T}{\eta'} \right)^{m'} \right\} \\ &= \exp(-\theta(\zeta T - T)^m) - \exp(-\theta(\zeta T)^m) \end{aligned} \quad (8)$$

となる。なお、 $\theta = (1/\eta')^{m'}$ である。 $m = m', \eta = \eta'$ と表すと、 m, η はそれぞれ $r(x)$ の形状パラメータ、尺度パラメータを表す。累積分布関数を $R(x)$ とすると、 $R(x)$ は、

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{t=1}^{\zeta} r(t) \\ &= 1 - \exp \{ (-\theta(\zeta T)^m) \} \end{aligned} \quad (9)$$

となる。また、このとき $r(x), R(x)$ は離散ワイブル分布¹¹⁾の確率質量関数、分布関数にそれぞれ一致する。生存関数を $S(x)$ とすると $S(x)$ は、

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 - R(x) \\ &= 1 - [1 - \exp(-\theta(\zeta T)^m)] \\ &= \exp \{ -\theta(\zeta T)^m \} \end{aligned} \quad (10)$$

と表される。

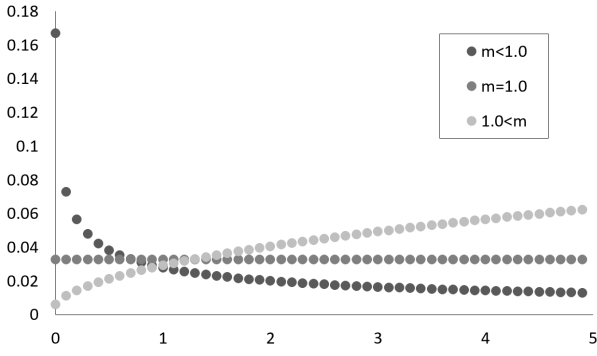


図-2 離散ワイブル分布のハザード

(2) 離散ワイブル分布におけるハザード

多段階ワイブル劣化ハザードモデルでは、ハザードとしてワイブルハザード関数を与える。また、ハザードの各パラメータを変化させることにより劣化の時間依存性を表現できる。本節では、健全度寿命が従う分布として、離散ワイブル分布を用いる場合でも同様に時間依存的な劣化過程の表現が可能であることを示す。ある時点 $(\zeta - 1)T$ まで健全度を維持していた施設が、時点 ζT において健全度が推移するという条件付き確率を表す離散ワイブル分布のハザードは次式で表される。

$$\lambda(\zeta T) = \frac{r(\zeta T)}{S(\zeta T - 1)} = 1 - \exp[\theta\{(\zeta - 1)T\}^m - \theta\{\zeta T\}^m] \quad (11)$$

形状パラメータ m 、及び尺度パラメータ η を変化させた場合のハザード関数を図-2 に示す。 $m < 1$ のときハザードは初期時点に最大値をとり、以降単調減少する。このとき施設の劣化過程に初期不整が生じやすいことを表す。 $m = 1$ のときハザードは一定値を示し、離散ワイブル分布は幾何分布に一致する。また、 $m > 1$ のときハザード関数は単調増加する。このとき、施設が時間経過に伴い劣化が進行しやすくなることを表す。このように離散ワイブル分布を用いた場合でもハザード関数の形状パラメータ m 、尺度パラメータ η を変化させることにより時間依存的な劣化過程を表現できることが分かる。

(3) 初期状態からの推移確率

目視点検が1回実施されている場合を考える。このとき、供用開始時点 τ_0 、および τ_0 における健全度 i_0 ($i_0 = 1$)、目視点検の実施時点 τ 、および τ における健全度 i がデータとして獲得される。時点 τ において健全度 i が観測される状態推移確率を $\pi_i(s)$ と表す。ただし $s = \tau - \tau_0$ である。

a) $i = 1$ の場合

目視点検が実施され、劣化状態が健全度 1 と評価された場合を考える。この事象が観測されるためには、時

点 τ_0 に施設の供用が開始され、1 回目の目視点検が実施される時点 τ まで、初期健全度 $i = 1$ を維持すればよい。つまり、推移確率 $\pi_1(s)$ は、

$$\pi_1(s) = \tilde{F}_1(s) \quad (12)$$

により算出される。

b) $i = 2$ の場合

目視点検が実施され、劣化状態が健全度 2 と評価された場合を考える。簡単のため、健全度推移 $1 \rightarrow 2$ が生じた時点 τ_1 が観測されているとする。この健全度推移が観測されるためには、時点 τ_0 に施設の供用が開始され、時点 τ_1 まで期間 $\tilde{\zeta}_1 (= \tau_1 - \tau_0)$ にわたって健全度 1 が継続した後、時点 τ_1 で健全度推移 $1 \rightarrow 2$ が生じ、以降、時点 τ まで健全度 2 が継続すればよい。このとき、状態推移確率 $\pi_2(s)$ は、

$$\pi_2(s) = f_1(\tilde{\zeta}_1)\tilde{F}_2(s - \tilde{\zeta}_1) \quad (13)$$

により算出される。しかし、健全度推移 $1 \rightarrow 2$ が生じた時点 τ_1 を実際に観測することは困難であり、 ζ_1 は、

$$1 \leq \zeta_1 \leq s \quad (14)$$

の範囲で任意の整数値を取る。よって、推移確率 $\pi_2(s)$ は、

$$\pi_2(s) = \sum_{\zeta_1=1}^s f_1(\zeta_1)\tilde{F}_2(s - \zeta_1) \quad (15)$$

により算出される。

c) $3 \leq i \leq I$ の場合

目視点検が実施され、初期健全度から 2 段階以上の健全度推移が観測された場合を考える。各健全度推移が生じた時点 $\tau_1, \dots, \tau_{i-1}$ が既知であるとする。このとき、時点 τ において $1 \rightarrow i$ が観測されるためには時点 τ_0 に施設の供用が開始され、時点 τ_1 まで期間 $\tilde{\zeta}_1 (= \tau_1 - \tau_0)$ にわたって継続し、 τ_1 で健全度推移 $1 \rightarrow 2$ が生じ、さらに時点 $\tau_2 (= \tau_1 + \tilde{\zeta}_2)$ まで健全度 2 が継続した後、 τ_2 において健全度推移 $2 \rightarrow 3$ が生じ、以降同様に繰り返す、時点 $\tau_{i-1} (= \tau_{i-2} + \tilde{\zeta}_{i-1})$ に健全度推移 $i-1 \rightarrow i$ が生じた後、時点 τ まで健全度 i が継続すればよい。このとき状態推移確率 $\pi_i(s)$ は、

$$\pi_i(s) = f_1(\tilde{\zeta}_1)f_2(\tilde{\zeta}_2)\cdots f_{i-1}(\tilde{\zeta}_{i-1})\tilde{F}_i\left(s - \sum_{m=1}^{i-1} \tilde{\zeta}_m\right) \quad (16)$$

と算出される。しかし、実際は各健全度の継続時間 ζ を観測することは困難であり、各健全度の継続時間 ζ_i は

$$\sum_{l=1}^{i-1} \zeta_l \leq s \quad (17)$$

を満たす範囲で任意の自然数を取る．よって，状態推移確率 $\pi_i(s)$ は，

$$\pi_i(s) = \sum_{\zeta_1=1}^{s-(i-2)} \sum_{\zeta_2=1}^{s-\zeta_1-(i-3)} \cdots \sum_{\zeta_{i-1}=1}^{s-\sum_{m'=1}^{i-2} \zeta_{m'}} f_1(\zeta_1) f_2(\zeta_2) \cdots f_{i-1}(\zeta_{i-1}) \tilde{F}_i \left(s - \sum_{m=1}^{i-1} \zeta_m \right) \quad (18)$$

となる．

(4) 目視点検が複数回実施されている場合

施設に対して目視点検が複数回実施されている場合を考える．供用開始時点を τ_0 とする． τ_0 を基準とした 2 時点 τ_A, τ_B ($\tau_0 < \tau_A < \tau_B$) において目視点検が実施され，それぞれ健全度 i, j ($1 \leq i \leq j \leq I$) が観測されたとする．この健全度推移が観測されるためには，供用開始後の時点 τ_{i-1} に健全度推移 $i-1 \rightarrow i$ が生じた後，期間 y_i にわたって健全度 i が継続し， $\tau_A (= \tau_{i-1} + y_i)$ における 1 回目の目視点検により健全度 i が観測され，以降 $\tau_i (= \tau_A + z_i)$ まで，健全度 i が継続した後， τ_i で健全度推移 $i \rightarrow i+1$ が生起し，さらに，時点 τ_{j-1} において健全度推移 $j-1 \rightarrow j$ が生起し，以降 τ_B まで健全度 j を維持，そして τ_B における 2 回目の目視点検により健全度 j が観測される必要がある．

簡単のため，各健全度推移が生起した時点 $\tau_1, \dots, \tau_{j-1}$ が既知であるとする．また，各健全度の継続時間を $\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_{j-1}$ と表す．1 回目の点検が実施された時点 τ_A が τ_{i-1} から \tilde{y}_i 経過した時点であるとする，時点 τ_A に健全度 i ，時点 τ_B に健全度 j が観測される確率は，時点 τ_A において健全度 i が継続しているという条件の下，時点 τ_B に健全度 j が観測されるという条件付き確率質量として与えられる．確率質量を $g_{ij}(s_B, \tilde{\zeta}_i, \tilde{\zeta}_{i+1}, \dots, \tilde{\zeta}_{j-1} | \tilde{y}_i)$ とすると，

$$g_{ij}(s_B, \tilde{\zeta}_i, \tilde{\zeta}_{i+1}, \dots, \tilde{\zeta}_{j-1} | \tilde{y}_i) = \frac{f_i(\tilde{y}_i + \tilde{z}_i)}{\tilde{F}_i(\tilde{y}_i)} \prod_{m'=i+1}^{j-1} f_m(\tilde{\zeta}_{m'}) \tilde{F}_j(s_B - \tilde{z}_i - \sum_{m=i+1}^{j-1} \tilde{\zeta}_m) \quad (19)$$

と表される．しかし，実際に各健全度推移が生起した時点は不観測であり $z_i, \zeta_{i+1}, \dots, \zeta_{j-1}$ は，それぞれ， $z_i (\geq 1), \zeta_{i+1} (\geq 1), \dots, \zeta_{j-1} (\geq 1)$ かつ， $z_i + \zeta_{i+1} + \dots + \zeta_{j-1} \leq s_B$ を満たす範囲で任意の整数値を取る．これより \tilde{y}_i のみが既知であるとの仮定の下，時点 τ_A で健全度 i および，時点 τ_B で健全度 j が観測される条件付き確率質量 $\kappa_{ij}(s_B, z_i, \zeta_{i+1}, \dots, \zeta_{j-1} | \tilde{y}_i)$ は，次式で与え

られる．

$$\begin{aligned} \kappa_{ij}(s_B, z_i, \zeta_{i+1}, \dots, \zeta_{j-1} | \tilde{y}_i) &= \sum_{z_i=1}^{s_B-(j-i+1)} \sum_{\zeta_{i+1}=1}^{s_B-z_i-(j-i+1)} \cdots \sum_{\zeta_{j-1}=1}^{s_B-z_i-\sum_{m'=i+1}^{j-2} \zeta_{m'}} \\ &g_{ij}(s_B, \zeta_i, \zeta_{i+1}, \dots, \zeta_{j-1} | \tilde{y}_i) \end{aligned} \quad (20)$$

また，時点 τ_A において健全度 i が観測される確率質量 $\xi_i(s_A, \tilde{y}_i)$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \xi_i(s_A, \tilde{y}_i) &= \left\{ \sum_{\zeta_1=1}^{s_A-\tilde{y}_i} \sum_{\zeta_2=1}^{s_A-\tilde{y}_i-\zeta_1} \cdots \sum_{\zeta_{i-2}=1}^{s_A-\tilde{y}_i-\sum_{m'=1}^{i-3} \zeta_{m'}} \prod_{m=1}^{i-1} f_m(\zeta_m) \right\} \\ &\cdot \tilde{F}_i(\tilde{y}_i) \end{aligned} \quad (21)$$

ただし， $\zeta_{j-1} = s_A - \tilde{y}_i - \sum_{m'=i+1}^{j-2} \zeta_{m'}$ である．これまで式 (20) と式 (21) では， y_i の値を既知としてきた．しかし実際は， y_i は $0 \leq y_i \leq s_A - (i-1)$ の範囲で任意の整数値を取る．よって，2 時点 s_A, s_B において，それぞれ健全度 i, j が観測される同時生起確率 $\pi_{ij}(s_A, s_B)$ は，

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(s_A, s_B) &= \sum_{y_i=0}^{s_A-(i-1)} \xi_i(s_A, y_i) \kappa_{ij}(s_B, z_i, \zeta_{i+1}, \dots, \zeta_{j-1} | y_i) \\ &= \sum_{y_i=0}^{s_A-(i-1)} \sum_{\zeta_1=1}^{s_A-y_i} \sum_{\zeta_2=1}^{s_A-y_i-\zeta_1} \cdots \\ &\sum_{\zeta_{i-2}=1}^{s_A-y_i-\sum_{m'=1}^{i-3} \zeta_{m'}} \sum_{z_i=1}^{s_B-(j-i+1)} \sum_{\zeta_{i+1}=1}^{s_B-z_i-(j-i)} \cdots \\ &\sum_{\zeta_{j-1}=1}^{s_B-z_i-\sum_{n=i+1}^{j-2} \zeta_n} \prod_{m=1}^{i-1} f_m(\zeta_m) f_i(y_i + z_i) \\ &\cdot \prod_{l=i+1}^{j-1} f_l(\zeta_l) \tilde{F}_j(s_B - z_i - \sum_{l'=i+1}^{j-1} \zeta_{l'}) \end{aligned} \quad (22)$$

と表すことができる．

(5) 健全度寿命の算出

いま，社会基盤施設の劣化過程が，本研究で提案したモデルに従うとする．このとき，施設が健全度 i を維持する期間の期待値 $RMD(i)$ は，

$$RMD(i) = \sum_{x_i=1}^{\infty} x_i f_i(x_i) \quad (23)$$

と算出することができる．ただし本研究で構築したモデルでは，初期時点からある健全度 i に到達するまでの期間長は，一般に各健全度を維持する期間の和に一致しない．つまり，ある健全度 i に到達するまでの期間長の期待値を $RL(i)$ とした場合， $RL(i) = \sum_{m=1}^i RMD(m)$

とはならない。\$RL(i)\$ は、

$$RL(i) = \sum_{t=i-1}^{\infty} \sum_{\zeta_1=1}^{t-(i-2)} \cdots \sum_{\zeta_{i-2}=1}^{t-\sum_{m=1}^{i-2} \zeta_m-1} t \prod_{m=1}^{i-2} f_m(\zeta_m) f_{i-1}(t - \sum_{m=1}^{i-2} \zeta_m) \quad (24)$$

で与えられる。

4. 尤度関数の算出

(1) 尤度関数の定式化

目視点検結果が \$K\$ 個得られているとする。そのうち、1 から \$k'\$ 番目までの \$k'\$ 個のデータセットが 1 回分の目視点検結果により構成されており、\$k'+1\$ から \$K\$ 番目までの \$K-k'\$ 個のデータセットが 2 回分の目視点検結果により構成されているとする。なお、本研究では 3 回以上の目視点検結果が記録されているデータセットについては 1 回目と 2 回目の目視点検結果、2 回目と 3 回目の目視点検結果のように分割を行い、2 個のデータセットとして再構成する。そのため、必ずしもデータセット数 \$K\$ が管理する施設数と一致するわけではない。

1 から \$k'\$ 番目までのデータセットは 1 回分の目視点検結果により構成されており、\$k(k=1, \dots, k')\$ 番目のデータセットには、供用開始時点 \$\tau_0^k (= 0)\$、目視点検が実施された時点 \$\tau_A^k\$、および \$\tau_A^k\$ における健全度 \$h(s_k)(s_k = \tau_A^k - \tau_0^k)\$ が記録されている。また、記録されている健全度に基づいてダミー変数ベクトル \$\delta^k (= \delta_1^k, \dots, \delta_I^k)\$ の各要素を、

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1 & h(\bar{s}^k) = i \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外の場合} \end{cases} \quad (25)$$

と与える。

\$k'+1\$ から \$K\$ 番目までのデータセットは、2 回分の目視点検結果により構成されている。\$k(k=k'+1, \dots, K)\$ 番目のデータセットには、供用開始時点 \$\tau_0^k (= 0)\$、1 回目の目視点検が実施された時点 \$\tau_A^k\$、および \$\tau_A^k\$ における健全度 \$h(s_A^k)\$ と、2 回目の目視点検が実施された時点 \$\tau_B^k\$、および \$\tau_B^k\$ における健全度 \$h(s_B^k)\$ が記録されている。なお、\$s_A^k = \tau_A^k - \tau_0^k\$、\$s_B^k = \tau_B^k - \tau_A^k\$ である。また、記録されている健全度に基づいてダミー変数ベクトル \$\delta^k (= \delta_{ij}^k (i=1, \dots, I, j=i, \dots, I))\$ の各要素を、

$$\delta_{ij}^k = \begin{cases} 1 & h(\bar{s}_A^k) = i, h(\bar{s}_B^k) = j \text{ の場合} \\ 0 & \text{それ以外の場合} \end{cases} \quad (26)$$

と与える。

本研究では、\$\theta_i\$ について \$\beta_i\$ をパラメータとして次式で与える。

$$\theta_i = \exp(\beta_i x) \quad (27)$$

\$x\$ は定数項を表す。また、健全度 \$i\$ の離散ワイブル分布の形状パラメータ \$m\$ についてパラメータ \$\alpha_i\$ を用いて次式で与える。

$$m_i = \exp(\alpha_i) \quad (28)$$

状態推移確率、同時生起確率は \$K\$ 個のデータセットに基づいて推定された離散ワイブル分布のパラメータ \$\beta (= \beta_1, \dots, \beta_{i-1})\$、\$\alpha (= \alpha_1, \dots, \alpha_{I-1})\$ により算出される。そのため、施設 \$k\$ の状態推移確率、同時生起確率は実測データ \$\bar{s}^k \{ \bar{s}^k = (s_A^k, s_B^k) \}\$ と、未知パラメータベクトル \$\gamma = (\alpha, \beta)\$ に依存することとなる。このことを明示的に表示するために、状態推移確率を \$\pi_i(\bar{s}^k, \gamma)\$、同時生起確率を \$\pi_{ij}(\bar{s}^k, \gamma)\$ と表すこととする。

各施設の劣化が独立に生起すると仮定すると、獲得された全データセット \$\Xi\$ の同時生起確率密度を表す尤度関数 \$\mathcal{L}(\gamma, \Xi)\$ は、

$$\mathcal{L}(\gamma, \Xi) = \prod_{i=1}^I \prod_{k=1}^{k'} \{ \pi_i(\bar{s}^k, \gamma) \}^{\delta_i^k} \prod_{i=1}^I \prod_{j=i}^I \prod_{k=k'+1}^K \{ \pi_{ij}(\bar{s}^k, \gamma) \}^{\delta_{ij}^k} \quad (29)$$

と表すことができる。この尤度関数を用いてパラメータの推計を行う。

(2) MCMC 法

事前確率密度関数 \$\pi(\gamma)\$ は各パラメータ \$\alpha, \beta\$ が独立である場合

$$\pi(\gamma) = \prod_{i=1}^{I-1} \pi(\alpha_i) \prod_{i=1}^{I-1} \pi(\beta_i) \quad (30)$$

と展開することができる。未知パラメータ \$\gamma = (\alpha, \beta)\$ の事前分布として、それぞれ、\$\alpha_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)\$、\$\beta_i \sim N(\mu'_i, \sigma_i'^2)\$ を仮定する。この下で同時事後確率密度関数 \$\pi(\gamma|\Xi)\$ は、

$$\begin{aligned} \pi(\gamma|\Xi) &\propto \mathcal{L}(\gamma|\Xi) \prod_{i=1}^{I-1} \pi(\alpha_i) \prod_{i=1}^{I-1} \pi(\beta_i) \\ &\propto \prod_{i=1}^I \prod_{k=1}^{k'} \{ \pi_i(\bar{s}^k, \gamma) \}^{\delta_i^k} \prod_{i=1}^I \prod_{j=i}^I \prod_{k=k'+1}^K \{ \pi_{ij}(\bar{s}^k, \gamma) \}^{\delta_{ij}^k} \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^{I-1} \exp \left\{ -\frac{(\alpha_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right\} \prod_{i=1}^{I-1} \exp \left\{ -\frac{(\beta_i - \mu'_i)^2}{2\sigma_i'^2} \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

と表すことができる。しかし、同時事後確率密度関数 \$\pi(\gamma|\Xi)\$ も解析的に求めることができない。また、\$\pi(\gamma|\Xi)\$ から直接サンプリングすることも困難である。そのため、同時事後確率密度関数を周辺化した各パラメータの条件付き事後確率密度関数を算出し、数値計算を行うことにより近似的に式 (31) の算出を行う。なお、実際は条件付き事後確率密度関数からも直接サンプリン

グすることも困難であり、MH 法を用いて同時事後確率密度関数からのサンプリングを行うこととなる。

未知パラメータベクトル β から、成分 β_{e_1} を除いたベクトルを β^{-e_1} と表すとす、また、未知パラメータベクトル α から、 α_{e_2} を除いたベクトルを α^{-e_2} と表す。いま、 β^{-e_1}, α が既知であるとすると、 β_{e_1} についての条件付き事後確率密度関数 $\pi(\beta_{e_1} | \beta^{-e_1}, \alpha, \Xi)$ は、

$$\pi(\beta_{e_1} | \beta^{-e_1}, \alpha, \Xi) = \prod_{i=e_1}^I \prod_{k=1}^{k'} \{\pi_i(\tilde{s}^k, \gamma)\}^{\tilde{\delta}_i} \prod_{i=1}^I \prod_{j=e_1}^I \prod_{l=k'+1}^K \{\pi_{ij}(\tilde{s}^k, \gamma)\}^{\tilde{\delta}_{ij}} \cdot \exp\left\{-\frac{(\beta_{e_1} - \mu_i)^2}{2(\sigma_i)^2}\right\} \quad (32)$$

となる。また、 β, α^{-e_2} が既知であるとき、 α_{e_2} についての事後確率密度関数 $\pi(\alpha_{e_2} | \beta, \alpha^{-e_2}, \Xi)$ は、

$$\pi(\alpha_{e_2} | \alpha^{-e_2}, \beta, \Xi) = \prod_{i=e_2}^I \prod_{k=1}^{k'} \{\pi_i(\tilde{s}^k, \gamma)\}^{\tilde{\delta}_i} \prod_{i=1}^I \prod_{j=e_1}^I \prod_{l=k'+1}^K \{\pi_{ij}(\tilde{s}^k, \gamma)\}^{\tilde{\delta}_{ij}} \cdot \exp\left\{-\frac{(\alpha_{e_2} - \mu'_i)^2}{2\sigma_i'^2}\right\} \quad (33)$$

となる。これらの条件付き事後確率密度関数から直接サンプリングを行うことは困難であるため、MH 法を用いて反復計算を行うことで、近似的に同時事後確率密度関数からのサンプリングを行う。

(3) 疑似的な点検データを用いたモデル推定

本節では、劣化過程の経時変化の検出可能性の検証を行う。健全度毎にハザードの増加率を変化させたうえで仮想的な点検データベースを作成し、提案モデルの推計を行う。I = 4 段階の健全度判定により管理されており、すべての施設が同一の劣化条件の下で独立に劣化が進行するとし、5,000 サンプルの疑似点検データの生成を行う。すべての施設は 2 回の点検が実施されているとし、供用開始から 1 回目の点検が実施されるまでの経過時間、および、1 回目の点検から 2 回目の点検までの時間間隔を単位時間を 1/11(年)として $\{2, \frac{23}{11}, \dots, \frac{54}{11}, 5\}$ 年を台とする離散一様分布からそれぞれ発生させる。なお、任意の施設に対して健全度 1, ..., 3 の 1 単位時間経過後のハザードはそれぞれ 0.015, 0.01, 0.02 とする。そのうえで各健全度のハザードを表-1 に従い一定の単位時間経過毎に増加させる。各パラメータの推計結果を表-2 に示す。すべての健全度段階において形状パラメータ m について $m_i > 1.0$ となっている。そのため、加速度的な劣化過程を示しているといえる。これは、表-1 のハザードの増加条件とも一致しており、加速度的な劣化過程を検出することが可能であることが分かる。また、期待劣化パスを図に示す。図より期待寿命と概ね

表-1 ハザードの増加条件

| 健全度 | 単位時間 | ハザード増加量 |
|-----|------|---------|
| 1 | 4 | +0.0035 |
| 2 | 7 | +0.0040 |
| 3 | 9 | +0.0025 |

表-2 推計されたパラメータ

| 健全度 | 事後分布統計量 | m | β |
|-----|--------------|-------------|---------------|
| 1 | 期待値 | 1.573 | -1.770 |
| | 信頼区間 | 1.509 1.629 | -1.854 -1.679 |
| | geweke 検定統計量 | -1.584 | 1.640 |
| 2 | 期待値 | 1.478 | -2.013 |
| | 信頼区間 | 1.415 1.545 | -2.113 -1.915 |
| | geweke 検定統計量 | -0.616 | 0.027 |
| 3 | 期待値 | 1.058 | -1.354 |
| | 信頼区間 | 0.973 1.169 | -1.472 -1.252 |
| | geweke 検定統計量 | -1.069 | 0.573 |

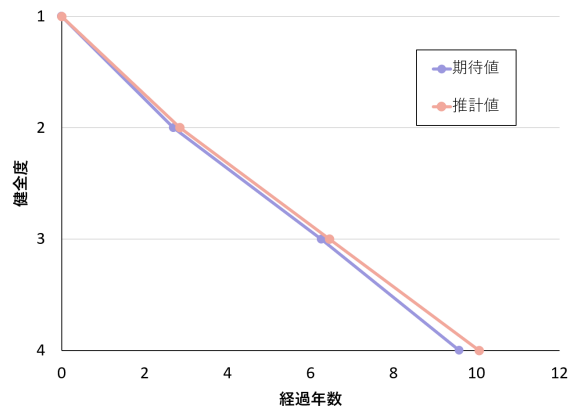


図-3 期待劣化パス

一致していることが読み取れる。

5. おわりに

本研究では、劣化過程の時間依存性を考慮することが可能な劣化予測モデルの構築を行った。具体的には、施設の健全度寿命が離散ワイブル分布に従うものとして、離散時間軸上で時間依存的な劣化過程を考慮した。離散時間モデルとすることにより総和計算によりモデル推計を実施することが可能となった。さらに劣化速度が時間経過に伴い増大する条件の下で疑似的な点検データを作成、モデル推計を実施し加速度的な劣化過程を検出することが可能であることを示した。なお、提案したモデルを用いた実証分析結果については研究発表会当日に提示する予定である。

参考文献

- 1) 国土交通省：インフラ長寿命化基本計画，2013.
https://www.mlit.go.jp/sogoseisakusosei_point_mn_000010.html [Ministry of Land, Infrastructure, Transport and Tourism : *Infra chouzuyumyouka kihonkeikaku*, 2013.]
- 2) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73，pp. 68-82，2005. [Tsuda, Y., Kaito, K., Aoki, K. and Kobayashi, K.: Estimating markovian transition probabilities for bridge deterioration forecasting, *Journal of the Japan Society of Civil Engineering*, No.801/I-73, pp. 68-82, 2005.]
- 3) 青木一也，山本浩司，津田尚胤，小林潔司：多段階ワイブル劣化ハザードモデル，土木学会論文集，No.798/VI-68，pp.125-136，2005. [Aoki, K., Yamamoto, K., Tsuda, N. and Kobayashi, K.: A deterioration forecasting model with multi-staged weibull hazard functions, *Journal of the Japan Society of Civil Engineering*, No.798/VI-68, pp. 125-136, 2005.]
- 4) 貝戸清之，小林潔司：マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定，土木学会論文集 A，Vol.63，No.2，pp. 336-355，2007. [Kaito, K. and Kobayashi, K.: Bayesian estimation of markov deterioration hazard model, *Journal of the Japan Society of Civil Engineering*, Vol.63, No.2, pp. 336-355, 2007.]
- 5) 小濱健吾，岡田真一，貝戸清之，小林潔司：劣化ハザード率評価とベンチマーキング，土木学会論文集 A，Vol.64，No.4，pp. 857-874，2008. [Obama, K., Okada, K., Kaito, K. and Kobayashi, K.: Disaggregated hazard rates evaluation and bench-marking, *Journal of the Japan Society of Civil Engineering*, Vol.64, No.4, pp.857-874, 2008.]
- 6) 貝戸清之，小林潔司，青木一也，松岡弘大：混合マルコフ劣化ハザードモデルの階層ベイズ推計，土木学会論文集 D3 (土木計画学)，Vol.68，No.4，pp. 255-271，2012. [Kaito, K., Kobayashi, K., Aoki, K. and Mat-suoka, K.: Hierarchical bayesian estimation of mixed markov hazard models, *Journal of the Japan Society of Civil Engineering*, Vol.68, No.4, pp. 255-271, 2012.]
- 7) 水谷大二郎，小濱健吾，貝戸清之，田中晶大：集計的劣化過程モデルによる高速道路橋 RC 床版の劣化総合評価，土木学会論文集 F4，Vol.73，No.3，pp. 50-69，2017. [Mizutani, D., Obama, K., Kaito, K. and Tanaka, A.: Comprehensive deterioration evaluation of RC slabs on expressway viaducts based on an aggregative deterioration process model, *Journal of the Japan Society of Civil Engineering*, Vol.73, No.3, pp. 50-69, 2017.]
- 8) 水谷大二郎：健全度推移の不連続性を考慮したマルコフ推移確率の非集計的推定方法，土木学会論文集 D3 (土木計画学)，Vol.74，No.2，pp.125-139，2018. [Mizutani, D.: A disaggregative estimation method of markov transition probabilities with discontinuous transition of condition states, *Journal of the Japan Society of Civil Engineering*, Vol.74, No.2, pp. 125-139, 2018.]
- 9) 津田尚胤，貝戸清之，山本浩司，小林潔司：ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計法，土木学会論文集 F，Vol.62，No.3，pp. 473-491，2006. [Tsuda, Y., Kaito, K., Yamamoto, K. and Kobayashi, K.: Bayesian estimation of weibull hazard models for deterioration forecasting, *Journal of the Japan Society of Civil Engineering*, Vol.62, No.3, pp. 473-491, 2006.]
- 10) 水谷大二郎，坂口創，貝戸清之，小林潔司：準モンテカルロ法を用いた多段階ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推定，土木学会論文集 F4 (建設マネジメント)，Vol.71，No.4，I23-I34，2015. [Mizutani, D., Sakaguchi, S., Kaito, K., Kobayashi, K.: Bayesian estimation of multi-stage weibull deterioration hazard model employing quasi monte carlo method, *Journal of the Japan Society of Civil Engineering*, Vol.71, No.4, I.23-I.34, 2015.]
- 11) Nakagawa, T. and Osaki, S. : The Discrete Weibull Distribution, *IEEE Transactions on Reliability*, Issue5, 1975.