連続体近似による ETC 施設予備部品の最適配置計画

福山峻一[1]・水谷大二郎[2]・佐津川 功季[3]

[1]非会員　東北大学大学院　工学研究科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
E-mail: shunichi.fukuyama.s5@dc.tohoku.ac.jp
[2]正会員　東北大学助教　大学院工学研究科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
E-mail: daijiro.mizutani.a5@tohoku.ac.jp
[3]正会員　東北大学助教　大学院情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)
E-mail: satsukawa@tohoku.ac.jp

道路ネットワーク上に点在する ETC 施設は，経年的な劣化により故障し，交通渋滞などの利用者損失を誘発する．利用者損失は故障発生から復旧までの故障継続時間に応じて変化するため，復旧のための予備部品を適切な地点に配置することにより利用者損失が削減され得る．本研究では，所与の故障確率のもとでの予備部品の配置場所に応じた利用者損失を定量化し，予備部品の配置費用と利用者損失の総和を最小化するような予備部品の最適配置計画を導出することを目的とする．このような数理最適化問題は，高次元の離散最適化問題となるため，一般的な状況で解析解を導出するのは困難である．そのため，ネットワークの連続体近似に基づく近似的解法を提案し，計算の効率化を図る．提案した方法論を仮想的な高速道路ネットワークに適用し，その有用性を議論する．

Key Words: *continuum approximation*，*location problem*，*asset management*，*ETC facility*，*user loss*

1. はじめに

高速道路の管理主体は，料金収受を行う高速道路利用者に対して，利便性や快適性，安全性を提供しつつも，事業の経済性を担保するような維持管理運営が求められており，近年では管理するインフラの価値を最大化するようなインフラのマネジメント（アセットマネジメント）が重要視されてきている．またそういった背景の中で，橋梁や舗装などの道路施設に対しては，劣化予測に基づく予防保全的な維持補修の必要性が論じられており，学術的な側面のみならず実務においても研究が進んでいる．しかしながら，本稿で対象とする ETC 施設や情報板といった高速道路施設の維持管理にあたっては，個々の施設の故障を完全に防ぐための予防的な維持管理では，高頻度の点検や更新が必要となり経済的に好ましいとは言えない．従って，それらの施設が故障した際に利用者にどの程度影響を与えるのかを定量的に評価し，事後保全もある程度許容しつつ，可能な限り利用者の利便性，快適性，安全性を担保した維持管理運営を行う必要がある．

実際の高速道路における ETC 施設や情報板の維持管理では，予め予備部品を拠点に備蓄しておき，故障発生時には付近のパトロール隊，もしくは管理事務所に駐在する部隊が予備部品を故障現場まで運んでから，復旧や修理が行われる．そのため，故障が発生した場所に対して備蓄拠点がどこに位置しているのかによって，故障の継続時間が変動することとなる．単純に考えれば，備蓄拠点が多ければ多いほど，故障に対して迅速な対応が可能となるが，実際は拠点の設置と維持管理にかかるコストを考えると現実的ではない．すなわち，備蓄拠点の設置に関する迅速性と経済性の間にはトレードオフ関係が存在する．ETC 施設の故障の起こりやすさを事前に考慮し，故障時の損失を迅速性と対応づけて金銭評価することで，トレードオフ関係に対してのバランスを取るような備蓄拠点の位置と設置時期を決める必要がある．

以上の問題意識のもと，本稿では，故障時の利用者損失と維持管理費用の双方を考慮した拠点の最適配置を導出する方法論を提案する．こういった問題を定式化する場合，一般的には施設配置問題という数学的なモデルを用いることになるが，その多くは現実的なモデル設定での計算は困難であり，問題を簡略化するか，何かしらのヒューリスティックを用いて解くことになる．本稿では，その中でも連続体近似 (CA) という手法を用いて当該問題に対する最適解の導出を検討する．具体的な流れとしては，i) 混合整数計画問題 (MIP) による

定式化の下で，一般的な動的施設配置問題のモデルを作成する．次に，ii) 故障確率の算出のため，台帳データと故障データから故障過程を表す 2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルの推定と，iii)IC(インターチェンジ) への流入交通データから，待ち行列理論を用いて，施設故障時の利用者損失を故障継続時間の関数として定式化し，これらを MIP モデルへとインプットする．次に，MIP モデルに対する CA モデルの定式化を行い，CA によって事前獲得した解を用いて，MIP を効率的に解く手法を提案する．最後に，仮想空間のもとで数値計算を行い，提案方法の有用性を検討する．

以下，**2.** で，既往研究のレビューを行い，**3.** では MIP モデルの定式化を行う．**3.** で CA モデルの定式化と MIP モデルの拡張について延べ，**4.** で ETC 施設を対象とした実証分析を行い 2 つのモデルの比較を行う．**7.** で結論と今後の研究課題を述べる．

2. 既往研究

本稿では，ETC 施設の故障過程を予測し，故障の影響を最小限に抑えるための復旧までの迅速性，および予備部品の保管にかかる経済性の観点から，社会的損失を最小にするような最適拠点配置施策を導出する．

道路構造物に対して，その劣化過程や寿命を推定する研究は盛んに行われており[1)2)3)]，橋梁や舗装に対しては，劣化過程の下で最適な維持管理施策を求める研究も数多く存在する．[4)5)] しかし，これらの研究は，対象構造物の故障を許容するものではなく，構造物の使用限界を定め，劣化状態が限界に達する確率を極めて小さくするような，一定以上のリスクを回避するような維持管理施策の最適化を行なっている．前述した通り，ETC 施設では，故障による多少の利用者損失は許容しつつも，経済性を考慮しながら維持管理を行う，他目的最適化の元で維持管理施策を設定することが求められる．青木等[6)] は高速道路のトンネル照明ランプに対して劣化過程を推定し，点検時に不点ランプを更新するとして最適な点検タイミング及び，一括更新更新タイミングを求めているが，この問題の目的関数はライフサイクルコスト LCC を最小化する単一目的の最適化である．また，本稿で対象とする ETC 施設や情報板に関しては，故障過程や故障時の利用者損失を推定する方法が提案されてきている[7)8)]. 特に，佐津川等[9)] は，ETC 施設の故障過程と故障時の利用者損失を定量化し，計画期間内の各期における施設補修の有無を定める最適補修施策をマルコフ決定過程を用いて求めている．しかしながら当該研究では，施設が故障してから復旧するまでの時間を，故障データから与えており，予備部品の配置場所の設定が，利用者損失に及ぼす影響については言及していない．

本稿では動的施設配置問題 (DynamicFacilityLayout-Problems:DFLP) として，ETC 施設の維持管理における他目的最適化を表現することを目的としている．DFLP は Ballou[10)] を先駆的な研究とし，これまでに多くの研究が蓄積されていた施設配置問題[11)] に対し，市場の需要パターンの変化や環境条件の変化などによる倉庫立地の変動を考慮した動的な立地問題として数多くの研究がなされている[12)]．ここでいう施設とは，本稿で扱う ETC 施設ではなく，備蓄拠点と同質の機能を備える物であると注意して欲しい．例えば，Xie and Ouyang[13)] はバイオ燃料のサプライチェーンにおいて，各期間ごとに容量の拡張が可能な複数種類の施設の動的配置問題に対し，混合整数問題 (Mixed Integer Programming:MIP) モデルをラグランジュ緩和，ベンダーズ分解，加速ベンダーズ分解を用いて最適化する解法を提案し，その比較を行なっている．そのほかにも，不確実性下での動的施設配置に関する研究なども数多く存在する[14)15)]．しかし一般に，DFLP は動的計画法[10)16)] やヒューリスティックな手法[13)17)18)19)] またはその複合手法を用いて，候補地点における施設の配置の有無をバイナリ変数の集合として計画期間内の全ての時間に対して決定する．そのため，複雑なモデルに対しては NP 困難となる場合が多い．

複雑なモデルに対して DFLP を解くために，本稿では Newell[20)] および Daganzo[21)] による，連続体近似（Continuum Approximation :CA）ベースのアプローチを実装し，離散的な DFLP を連続・微分可能な密度関数で近似することを提案している．CA は施設配置，ルーティング，在庫管理といったロジスティックの問題対して多くの研究が蓄積されてきた．本稿ではこの中でも施設配置問題に焦点を当ててレビューを行う．その他の対象ついての研究は Ansari et al.[22)] を参照されたい．CA による施設配置問題は，その多くが静的なモデルを扱っており，それらは長期輸送コストと施設配置にかかる一度きりの投資の間のトレードオフ関係から，設定したコスト関数を最小化（もしくは最大化）することを目的としている．この際，輸送コストを発生させる需要と，施設配置にかかる固定費用は，それぞれ空間上の密度関数として与えられるため，コスト関数は局所的な施設密度の解析的な関数として定式化することができる．CA を用いた研究として，Dasci and Laporte[23)] は需要の不確実性下での施設の位置と容量に対して，施設位置ではなく市場エリアを決定する定式化を行なっている．また，確率的な施設の故障の下での施設配置も着目されており[24)25)26)]，中でも Cui et al.[26)] は論文中で，需要分布が空間的に大きく変動する場合でも、CA 法は離散モデルの最適解に対して 4%から 7%以内の近

似解が求まることを示している．また，CA は連続的な密度関数としての需要の入力を必要とするが，離散的な入力をもとに近似解を算出する研究もいくつか存在する[27)28)29)30)]．例えば， Peng et al.[27)] と Bai et al. [28)] は CA を一般的な離散的施設配置問題に適用できるように、離散的な空間データを連続関数に変換する方法論を提案，イリノイ州における確率的施設故障の下でのバイオ燃料のサプライチェーンの設計に適用した．

以上の通り，CA は，静的な施設配置問題の計算困難の解決に広く用いられているが，現状，動的な施設配置を扱う問題は少ない．しかしながら，Wang et al.[31)] は大規模な成長市場における DFLP 解くための CA モデルを提案し，位置の一貫性を確保するペナルティ法に基づく反復的な計算モデルにより，動的施設配置の離散解を導出しており，我々は当該研究が CA の DFLP への実装に関する先駆的な研究であると考えておる．従って，本研究では当該研究をベースとし，ETC 施設の故障を取り入れた維持管理問題を定式化する．

3. DFLP における MIP モデル

この章では，利用者損失と新設費用，維持管理費用を考慮した最適化問題として．典型的な MIP モデルとしての定式化を行い．そのインプットとして ETC 施設の故障過程及び，利用者損失の関数を定義する．

(1) モデルの概要

離散時間軸からなる計画期間 $\mathcal{T} = \{0, \ldots, T\}$ を定義し，$t \in \mathcal{T}$ を時点 t 及び，$[t, t+1)$ を期間 t と呼称する．さらに，それぞれ異なる故障過程を持つ ETC 施設の集合を $I = \{1, 2, \ldots, |I|\}$，施設の予備部品を備蓄する拠点の配置候補点を $J = \{1, 2, \ldots, |J|\}$ とする．また，決定変数 $x_{i,j,t}$ と $y_{j,t}$ に対して，施設 $i \in I$ が拠点 $j \in J$ に割り当てられる場合 $x_{i,j,t} = 1$，そうでない場合は 0，候補点 $j \in J$ に拠点が配置される場合 $y_{j,t} = 1$、そうでない場合 0 とする．ETC 施設が故障した場合，レーン閉鎖による渋滞が利用者損失を生み，その大きさは，ETC 施設と施設を割り当てる拠点との距離に応じた関数によって表されるとする．また，拠点の配置には新設コスト，配置後の拠点には，毎期間ごとに維持管理コストが発生するものとし，配置後の拠点の廃棄は行わないものとする．以上の元で，利用者損失，新設コスト，維持管理コストからなる，社会的損失を最小化するような拠点配置とその割り当てを最適解として選択する．

(2) MIP モデルの定式化

全期間の社会的損失を最小化させるような動的配置を決定する問題は，以下のような混合整数計画問題（Mixed integer programming：MIP）として定式化される．

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{k}} Z = \sum_t \sum_i \sum_j \gamma^t P_i(t) \alpha(i,j) x_{i,j,t} + \sum_t \sum_i \gamma^t \{C_b(j,t) y_{j,t} + h(j,t)(y_{j,t} - y_{j,t-1})\} \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad x_{i,j,t} \in 0, 1 \forall i, j, t \quad (2)$$

$$y_{j,t} \in 0, 1 \quad \forall j, t \quad (3)$$

$$\sum_i x_{i,j,t} = 1 \quad \forall j, t \quad (4)$$

$$\sum_j y_{j,t} = n(t) \quad \forall t \quad (5)$$

$$x_{i,j,t} \leq y_{j,t} \quad \forall i, j, t \quad (6)$$

$$y_{j,t} \leq y_{j,t+1} \quad \forall j, t \quad (7)$$

$P_i(t)$: 施設 i の時点 t における故障確率

$\alpha(i,j)$: 施設 i を拠点 j へ割り当てた際の故障時の利用者損失

$C_b(j,t)$: 施設 j の期間 t における維持管理費用

$h(j,t)$: 施設 j の時点 t における新設費用

γ : 割引率

$x_{i,j,t}$: 期間 t における施設 i の拠点候補点 j への割り当て（バイナリ変数）

$y_{j,t}$: 期間 t における拠点候補点 j での拠点の有無（バイナリ変数）

$n(t)$: 時点 t における拠点の総配置数

制約条件の式 (4) はどの施設も必ずいずれかの拠点に割り当てられすこと，式 (5) は拠点の総配置数に関する制約，式 (6) は候補点 j が拠点なしの場合，施設 i は候補点 j には割り当てられないことを示す制約，式 (7) は既存拠点の廃棄はない事を示す制約である．

(3) 劣化過程のモデルと故障確率

本稿では，ETC 施設の劣化過程と故障確率は 2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデル[3)] によって表現する．ハザードモデルに関する詳細は参考文献[1)2)3)] を参照されたい．2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルの下で，ハザード関数は

$$\lambda_i(s_i) = ba\varepsilon_i\rho_i(s_i)^{a\rho_i - 1} \quad (8)$$

と定義される．ただし，a は加速度パラメータ，b_i は速度パラメータ，ε_i は施設 i の劣化速度の異質性パラメータ，ρ_i は施設 i の劣化加速度の異質性パラメータであり，s_i は施設 i の最終更新時からの経過時間である．このハザード関数の元で施設 i の寿命の確率密度関数 $f_i(s_i)$，及び生存関数 $S_i(s_i)$ は

$$f_i(s_i) = ba\varepsilon_i\rho_i(s_i)^{a\rho_i - 1} \exp\{-b\varepsilon_i(s_i)^{a\rho_i}\} \quad (9)$$

$$S_i(s_i) = \exp\{-b\varepsilon_i(s_i)^{a\rho_i}\} \quad (10)$$

と表される．ここで異質性パラメータ ε_i は平均 1，分散 ϕ^{-1} のガンマ分布に従う確率誤差項であり，その確

率密度関数は標準ガンマ分布を用いて，

$$g(\varepsilon_i:\phi)=\frac{\phi^{\phi}}{\Gamma(\phi)}\varepsilon_i^{\phi-1}\exp(-\phi\varepsilon_i) \tag{11}$$

と表される．同様に異質性パラメータ ρ_i は平均 1，分散 ψ^{-1} のガンマ分布に従い，その確率密度関数は

$$h(\rho_i:\psi)=\frac{\psi^{\psi}}{\Gamma(\psi)}\rho_i^{\psi-1}\exp(-\psi\rho_i) \tag{12}$$

である次に，施設 i が期間 t に初めて故障する確率 $F_i(t)$ を考える．供用開始から時点 t までの経過時間を z_{t-1}，単位期間の長さを Δt とし $z_t=z_{t-1}+\Delta t$ とすると，$F_i(t)$ は時点 t まで施設 i は故障しないという条件のもとでの期間 t での故障発生確率として，

$$F_i(t)=S_i(z_{t-1})-S_i(z_t) \tag{13}$$

と表される．また，ある期間 t における故障とは，その期間において施設が初めて故障する確率だけではなく，既に複数回の故障と更新を繰り返した後での故障も考慮する必要がある．従って，複数回の故障を考慮した期間 t における施設 i の故障確率を $P_i(t)$ とすると，$P_i(t)$ は漸化式として

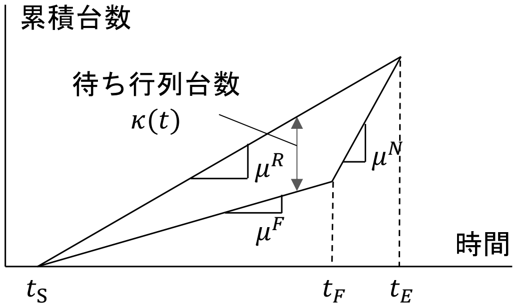
$$P_i(t)=\sum_{u=0}^{t-1}P(u)F_i(t-u) \tag{14}$$

として表現される．

(4) 利用者損失

本稿では，利用者損失を ETC 施設の故障による道路の容量低下が引き起こす総旅行時間の増分として，決定論的な待ち行列理論から定義する．容量低下は施設の修復によってのみ回復し，回復までの故障継続時間は予備部品の備蓄拠点と施設との距離に依存する．従って，利用者損失を拠点と施設との距離の関数として定義することができる．また本稿では簡単のため，道路流入量を時間に依らず一定として，**図-1** のように累積グラフを定義する．t_S, t_F, t_E をそれぞれ，故障開始時間，故障継続時間，混雑解消時間とし，$\mu_i^N, \mu_i^F, \mu_i^R$ を平常時容量，故障時容量，平均単位時間流入量，φ を時間価値とすると，利用者損失 $\alpha(i,j)$ は以下のように定式化される．

$$\begin{aligned}\alpha(i,j)&=\varphi\int_{t_S}^{t_E}\kappa_i(t)dt\\&=\int_0^{t_E}(\mu_i^R-\mu_i^F)tdt\\&\quad-\int_{t_F}^{t_E}\{(\mu_i^N-\mu_i^R)t+(\mu_i^F-\mu_i^N)t_F\}dt\\&=\frac{1}{2}\frac{(\mu_i^N-\mu_i^F)(\mu_i^R-\mu_i^F)}{\mu_i^N-\mu_i^R}t_F^2\\&=\frac{1}{2}\varphi\tilde{\mu}_i\left(\frac{d_{i,j}}{v}+t_\beta\right)^2\end{aligned} \tag{15}$$



図–1: 故障による容量低下が生じたときの累積流入・流出曲線と待ち行列

ここで

$$\tilde{\mu}_i=\frac{(\mu_i^N-\mu_i^F)(\mu_i^R-\mu_i^F)}{\mu_i^N-\mu_i^R} \tag{16}$$

$$t_F=\left(\frac{d_{i,j}}{v}+t_\beta\right) \tag{17}$$

$d_{i,j}$ は拠点と施設の距離，v は補修部隊の移動速度，修復時間 t_β である．

4. DFLP における CA モデル

2 で定式化した MIP モデルは一般的な離散的施設配置問題の形式をとっており，こういった問題は多くの場合 NP 困難であることが知られている．MIP の効率的な解法としては，ラグランジュ緩和やベンダーズ分解法など[13] が可能であるが，大規模な施設配置問題では計算コストは依然として大きい．そこで本研究では連続体近似 (Continuum Approximation：CA) アプローチ[20] を用いた効率的な動的施設配置問題の最適化を提案する．まず CA を用いて，式 (1) を近似する目的関数を定式化する．次に，CA による最適解を用いて，MIP の時間軸方向の計算量を削減することで，効率的に解く方法を提案する，

(1) CA の概要

3. で定義した ETC 施設 $i\in I$ と拠点 $j\in J$ が，計画期間 $\Psi=[0,T]$ 上の連続した空間 $S\subseteq\mathbb{R}^2$ に存在，もしくは配置されるとする．この時，CA は式 (1) のように離散的な拠点の位置とその割り当てを出力するのではなく，連続的な計画時空間における任意の位置 $\boldsymbol{x}\in S$ 及び時点 $t\in\Psi$ に対する連続関数として，最適な割り当て領域の面積 $A^*(\boldsymbol{x},t)$ を出力する．$A^*(\boldsymbol{x},t)$ は，位置 $\boldsymbol{x}$ 近傍に存在しうる，$\boldsymbol{x}$ を割り当て範囲に含む拠点の領域面積の平均，もしくは $\boldsymbol{x}$ の近傍の連続拠点密度の逆数として解釈できる．この際．社会的損失を算出するための入力データである故障確率や新設費用，維持管理費用などは，時空間上における連続関数として与えられる．

(2) CA モデルの定式化

式 (1) を近似する CA モデルの目的関数は以下のように定式化される．

$$\min_{A(\boldsymbol{x},t)} Z_C = \int_{\Psi}\int_{\Omega}\gamma^t\left[p(\boldsymbol{x},t)\alpha_C(\boldsymbol{x},A(\boldsymbol{x},t)) + \frac{C_b(\boldsymbol{x},t)}{A(\boldsymbol{x},t)} + \frac{h(\boldsymbol{x},t)}{A(\boldsymbol{x},t)T}\right]d\boldsymbol{x}dt \quad (18)$$

$$\text{s.t.} \quad A(\boldsymbol{x},t) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, t \in \Psi \quad (19)$$

このとき，$p(\boldsymbol{x},t)$ は $(\boldsymbol{x},t)$ における施設の故障確率密度，$\alpha_C(\boldsymbol{x},A(\boldsymbol{x},t))$ は $A(\boldsymbol{x},t)$ が与えられた際の $(\boldsymbol{x},t)$ における故障時の利用者損失である．

位置 $\boldsymbol{x}$ 及び時点 t に対する最適な割り当て領域の面積 $A^*(\boldsymbol{x},t)$ は式 (18) の導関数を 0 にする値として，以下のように近似される．

$$\frac{\partial}{\partial A(\boldsymbol{x},t)}[p(\boldsymbol{x},t)\alpha_C(\boldsymbol{x},A^*(\boldsymbol{x},t))] - \frac{C_b(\boldsymbol{x},t)T + h(\boldsymbol{x},t)}{T}[A^*(\boldsymbol{x},t)]^{-2} = 0 \ \forall \boldsymbol{x},t \quad (20)$$

また，時点 t における拠点の配置数は，$A^*(\boldsymbol{x},t)$ を用いて次のように近似される．

$$n^*(t) = \left\lfloor \int_{\Omega}\frac{1}{A^*(\boldsymbol{x},t)}dx \right\rfloor \quad (21)$$

(3) CA における利用者損失の算出

CA による解は拠点の割り当て面積を近似する連続関数であり，離散的な拠点の配置位置を決定するものではない．従って，拠点と施設の距離の関数である利用者損失は，CA の下で定義することができず，$A(\boldsymbol{x},t)$ に関する関数として新たに定式化する必要がある．

Newell[20] は，目的関数の大きさが移動距離に対して大きく影響を受けるようなモデルに対しては，拠点の割り当て領域の形状の変化が目的関数値へ及ぼす影響は小さく，需要密度が均質な平面上での最適な割り当て領域は、円形もしくは空間を分割するような正六角形であること述べている．そこで本項では，$(\boldsymbol{x},t)$ に対する割り当て領域の形状は，拠点の位置 $\boldsymbol{x}_c$ を中心とする円のであると仮定する．この際，拠点位置 $\boldsymbol{x}_c$ の存在可能範囲は，地点 $\boldsymbol{x}$ を中心とする半径 $\sqrt{A(\boldsymbol{x},t)/\pi}$ の円の内部となる．この存在可能領域の中で $\boldsymbol{x}_c$ の出現確率は均質であると仮定すると，利用者損失は期待値として，

$$\alpha(x,A(\boldsymbol{x},t)) = \varphi\int_0^{\sqrt{\frac{A(\boldsymbol{x},t)}{\pi}}}\frac{2\pi r}{A(\boldsymbol{x},t)}\cdot\frac{1}{2}\tilde{\mu}(\boldsymbol{x})\left(\frac{r}{v}+t_\beta\right)^2 = \varphi\tilde{\mu}(\boldsymbol{x})\left(\frac{A(\boldsymbol{x},t)}{4v^2\pi} + \frac{2t_\beta}{3v}\sqrt{\frac{A(\boldsymbol{x},t)}{\pi}} + \frac{t_\beta^2}{2}\right) \quad (22)$$

と表される．

(4) 離散入力データに対する CA モデルの再定式化

前述したように，CA モデルに対する入力データは，時空間に対して連続な関数である必要がある．しかし本項で対象とする ETC 施設などは，空間に対して離散的に存在するものであり，入力データも離散的な形式として表現されてしまう．そこで本項では,Peng et al.[27] で提案された手法を用いて，離散データをボロノイ空間上で連続関数に変換することで CA 解を得る．

ボロノイ分割を行うにあたり，全ての施設を内包する計画空間 S の境界を設ける．本稿では，施設の位置を $\boldsymbol{X}_f = \{\boldsymbol{x}_i : i \in I\}$ とし，S の境界は，$\boldsymbol{X}_f$ を内包する凸包,$\mathrm{conv}(\boldsymbol{X}_\mathrm{f})$ とする．次に，計画空間の境界領域 S のもとで，$\bigcup_{i\in I} S_i = S$ となるようなボロノイ空間 $\{S_i : i \in I\}$ を x_i から生成する．このボロノイ空間内では，故障確率のような需要型データは，$\boldsymbol{x}_i$ における離散値とボロノイ面積を用いて平滑化され，維持管理コストのような数量型のデータは，$\boldsymbol{x}_i$ の最近傍の離散値で補間される．従って，生成される連続関数は各ボロノイ空間内で一定の値を持ち，それらを入力データとして出力される最適な割り当て領域の面積 $A^*(\boldsymbol{x},t)$ も，空間内で一定の値となるため，$A^*(\boldsymbol{x},t) = A_i(t)\forall\boldsymbol{x} \in S_i\forall i,t$ とできる．以上の元で，離散入力データを用いる CA モデルは以下のように定式化される．

$$Z_c \approx \int_{\Psi}\sum_i\int_{x\in S_i}\gamma^t\left[\frac{p_i(t)\alpha_C(\boldsymbol{x}_i,A_i(t))}{|S_i|} + \frac{C_b(j(i),t)}{A_i(t)} + \frac{h(j(i),t)}{A_i(t)T}\right]d\boldsymbol{x}dt \quad (23)$$

$$= \int_{\Psi}\sum_i\gamma^t\left[p_i(t)\alpha_C(\boldsymbol{x}_i,A_i(t)) + \left(\frac{C_b(j(i),t)T + h(j(i),t)}{T}\right)\frac{|S_i|}{A_i(t)}\right]dt \quad (24)$$

ただし，

$$j(i) = \arg\min_{i\in J} ||\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|| \quad (25)$$

また，式 (20)(21) は以下のように書き換えられる．

$$\frac{\partial}{\partial A_i^*(t)}[p_i(t)\alpha_C(\boldsymbol{x}_i,A_i(t))] - \frac{C_b(j(i),t)T + h(j(i),t)}{T}[A_i^*(t)]^{-2} = 0 \quad (26)$$

$$n^*(t) \approx \sum_i |S_i|/A_i^*(t) \quad (27)$$

このとき，故障確率密度 $p_i(t)$ は **2.**(3) で十分に小さい単位期間長 Δt を仮定し，$p_i(t) = P_i(t)/\Delta t$ とする．

(5) CA 解を用いた開設時間階層別拠点配置問題の定式化

施設配置問題における CA 解は連続関数として与えられるため，解を離散的な拠点の位置に変換する必要がある．手法としては Ouyang and Daganzo[32] によるディス

クモデルや，それを拡張したもの[27)31)]，crystal-growth アルゴリズム[33)] などが提案されているが，本稿では今後，ネットワーク空間に対して本モデルを拡張することを考慮し，CA 解を用いて MIP を効率的に解くことによって離散解を導出する．MIP の効率化に当たっては，Wang et al. [31)] で提案されている，拠点解放時間 (本稿では拠点新設時間) による計画期間の分割を用いる．

ここでは，CA によって得られた最適な拠点配置数の関数 $n^*(t)$ を用いて，最適な拠点新設時間を

$$\tau_k \approx \inf_{t\geq 0}\{n^*(t) = k\} \tag{28}$$

として定める．さらに，$n^*(0) = n_0, n^*(T) = n_T$ とすると，計画期間 Ψ は拠点新設時間によって $(n_T - n_0 + 1)$ 個のスキームとして分割することができる．スキーム $m \in M(M = \{1, 2, \dots, n_T - n_0 + 1\})$ は，τ_{n_0+m-1} を開始時点とし，期間は $\Psi_m : [\tau_{n_0+m-1}, \tau_{n_0+m}]$，期間長は $l_m = |\Psi_m|$ となる．

同一のスキーム上では時間による拠点数の変動はなく，位置の一貫性を仮定すると離散的な拠点の位置も変動しない．従ってこの期間では，MIP による最適解の決定変数は常に等しく，**2.** で定義した計画期間と，拠点解放時間によって離散化されたスキームベースの計画期間で最適化をしても最適値に変化はない．以上の設定の元で，式 (1) の MIP をスキームベースの離散時間軸で書き換えると，

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} Z = &\sum_m \sum_{t=\tau_{n_0+m-1}}^{\tau_{n_0+m}} \sum_i \sum_j \gamma^t P_i(t)\alpha(i,j)x_{i,j,m} \\ &+ \sum_m \sum_{t=\tau_{n_0+m-1}}^{\tau_{n_0+m}} \sum_j \gamma^t C_b(j,t) y_{j,m} \\ &+ \sum_m \sum_j \gamma^{\tau_{n_0+m-1}} h(j, \tau_{n_0+m-1})(y_{j,m} - y_{j,m-1})\end{aligned} \tag{29}$$

$$\text{s.t.} \quad x_{i,j,m} \in 0, 1 \forall i, j, m \tag{30}$$

$$y_{j,m} \in 0, 1 \quad \forall j, m \tag{31}$$

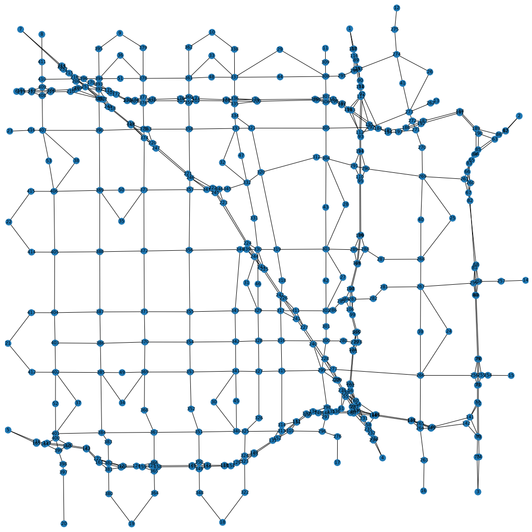
$$\sum_i x_{i,j,m} = 1 \quad \forall j, m \tag{32}$$

$$\sum_j y_{j,m} = n^*(\tau_{n_0+m-1}) \quad \forall m \tag{33}$$

$$x_{i,j,m} \leq y_{j,m} \quad \forall i, j, m \tag{34}$$

$$y_{j,m} \leq y_{j,m+1} \quad \forall j, m \tag{35}$$

となる．計画期間の分割数に対して極端に施設数が多いような場合でない限り，この式は，一般的な MIP よりも決定変数のサイズを小さくすることが可能であり，さらに一般的な MIP と同様にラグランジュ緩和といったアルゴリズムによるさらなる計算負荷の低減も可能である．



図–2: Anaheim Network[34)]

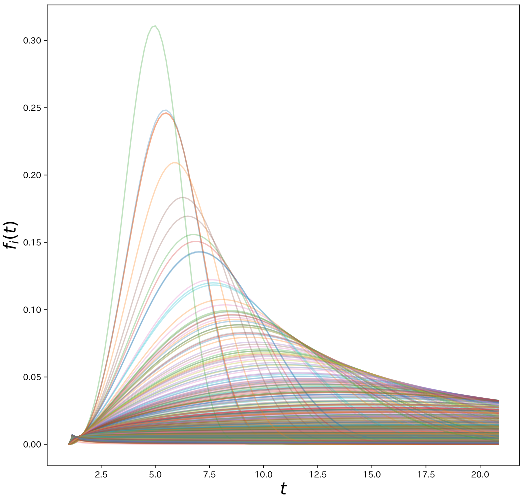
5. 数値計算

本章では，仮想的に作成したネットワークの下で，提案した方法論に対する分析結果を示す．最後にこれら計算結果に対する考察を行う．

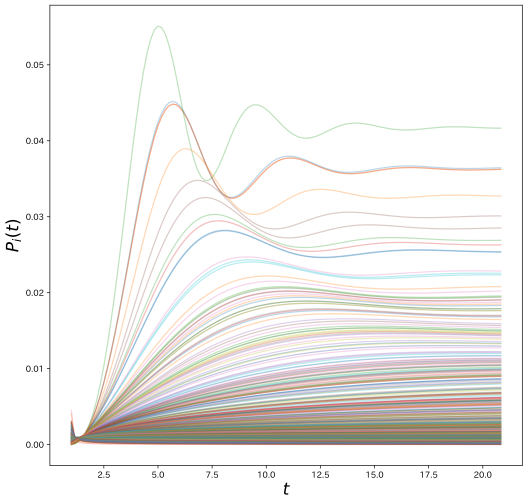
(1) 故障確率と対象ネットワーク

数値計算には Transportation Networks for Research[34)] に公開されている Anaheim Network(**図-2**) を用いる．ただし，当該ネットワークは都市内のネットワークであり，本稿で想定する高速道路路ネットワークに対してはその領域面積が小さいため，それぞれのノード間の距離を 10 倍し，416 ノードからなる仮想ネットワークとする．

また，故障確率の算出に当たっては，実データを用いて推定したパラメータを用いる．それぞれのパラメータの値は**表-1** にまとめた．本稿では，仮想ネットワーク上の 416 ノードそれぞれに ETC 施設を持つ IC(インターチェンジ) が存在するとして，**表-1** のパラメータからそれぞれの ETC 施設に対する故障過程を算出した．**図-3**, **図-4** には，それぞれの施設が初めて故障する確率密度 $f_i(t)$ と，複数回の故障を考慮した故障確率 $P_i(t)$ を示している．**図-3** を見ると，7.5 年程度までに寿命のピークを迎える施設が多く見られるが，早期劣化が見られる施設もあり，施設ごとの寿命のばらつきが確認できる．また，複数回の故障を考慮した故障確率は，1 回目の故障が起こりやすい計画期間早期では $f_i(t)$ と形状が似ているが，複数回の故障を繰り返すことで，$t = 12.5$ 付近から一定の確率に収束していくことが確認できる．



図–3: 初めて故障する確率密度 f_i



図–4: 複数回の故障を考慮した故障確率 P_i

表–1: 2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルのパラメータ

パラメータ	推定値
加速度パラメータ a	1.2909
速度パラメータ b	5.7211e-3
加速度の異質性パラメータの分散 ψ	4.5534

表–2: 費用設定のケース

	新設費用 h(円)	維持管理費用 C_b(円)	時間価値 φ(円 / 時)
ケース 1	10,000,000	300,000	3,000
ケース 2	15,000,000	300,000	3,000
ケース 3	10,000,000	500,000	3,000
ケース 4	10,000,000	300,000	5,000

(2) 最適拠点配置問題の計算結果

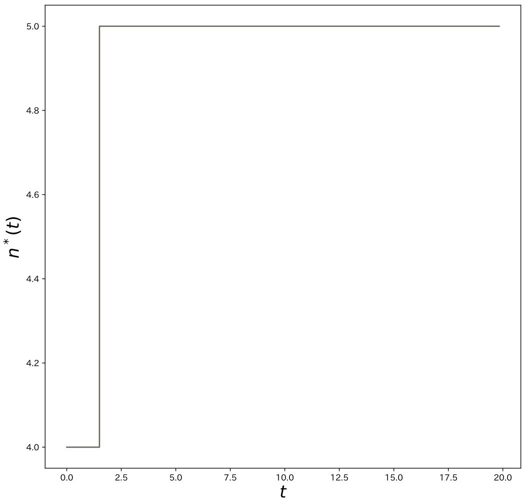
本節では前章で設定したネットワークとハザードモデルのパラメータの下，**3.**, **4.** で定式化した DFLP の最適化問題を解き，その結果について比較，考察する．また，費用設定に対しては**表-2** で示す 4 つのケースを考え，費用設定ごとの解の変動に着目する．この際，新設費用と維持管理費用は時空間上で常に一定とし，$C_b(j,t) = C_b(\boldsymbol{x},t) = C_b$，$h(j,t) = h(\boldsymbol{x},t) = h$ である．また，計画期間 $|T| = 20$ 年，離散時間軸の区間長を $t = 1/6$ 年とし，計画期間開始後の期間 t における故障確率は，**表-1** で設定した各種パラメータを持つ 2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルに従うものとする．本稿では, 各ノード上の ETC 施設を持つ IC には ETC レーンが 2 レーン存在し，施設が故障するときはいずれか 1 つのレーンのみが故障し，IC の容量低下が起こるとする．この際，修復部隊の移動速度は $v = 30km/h$ とし，部隊到着後の補修にかかる時間 $t_\beta = 0$，ETC 施設と拠点の距離はユークリッド距離としている．また，ETC レーン 1 つあたりの容量 μ は, 西日本高速道路株式会社の設計要領より,800 台 / 時 であるものとする．従って，全てのノードに対して，平常時容量 $\mu_i^N = 1600$ 台 / 時，故障時容量 $\mu_i^F = 800$ 台 / 時 である．また，平均単位時間流入量 μ_i^R は各ノードごとに 800 – 1600 の値でランダムに発生させている．さらに，待ち行列遅れ時間を金額換算して利用者損失を算出する際に用いる時間価値は, 費用設定のケースごとに異なる値を用いる．

表-3 にそれぞれのケースに対して最適化計算を行なった際の，手法ごとの計算結果を示す．ここでは，**4.(5)** での提案手法をスキームベース MIP としているほか，拠点配置候補点のサイズ $|J|$，計画期間開始時と終了時の拠点数の変化，目的関数の最適値 Z^*，計算時間 (CPU Time) を示している．結果を見ると，どのケースにおいてもスキームベース MIP は，元の MIP に対して計算時間を大幅に削減していることがわかる．一方で，スキームベース MIP と元の MIP の目的関数値 Z^* は，どのケースにおいても 1 千万円単位で異なる値をとっており，CA 手法による Z^* はさらに離れた値が算出されているため，CA による近似精度は目的関数値に関してあまり高いとは言えない．しかし，MIP による解と一致はしていないものの，拠点の配置数に関しては両者の手法とも同一のオーダーでの解は出力できていた．

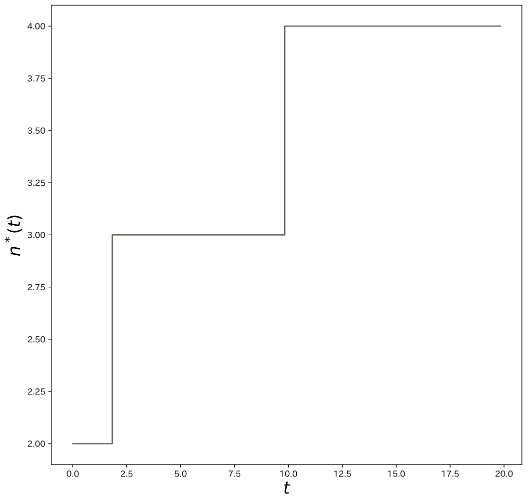
次に，ケース 1 に着目して，MIP による最適解と CA の最適解の，計画期間における拠点新設時間と拠点数の変化を**図-5**，**図-6** に示す．どちらの場合にも，供用開始直後の $t = 0 \sim 2.5$ は，1 回目の故障に対応して故障確率が 0 から上昇するため拠点数が増加し，逆に故障

表–3: ケース別数値計算結果

ケース	モデル	$\|J\|$	$n_0^* \to n_T^*$	Z^*(円)	CPU time(s)
ケース 1	MIP	20×20	$4 \to 5$	109,040,445.6	16,273.9
	CA	∞	$1 \to 3$	70,380,819.8	0.34
	スキームベース MIP	20×20	$1 \to 3$	124,632,911.6	1,231.4
ケース 2	MIP	20×20	$4 \to 4$	131,086,916.7	24,551.9
	CA	∞	$1 \to 3$	80,631,358.6	0.34
	スキームベース MIP	20×20	$1 \to 3$	151,678,500.6	1,350.9
ケース 3	MIP	20×20	$4 \to 5$	122,527,249.3	24,076.0
	CA	∞	$2 \to 3$	78,688,148.7	0.32
	スキームベース MIP	20×20	$2 \to 3$	133,651,935.4	1,274.9
ケース 4	MIP	20×20	$5 \to 6$	132,313,706.1	13,894.5
	CA	∞	$2 \to 5$	90,861,247.7	0.35
	スキームベース MIP	20×20	$2 \to 5$	150,062,229.4	4,133.0



図–5: MIP における最適な施設数の変化



図–6: CA における最適な施設数の変化

確率が収束し始める $t = 12.5$ 以降は拠点数が変動しなくなることが見て取れる．また，どのケースでも，計画期間終了時の CA による最適拠点配置数が，MIP の解に対して少なく算出されてることが確認できる．この原因は 2 つ考えられ，どちらも CA における利用者損失の算出のために，割り当て領域を円と仮定したことに起因する．まず，本稿の定式化では，利用者損失は拠点と施設の距離の 2 次関数として与えている．従って，距離が大きいほどその影響は大きくなり，楕円形や長方形のように縦長な割り当て領域を持つ拠点では，その長辺が施設と拠点の距離となるような拠点配置は，利用者損失の大きさに強く影響を与える．しかし CA による利用者損失の算出では，割り当て領域を円と仮定しているため，縦長な領域を持つ拠点配置は考慮されない．そのため，利用者損失が低く算出され，全体の拠点数も少なく算出された可能性がある．次に，本稿では離散データをボロノイ空間で連続関数に変換する際に，ボロノイ分割を行う領域の境界を凸包として設定している．境界を凸包とする場合，境界上に存在する施設が割り当てられる拠点の領域の形状は，施設周辺では円ではなく半円もしくは扇形に近い形となるため，割り当て領域を円と仮定して計算すると，1 つ目の原因同様，拠点と施設の距離が長くなる拠点配置を考慮することができず，利用者損失が低く見積もられることによって，拠点配置数が少なくなってしまう．

次にケースごとの最適解の違いに着目する．例えば新設費用が大きいケース 2 の場合，拠点新設費用と利用者損失のトレードオフを考慮すると，最終的な拠点配置数は他のケースに比べて少なくなることが考えられ，逆に時間価値の大きいケース 4 は利用者損失の削減のために拠点数が多くなることが考えられる．計算結果を見てみると，ケース 2 の MIP 解では，他のケースの

MIP 解と比較して最終的な拠点数が最も少なく，ケース 4 は MIP 解，CA 解どちらも最終的な拠点数が同一手法による最適解の中で最も多くなっていることが確認できる．従って，本稿の提案したモデルが利用者損失と拠点配置にかかる費用のトレードオフ関係を概ね表現できていることが言える．しかし，維持管理費用が大きいケース 3 は，維持管理費用削減のために，少ない拠点数から逐次的に拠点配置が行われることが予想されるが，計算結果はケース 1 と比較すると CA 解に逐次的な配置が見られず，供用開始時点にケース１よりも多くの拠点の配置が見られた．これは，維持管理費用の増分よりも，拠点を多く配置することによる利用者損失の減少分の方が大きいため，早期に多くの拠点が新設されたためと考えられ，維持管理費用の増加が拠点設置の逐次性を無くす，意外な結果となった．

6. おわりに

本稿では，高速道路上の ETC 施設が故障した際に発生する利用者損失と，故障時の予備部品を備蓄する拠点の新設・維持管理費用を考慮した，動的な拠点配置について検討を行なった．まず，混合整数計画問題 (MIP) として，一般的な動的施設配置問題 (DFLP) を定式化した．その目的関数に対するインプットとして，過去の点検データを用いて ETC 施設の故障過程を推定する 2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデルについて説明した．さらに，ETC 施設が故障し IC の容量が低下することで生じる待ち行列遅れ時間を利用者損失として算出する手法を定式化し同様に目的関数に対するインプットとした．次に，MIP の計算困難性の回避のために，連続体近似 (CA) による効率的な解法を提案し，CA による動的な拠点配置数の事前取得により，MIP の計算量を削減する新たな計算手法の定式化を行なった．最後に，仮想ネットワークと実際のパラメータの下で，ETC 施設を対象とした数値計算を行い，ETC 施設の故障過程や，社会的損失，拠点の配置数について定量的評価を行なった．

数値計算では，費用設定が異なる複数のパターンでの最適化計算を行い，利用者損失と拠点配置費用のトレードオフ関係を確認するとともに，維持管理費用の増加がむしろ逐次的な拠点配置を阻害する場合があることを明らかにした．また，CA を用いた提案手法が計算時間を大幅に削減することが確認でき，本稿の提案手法の有用性を明らかにした．

今後の重要な課題は，まず CA による最適解の近似精度の向上が必要であろう．例えば，利用者損失の期待値の算出については，割り当て領域の形状に対して複数のパターンを試行し，期待値算出の方法を変えることで近似精度の向上が見込めるかもしれない．また，計画領域の境界は凸包ではなく，より期待値計算に適した境界の設定手法を用いることが好ましい．

次に，本稿では CA による定式化はユークリッド距離での計算を前提としており，ネットワーク性を考慮できていない．そのため，ネットワーク距離の下での最適解は，本稿の示す最適解とは異なる．しかし，ETC 施設が存在する高速道路網はネットワーク構造をとっており，故障施設への移動や拠点配置はネットワーク性を考慮したものとなる可能性が高い．従って今後は，本稿の問題の定式化のもと，ネットワーク性を考慮した問題への拡張や再定式化を行なっていくことが求められる．これらを踏まえて，高速道路上の予備部品備蓄拠点の配置計画が算出できれば，利用者の利便性，快適性，安全性を担保した高速道路の維持管理運営に対して有用な知見が得られると期待される．

参考文献

1) 青木一也，山本浩司，小林潔司：劣化予測のためのハザードモデルの推計，土木学会論文集，No.791/VI-67, pp.111-124, 2005.
2) 貝戸清之，山本浩司，小濱健吾，岡田貢一，小林潔司：ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデル：大規模情報システムへの適用, 土木学会論文集 F，Vol.64，No.2, pp.115-129，2008.
3) 小林潔司，水谷大二郎，松島格也，山本浩司，貝戸清之, 坂口創：2 次元混合ワイブル劣化ハザードモデル，土木学会論文集 F4（建設マネジメント）, Vol. 72, No. 2, 47-62, 2016.
4) 小林潔司，江口利幸，大井明，青木一也，貝戸清之，松村泰典: 舗装構造の最適補修更新モデル，土木学会論文集 E1，Vol.68，No.2，pp.54-68，2012.
5) Smilowitz, K., and Madanat, S. (2000). Optimal inspection and maintenance policies for infrastructure networks. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 15(1), 5-13.
6) 青木一也，山本浩司，小林潔司: トンネル照明システムの最適点検・更新政策，土木学 会論文集，No.805/IV-69, pp.105-116，2005.
7) 中川岳士，川崎洋輔，梅田祥吾，水谷大二郎，生嶋理恵, 桑原雅夫: 交通流への影響を考慮した高速道路情報板故障時の利用者の社会損失分析，第 60 回土木計画学研究発表会，2019.
8) 水谷大二郎，川崎洋輔，佐津川功季，中川岳士，梅田祥吾，生嶋理恵: 利用者の経済損失を考慮した高速道路情報板の維持管理施策の簡易的評価手法，木学会論文集 D3, Vol.76, No.5, pp.I_127-I_139, 2021.
9) 佐津川功季，水谷大二郎，川崎洋輔，金田威夫，桑原雅夫，故障時交通渋滞による経済損失を考慮した ETC 設備の最適補修施策に関する研究. 土木学会論文集 D3，VOL. 78，N0.3，pp105-121，2022.
10) Ballou, R. H.: Dynamic warehouse location analysis, *J. Marketing Res*, Vol.5, No.3, pp.271–276, 1968.
11) Kusiak, A. and Keragu, S. S.: The facility layout problem, *European Journal of Operational Research*, Vol.29, pp. 229-251, 1987.
12) Arabani, A. B. and Farahani, R. Z.: Facility location dynamics: An overview of classifications and applications,*Computers Industrial Engineering*, Vol.62, Issue 1,

pp.408–420, 2012.

13) Xie, W. and Ouyang, Y.: Dynamic planning of facility locations with benefits from multitype facility colocation,*Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, Vol.28, Isuue 9, pp.666-678, 2013.
14) Schütz, P., Stougie, L. and Tomasgard, A.: Stochastic facility location with general long-run costs and convex short-run costs,*Computers Operations Research*, Vol.35, Issue 9, pp.2988-3000, 2008.
15) Snyder, L.-V.: Facility location under uncertainty: a review, *IIE Transactions*, Vol.38, Issue 7, pp.547-564, 2006.
16) Balakrishnan, J. and Cheng, C. H.: Dynamic layout algorithms: a state-of-the-art survey, *Omega, Int. J. Mgmt Sci*, Vol.26, No.4, pp.507-521, 1998.
17) 張明，大倉和博，上田完次：協調型共進化 GA による動的施設配置問題の一解法，システム制御情報学会論文誌, Vol.15, No.4, pp.167-174, 2002.
18) Jena, S. D., Cordeau, J. F. and Gendron, B.: Solving a dynamic facility location problem with partial closing and reopening, *Computers Operations Research*, Vol.67, pp.143-154, 2016.
19) Chardaire, P., Sutter, A. and Costa, M. C.: Solving the dynamic facility location problem, *Networks*, Vol.28, Issue 2, pp.117-pp.124, 1996.
20) Newell, G. F.: Scheduling, location, transportation, and continuum mechanics; Some simple approximations to optimization problems,*SIAM J. Appl. Math*, Vol.25, No.3, pp.346–36, 1973.
21) Daganzo, C. F.: *Logistics systems analysis*, 4th ed, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg , 2004.
22) Ansari, S., Başdere, M., Li, M., Ouyang, Y. and Smilowitz, K.: Review Advancements in continuous approximation models for logistics and transportation systems: 1996–2016, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.107, pp.229-252, 2018.
23) Dasci, A., Laporte, G.: An analytical approach to the facility location and capacity acquisition problem under demand uncertainty, *Journal of the Operational Research Society*, Vol.56, Issue 4, pp.397-405, 2005.
24) Li, X. and Ouyang, Y.: A continuum approximation approach to reliable facility location design under correlated probabilistic disruptions, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.44, Issue 4, Pages 535-548, 2010.
25) Wang, X. and Ouyang, Y.: A continuum approximation approach to competitive facility location design under facility disruption risks, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.50, pp.90-103, 2013.
26) Cui, T., Ouyang, Y. and Shen Z.-J. M.: Reliable facility location design under the risk of disruptions, *Operations Research*, Vol.58, No.4, part 1, pp.998–1011, 2010.
27) Peng, F., Ouyang, Y., Wang, X.: Approximation of discrete spatial data for continuous facility location design,*Integrated Comput.-Aided Engrg* Vol.21, Isuue 4, pp.311–320, 2014.
28) Bai, Y., Li, X., Peng, F., Wang, X. and Ouyang, Y.: Effects of disruption risks on biorefinery location design,*Energies*, Vol.8, Issue 2, pp.1468-1486, 2015.
29) Yun, L., Wang, X., Fan, H. and Li, X.: Reliable facility location design with round-trip transportation under imperfect information Part I: A discrete model, it Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, Vol.133, 101825, 2020.
30) Yun, L., Fan, H. and Li, X.: Reliable facility location design with round-trip transportation under imperfect information part II: A continuous model, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.124, pp.44-59, 2019.
31) Wang, X., Lim, M. and Ouyang, Y.:A continuum approximation approach to the dynamic facility location problem in a growing market,*Transportation Sci* Vol.51, No.1, pp.343–357, 2017.
32) Ouyang, Y. and Daganzo, C. F.:Discretization and validation of the continuum approximation scheme for terminal system design,*Transportation Sci* Vol.40, No.1, pp.89–98, 2006.
33) Fan, H., Yun, L., and Li, X.: A linear-time crystal-growth algorithm for discretization of continuum approximation,*Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review* vol. 161, Article ID 102715, 2022.
34) Transportation networks for research core team. *Transportation Networks for Research*, https://github.com/bstabler/TransportationNetworks, Accessed July, 30, 2022.

(Received ?)

(Accepted ?)

CONTINUUM APPROXIMATION FOR DYNAMIC LOCATION OF SPARE PARTS FOR ETC FACILITY

Shunichi FUKUYAMA, Daijiro MIZUTANI and Koki SATSUKAWA

Failure of highway facilities due to deterioration over time causes user losses such as traffic congestion. Since user loss changes depending on the time from failure to restoration, the placement of spare parts at appropriate locations for restoration can reduce user loss. In this paper, we quantitatively evaluate user loss under given failure probabilities and derive an optimal location,allocation plan for spare parts that minimizes the sum of location cost and user loss. We also propose an approximate solution method for the optimization problem based on continuum approximation to improve the efficiency of the calculation. The proposed method is applied to a hypothetical highway network and its usefulness is discussed.