

連続量を用いた多元的劣化過程モデルによる 高速道路の予防保全に向けた提案

吉田 伊織¹・貝戸 清之²

¹学生会員 大阪大学大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail: i.yoshida@civil.eng.osaka-u.ac.jp

²正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

高速道路舗装の維持管理において、表層や基層の適時修繕による路盤以下の層の保護等を通じ、長寿命化に向けた効率的な修繕の実施が提唱されており、予防保全の導入が求められている。本研究では、舗装の耐荷力指標と路面指標を対象として、連続量を用いた多元的劣化過程モデルを適用し、予防保全的な補修計画の立案に資する分析を行った。具体的には、個別劣化事象の進展過程を連続量劣化ハザードモデルを用いて表現し、管理基準値における期待寿命と各対象施設固有の劣化速度の異質性を推定した。さらに、アルキメディアン・コピュラにより劣化事象間の異質性相関構造を表現可能な多元的劣化過程モデルを用いて劣化事象ごとに存在する異質性をグループ化し、各々の特性について補修計画立案の観点から考察した。最後に、高速道路の実点検データを用いた適用事例を通して、本研究で提案する手法の有用性について検証を行った。

Key Words : *continuous deterioration hazard model, multidimensional deterioration evaluation, asset management, pavement, road surface properties*

1. はじめに

国土交通省の舗装点検要領¹⁾では、表層や基層の適時修繕による路盤以下の層の保護等を通じ、長寿命化に向けた舗装の効率的な修繕の実施が提唱されており、予防保全の導入が求められている。高速道路舗装の維持管理においては、安全性や走行快適性の観点から具備すべき性能に関する路面指標（ひび割れ率、わだち掘れ量、IRI; International Roughness Index）を路面性状調査によって定期的に獲得している。また、Falling Weight Deflectometer によるたわみ量調査（以下、FWD 調査）は、応答たわみを計測することにより舗装が有する耐荷力を評価できる。アセットマネジメントでは、このような点検データを用いた統計的劣化予測に関する研究が蓄積されており、マルコフ劣化ハザードモデル²⁾の開発を契機に、多様な条件下で利用可能な統計的劣化予測モデルが多数開発されている。例えば、管理者が設定した評価単位ごとの異質性の計量化が可能な混合マルコフ劣化ハザードモデル³⁾においては、実務への適用事例も数多くみられる。さらに、高速道路舗装における路面指標や耐荷力指標のように劣化管理指標が連続量によって表現される場合に、連続量をカテゴリーに離散化することなく直接適用可能なモデルとして連続量劣化ハザードモデル⁴⁾や、離散的健全度評価がなされた個別の劣化事象に混合マルコフ劣化ハ

ザードモデルを適用し、各劣化事象内の異質性間に介在する相関性をモデル化した多元的劣化過程モデル⁵⁾などのモデルが存在する。

本研究では、個別に獲得される連続量の劣化管理指標に基づいて、複数の指標を用いて記述される劣化過程全体をモデル化する方法論を提案する。個々の指標で記述される構造物の劣化状態間に存在する相関構造を利用することにより、複数指標で記述される社会基盤施設の劣化過程全体を推定することが可能となる。具体的には、個別の評価指標を用いた劣化過程を異質性を考慮した連続量劣化ハザードモデルにより表現するとともに、異質性パラメータの同時分布関数を表すコピュラを用いて複数指標間の相関構造を記述する。本研究で提案する方法論を用いることにより、連続量を用いた複数の劣化事象に関する劣化過程のベンチマーキングと劣化速度の相対評価および複数の劣化事象の時間的進展を同時に考慮した連続量を用いた多元的劣化過程モデルを開発する。さらに、これらの結果を用いて、社会基盤施設の多元的劣化予測や複数の劣化事象の特性を考慮した維持補修戦略の検討のために有用な情報を作成するための方法論を提案する。以下、2. で本研究の基本的な考え方を述べ、3. で連続量を用いた多元的劣化過程モデルを提案し、4. で MCMC を用いたモデルの推定手法について詳述する。

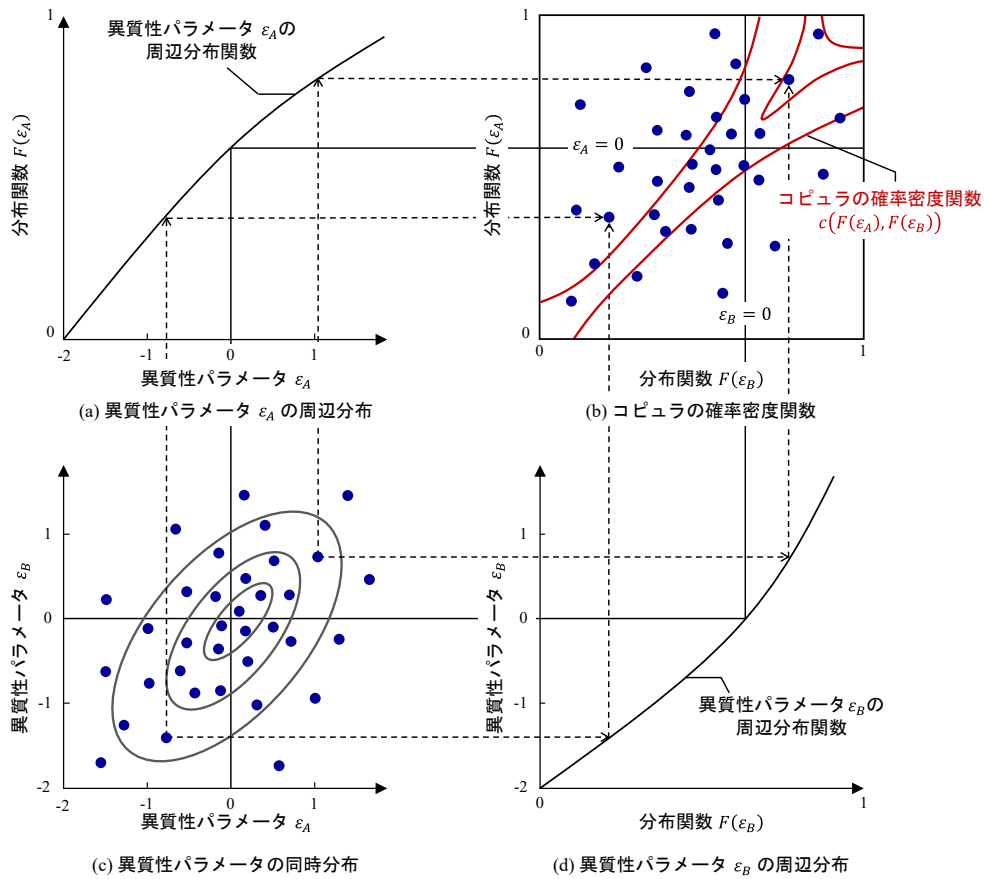


図-1 異質性パラメータの同時分布とコピュラ

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 構造物劣化速度の多元的評価

従来より、単一の健全度指標に基づいて構造物の劣化過程を表現する研究が蓄積されている。例えば、舗装の劣化過程に関しては、1) ひび割れ、わだち掘れ、平坦性という個別劣化事象を MCI 指標という単一の評価指標に総合化するとともに、1元化された総合化指標の時間的変化をモデル化する方法、2) ひび割れ、わだち掘れ、平坦性という個別劣化事象のみに着目し、それぞれの劣化事象の経年的変化をモデル化する方法が採用されてきた。しかしながら、社会基盤施設の劣化過程には、多様な劣化要因が介在するために、1) 構造物によっては、ある単一の劣化事象が卓越する場合や、2) 複数の劣化事象が互いに相互作用を及ぼしながら劣化が進展する場合などがある。現実に観測される点検データには、このような複数の場合が混在する。このため、1つの健全度として総合化されたデータを用いた場合、その健全度がどの劣化事象の状況を表しているのかという情報は獲得できない。また、単一の劣化事象を用いた劣化過程モデルでは、社会基盤施設ごとによる劣化事象の異質性や、劣化事象間の相関性を表現できないという限界が存在する。

本研究で提案する連続量を用いた多元的劣化過程モデルは、構造物の劣化管理指標が連続量として表現される場合に適用可能である。単一の劣化事象に関して、構造物カテゴリーにより劣化メカニズムが多様に異なることに着目し、劣化速度の異質性を明示的に考慮した連続量劣化ハザードモデルを用いて、着目している劣化事象の進行過程を表現する。連続量劣化ハザードモデルでは、ベースラインモデルをベンチマーキングケースとして、構造物カテゴリーの異質性を異質性パラメータ ε により表現する。異質性パラメータ ε が確率密度関数 $f(\varepsilon)$ に従って分布する場合、個々の構造物カテゴリーの劣化速度を相対的に評価することが可能となる。すなわち、 $\varepsilon = 0$ の場合がベンチマーキングケースに該当し、 $\varepsilon > 0$ のサンプルはベンチマーキングケースより相対的に劣化が早い構造物カテゴリーとして、 $\varepsilon < 0$ の場合は劣化が遅いカテゴリーとして相対評価することが可能となる。

(2) コピュラによる相関構造のモデル化

社会基盤施設の劣化状態を複数の劣化管理指標で評価する場合、それぞれの劣化事象に関する劣化速度の異質性を表す異質性パラメータが互いに相関構造を持つ可能性が存在する。本研究では、多変量周辺分布間

の依存構造を表現するためにコピュラ⁶⁾を用いる。コピュラは、複数の確率変数の周辺分布関数とそれらの同時分布関数を接合する関数であり、多変量周辺分布の確率構造を維持しながら、同時分布関数を推定できる点に特徴がある。図-1 は、複数の社会基盤施設の劣化状態を 2 種類の劣化事象 A, B を用いて評価する場合を想定し、コピュラ、異質性パラメータの周辺分布、同時分布の関係を模式的に示している。(a) と (d) は各異質性パラメータの周辺分布関数であり、それぞれの劣化事象の劣化速度に関する相対評価を行うことができる。(c) は、横軸に異質性パラメータ ε_A 、縦軸に異質性パラメータ ε_B を用いて、異質性パラメータの組 $(\varepsilon_A, \varepsilon_B)$ を 2 次元空間上にプロットした同時分布である。このような異質性パラメータの空間的分布状態に関する情報を用いることにより、異質性パラメータ間の相関関係による傾向把握に加えて、個別の劣化事象に関する劣化速度を踏まえた総合評価を行うことが可能になる。例えば、2 種類の劣化事象を対象とする 2 次元空間上においては、構造物の劣化特性を各象限の 4 つのカテゴリー群に分類することができる。第 1 象限は 2 つの劣化事象がともにベンチマーキングケースより劣化速度が相対的に早いカテゴリー群、第 2 象限と第 4 象限はそれぞれ劣化事象 A, B の進行が卓越しているカテゴリー群、第 3 象限はベンチマーキングケースより劣化の進展が遅いカテゴリー群として評価できる。さらに、(b) に表されるコピュラと各異質性の周辺分布関数を用いて推定が可能な異質性パラメータの同時確率密度関数から、一方の異質性パラメータが既知である場合の、他方の異質性パラメータが生起する条件付き確率密度を算出できる。

3. 連続量を用いた多元的劣化過程モデル

(1) 連続量劣化ハザードモデル

いま、対象とする施設 i ($i = 1, \dots, I$) の劣化管理指標を x_i 、直近の建設(更新)時点からの経過時間を t_i と表す。劣化が進行するほど劣化指標値は大きな値をとると考える。劣化プロセスの進行過程を

$$x_i = \exp(-B_i) f(t_i, \beta) \quad (1a)$$

$$B_i = \mathbf{z}_i \boldsymbol{\theta}' + \varepsilon_i + \sigma w_i \quad (1b)$$

$$(i = 1, \dots, I)$$

と定式化する。ここで、 B_i は施設 i の劣化特性係数であり、式 (1b) に示すように特性変数項 $\mathbf{z}_i \boldsymbol{\theta}'$ と異質性 ε_i 、誤差項 σw_i の和で表せる。式 (1b) において、 $\mathbf{z}_i = (z_i^1, \dots, z_i^M)$ は施設 i の劣化に影響を及ぼす特性変数ベクトル、 $\boldsymbol{\theta} = (\theta^1, \dots, \theta^M)$ は特性パラメータベクトル、 ε_i は施設 i が属するグループにおける固有な劣化

速度を表現する異質性パラメータ、 w_i は施設 i に固有な劣化要因を表す確率誤差項、 σ は偏差パラメータを表す。また、 $f(t_i, \beta)$ はベースラインの劣化過程を表す劣化モデル(以下、ベースラインモデル)であり、 t_i に関して単調増加関数である。また、 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ はベースラインモデルを特徴づける未知パラメータベクトルである。 $\exp(-B_i) = 1$ が成立する場合、劣化曲線はベースラインモデルに一致する。力学的モデルにより理論的曲線を導出できる場合には、理論的曲線をベースラインモデルとして用いることができる。理論モデルが存在しない場合、例えばフレキシブル関数を用いてベースラインモデルを近似的に表現することが必要となる。

式 (1a) の両辺の対数をとれば、

$$\begin{aligned} y_i &= \ln f(t_i, \beta) \\ &= \ln x_i + \mathbf{z}_i \boldsymbol{\theta}' + \varepsilon_i + \sigma w_i \quad (i = 1, \dots, I) \end{aligned} \quad (2)$$

を得る。ただし、 $y_i = \ln f(t_i, \beta)$ は非線形化された寿命インデックスである。確率変動項 w_i が確率密度関数

$$g_w(w_i) = \exp\{-w_i - \exp(-w_i)\} \quad (3)$$

で表現される標準ガンベル分布に従うと仮定する。ただし、 $E(w_i) = \gamma$ であり、 $\gamma (= 0.57722\dots)$ はオイラー定数である。式 (2) を

$$w_i = \frac{y_i - \ln x_i - \mathbf{z}_i \boldsymbol{\theta}' - \varepsilon_i}{\sigma} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4)$$

と書き直し、確率密度関数(式 (3))の変数変換を行う。その結果、劣化特性 \mathbf{z}_i を有する施設 i の劣化管理指標値が x_i に到達するまでの寿命インデックス y_i の条件付き分布を表す確率密度関数は、

$$\begin{aligned} h_y(y_i | x_i, \mathbf{z}_i) &= \frac{1}{\sigma} g_w \left(\frac{y_i - \ln x_i - \mathbf{z}_i \boldsymbol{\theta}' - \varepsilon_i}{\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{y_i - \ln x_i - \mathbf{z}_i \boldsymbol{\theta}' - \varepsilon_i}{\sigma} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{y_i - \ln x_i - \mathbf{z}_i \boldsymbol{\theta}' - \varepsilon_i}{\sigma} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

と表すことができる。寿命インデックス $y_i = \ln f(t_i, \beta)$ には未知パラメータ β が含まれている。寿命インデックスの 1 階微分を $\dot{f}(t_i, \beta) = df(t_i, \beta)/dt_i$ と表記すれば、

$$dy_i = \frac{\dot{f}(t_i, \beta)}{f(t_i, \beta)} dt_i \quad (6)$$

が成立する。したがって、管理水準 x_i に到達するまでの実寿命 t_i の条件付き分布を表す確率密度関数は、

$$\begin{aligned} \tau(t_i | x_i, \mathbf{z}_i) &= \frac{\dot{f}(t_i)}{\sigma f(t_i)} \\ &\cdot \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{\ln f(t_i) - \ln x_i - \mathbf{z}_i \boldsymbol{\theta}' - \varepsilon_i}{\sigma} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\ln f(t_i) - \ln x_i - \mathbf{z}_i \boldsymbol{\theta}' - \varepsilon_i}{\sigma} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

と表される．式 (3) より生存関数は，

$$\begin{aligned} S_w(w_i) &= 1 - \int_{-\infty}^{w_i} g_w(w) dw \\ &= 1 - \exp\{-\exp(-w_i)\} \end{aligned} \quad (8)$$

と表現される．劣化特性 z_i を有する施設 i において，寿命インデックス y_i が経過した時点で，劣化管理指標値が x_i まで到達していない確率は，生存関数

$$\begin{aligned} S_y(y_i|x_i, z_i) &= S_w\left(\frac{y_i - \ln x_i - z_i \theta' - \varepsilon_i}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \exp\left\{-\exp\left(-\frac{y_i - \ln x_i - z_i \theta' - \varepsilon_i}{\sigma}\right)\right\} \end{aligned} \quad (9)$$

を用いて表現できる．さらに，実経過時間 t_i に関する生存関数は，次式で表される．

$$\begin{aligned} S_t(t_i|x_i, z_i) &= 1 - \exp\left\{-\exp\left(-\frac{\ln f(t_i) - \ln x_i - z_i \theta' - \varepsilon_i}{\sigma}\right)\right\} \end{aligned} \quad (10)$$

このように，連続量劣化ハザードモデルに対して生存関数 (式 (10)) を導出することができる．

(2) 多元的劣化事象の相関構造

ある構造物カテゴリー $k (= 1, \dots, K)$ における D 種類の劣化事象の異質性パラメータ ε_d^k の同時確率分布をコピュラ C を用いて表す．コピュラの概要を以下に説明する．詳細については参考文献^{6),7)}を参照されたい．周辺分布関数 F_1, \dots, F_D を持つ D 個の確率変数 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_D$ の連続な同時分布関数を $F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_D)$ とすると，スクラーの定理⁸⁾より，

$$F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_D) = C(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D)) \quad (11)$$

を満たすコピュラ C が一意に存在する．コピュラ C に周辺分布 F_1, \dots, F_D を適用することによって生成される $C(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D))$ は，周辺分布を区間 $[0, 1]$ とする同時分布関数である．また，

- 任意の $u_d = F_d(\varepsilon_d) \in [0, 1]$ ($d = 1, \dots, D$) について， $C(u_1, \dots, u_{d-1}, 0, u_{d+1}, \dots, u_D) = 0$
- 任意の $u_d = F_d(\varepsilon_d) \in [0, 1]$ ($d = 1, \dots, D$) について， $C(1, \dots, 1, u_d, 1, \dots, 1) = u_d$
- $u_d^1 \leq u_d^2$ を満たす全ての $(u_1^1, \dots, u_D^1), (u_1^2, \dots, u_D^2) \in [0, 1]^D$ に対して， $\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_D=1}^2 (-1)^{\sum_{s=1}^D i_s} C(u_1^{i_1}, \dots, u_D^{i_D}) \geq 0$

の3つの性質を全て満たすような関数 C がコピュラとして定義される．このとき，個々の劣化事象の異質性パラメータベクトル $\varepsilon_d = (\varepsilon_d^1, \dots, \varepsilon_d^K)$ の同時確率密度関数 $f(\varepsilon)$ は，コピュラの分布関数 $C(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D))$ あ

るいは確率密度関数 $c(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D))$ を用いて，

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= \frac{\partial^D C(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D))}{\partial F_1(\varepsilon_1) \dots \partial F_D(\varepsilon_D)} \prod_{d=1}^D f_d(\varepsilon_d) \\ &= c(F_1(\varepsilon_1), \dots, F_D(\varepsilon_D)) \prod_{d=1}^D f_d(\varepsilon_d) \end{aligned} \quad (12)$$

と表現できる．なお， $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_D)$ であり，式 (12) は，構造物カテゴリーの違いに起因した異質性パラメータ $(\varepsilon_1^k, \dots, \varepsilon_D^k)$ ($k = 1, \dots, K$) の同時分布における同時確率密度を示している．ここに， f_d は周辺分布関数 F_d の確率密度関数であり，ガンベル分布

$$f_d(\varepsilon_d) = \exp\{-\varepsilon_d - \exp(-\varepsilon_d)\} \quad (13)$$

を仮定する．

周辺分布に関する情報を用いて同時確率分布を表現するために様々なコピュラが提案されている．本研究では，金融工学の分野での使用実績が十分にあり，乱数発生方法が知られているなど実務的にも扱いやすい，1 パラメータ・アルキメディアン・コピュラ⁷⁾を用いる．周辺分布関数をそれぞれ $F_1(x_1) = u_1, \dots, F_d(x_d) = u_d, \dots, F_D(x_D) = u_D$ とする D 変量間の1パラメータ・アルキメディアン・コピュラの分布関数 $C(u_1, \dots, u_D)$ は，生成関数 $\zeta(u_d)$ を用いて，

$$C(u_1, \dots, u_D) = \zeta^{-1}\left(\sum_{d=1}^D \zeta(u_d)\right) \quad (14)$$

と表現できる．アルキメディアン・コピュラにおいて，

$$C(1, \dots, 1, u_{d_1}, 1, \dots, 1, u_{d_2}, 1, \dots, 1) = C(u_{d_1}, u_{d_2}) \quad (15)$$

が成り立つ．本研究の実証分析においては，アルキメディアン・コピュラとしてガンベル・コピュラ⁹⁾，クレイトン・コピュラ¹⁰⁾，フランク・コピュラ¹¹⁾の3種類のコピュラをとりあげる．表-1にガンベル・コピュラ，クレイトン・コピュラ，フランク・コピュラの生成関数，分布関数，確率密度関数を示している．ただし，ガンベル・コピュラ，フランク・コピュラの変量確率密度関数は一般的な形で表現することが困難であり，変量数に応じて，随時，分布関数を偏微分することにより求める．また，ガンベル・コピュラのパラメータは $\alpha \in (1, \infty)$ ，クレイトン・コピュラ，フランク・コピュラのパラメータは $\alpha \in (0, \infty)$ を満たす．コピュラの選定方法として，Breyman et al.¹²⁾ は，パラメータ数の異なるコピュラ間での選定を考慮し，情報量規準によるコピュラの選定を提案している．本研究では情報量規準として，統計モデルが正則でない場合にも漸近的に汎化損失と等しい期待値と分散を持ち，複雑な構造を持つモデルの評価指標に適している Widely Applicable Information Criteria (WAIC)¹³⁾を採用し，コピュラ選定を行った．

表-1 代表的なアルキメディアン・コピュラ

コピュラ	生成関数 $\zeta(u_d)$	分布関数 $C(u_1, \dots, u_D)$	確率密度関数 $c(u_1, \dots, u_D) = \frac{\partial^D C(u_1, \dots, u_D)}{\partial u_1 \dots \partial u_D}$
ガンベル $\alpha \in (1, \infty)$	$(-\ln u_d)^\alpha$	$\exp[-\{\sum_{d=1}^D (-\ln u_d)^\alpha\}^{\frac{1}{\alpha}}]$	一般形が存在しないため 分布関数を随時偏微分
クレイトン $\alpha \in (0, \infty)$	$\frac{1}{\alpha}(u_d^{-\alpha} - 1)$	$(\sum_{d=1}^D u_d^{-\alpha} - D + 1)^{-\frac{1}{\alpha}}$	$\{\prod_{d=1}^{D-1} (1 + d\alpha)\}(\prod_{d=1}^D u_d^{-\alpha-1})$ $(\sum_{d=1}^D u_d^{-\alpha} - D + 1)^{-\frac{1}{\alpha}-D}$
フランク $\alpha \in (0, \infty)$	$\ln\{\exp(-\alpha u_d) - 1\}$ $-\ln\{\exp(-\alpha) - 1\}$	$-\frac{1}{\alpha} \ln \left[1 + \frac{\prod_{d=1}^D \{\exp(-\alpha u_d) - 1\}}{\{\exp(-\alpha) - 1\}^{D-1}} \right]$	一般形が存在しないため 分布関数を随時偏微分

4. 推計手法

(1) 事前確率密度関数の設定

本研究では、ベイズ推計手法を用いて連続量を用いた多元的劣化過程モデルに含まれる全ての未知パラメータを推計する方法を提案する。いま、尤度関数を $\mathcal{L}(\phi|\Xi)$ と表す。ここで、パラメータベクトル ϕ が確率変数で、事前確率密度関数 $\rho(\phi)$ に従うと仮定する。目視点検データ Ξ が与件であるとき、未知パラメータベクトル ϕ の同時事後確率密度関数 $\Pi(\phi|\Xi)$ はベイズの定理より、

$$\Pi(\phi|\Xi) = \frac{\mathcal{L}(\phi|\Xi)\rho(\phi)}{\int_{\Theta} \mathcal{L}(\phi|\Xi)\rho(\phi)d\phi} \quad (16)$$

と表すことができる。ただし、 Θ はパラメータ空間である。このとき、式 (16) の分母は基準化定数であることから、同時事後確率密度関数 $\Pi(\phi|\Xi)$ は

$$\Pi(\phi|\Xi) \propto \mathcal{L}(\phi|\Xi)\rho(\phi) \quad (17)$$

と表される。事前確率密度関数 $\rho(\phi)$ を、

$$\begin{aligned} \rho(\phi) &= \rho(\beta, \theta, \varepsilon, \sigma, \alpha) \\ &= \prod_{d=1}^D \prod_{e_1=1}^{N_d^\beta} \rho_\beta(\beta_{d,e_1}) \\ &\quad \cdot \prod_{d=1}^D \rho_\theta(\theta_d) \rho_\varepsilon(\varepsilon_d) \rho_\sigma(\sigma_d) \cdot \rho_\alpha(\alpha) \end{aligned} \quad (18)$$

と展開する。ただし、 $d(d=1, \dots, D)$ における β_d のパラメータ数を N_d^β とおく。式 (18) のように、連続量を用いた多元的劣化過程モデルの事前確率密度関数は、ベースラインモデルパラメータ β_{d,e_1} の事前確率密度関数 $\rho_\beta(\beta_{d,e_1})$ 、特性変数のパラメータベクトル θ_d の事前確率密度関数 $\rho_\theta(\theta_d)$ 、異質性パラメータベクトルの事前確率密度関数 $\rho_\varepsilon(\varepsilon_d)$ 、偏差パラメータ σ_d の事前確率密度関数 $\rho_\sigma(\sigma_d)$ 、コピュラの未知パラメータ α の事前確率密度関数 $\rho_\alpha(\alpha)$ で構成される。まず、事前確率密度関数 $\rho_\beta(\beta_{d,e_1})$ について、ベースラインモデルの関数により β_{d,e_1} の定義域が、1) $(-\infty, \infty)$ 、もしくは 2) $[0, \infty)$ という 2 つの場合が起こり得る。事前分布として、前者のパラメータに対しては正規分布を用いて、 $\beta_{d,e_1} \sim \mathcal{N}(a_{\beta_{d,e_1}}, b_{\beta_{d,e_1}})$ 、後者のパラメータに

対してはガンマ分布を用いて、 $\beta_{d,e_1} \sim \mathcal{G}(a_{\beta_{d,e_1}}, b_{\beta_{d,e_1}})$ とする。ただし、 $a_{\beta_{d,e_1}}$ は、正規分布の期待値またはガンマ分布の形状パラメータ、 $b_{\beta_{d,e_1}}$ は、正規分布の分散またはガンマ分布の尺度パラメータを表す。また、 $\theta_d \sim \mathcal{N}_I(\mathbf{a}_{\theta_d}, \mathbf{b}_{\theta_d})$ とし、 \mathbf{a}_{θ_d} は期待値ベクトル、 \mathbf{b}_{θ_d} は分散共分散行列である。 ε_d も同様に $\varepsilon_d \sim \mathcal{N}_I(\mathbf{a}_{\varepsilon_d}, \mathbf{b}_{\varepsilon_d})$ とする。 σ_d はガンマ分布を用いて、 $\sigma_d \sim \mathcal{G}(a_{\sigma_d}, b_{\sigma_d})$ とする。次に、コピュラの未知パラメータ α の事前確率密度関数を設定する。表-1 に示したように、コピュラの種類によりパラメータ α の定義域が異なるため、コピュラ毎に具体的な事前分布を設定する必要がある。本研究では、 $\alpha \in (0, \infty)$ の制約があるクレイトン・コピュラ、フランク・コピュラについて、 α の事前分布としてガンマ分布 $\mathcal{G}(a_\alpha, b_\alpha)$ を設定する。 $\alpha \in (1, \infty)$ の制約があるガンベル・コピュラに関しては $u = \alpha - 1$ と変数変換し、 $u \sim \mathcal{G}(a_\alpha, b_\alpha)$ とする。ただし、これらの事前確率密度関数が推計結果に与える影響は、点検データの増加に伴い薄れていく。階層ベイズモデルに対しては代表的な MCMC 法であるギブスサンプリング法やメトロポリス・ヘイスティング法 (以下、MH 法) を組み合わせて事後分布を算出する階層ベイズ推計が提案されている。

(2) 同時事後確率密度関数の定式化

構造物カテゴリー k の構造物を l_k ($l_k = 1, \dots, L_k$) とおき、未知パラメータベクトル $\phi = (\beta, \theta, \varepsilon, \sigma, \alpha)$ を与件とする。また、ベイズの定理 (式 (17)) より、全点検データ Ξ の同時生起確率密度関数 (尤度関数) と事前確率密度関数 (式 (18)) を用いて同時事後確率密度関数 $\Pi(\phi|\Xi)$ を定式化する。なお、本研究で取り扱う 3 種類のコピュラでは、パラメータの定義域が異なるため、コピュラの種類毎に具体的な事後確率密度関数を定式化する。まず、パラメータに $\alpha \in (0, \infty)$ の制約があるクレイトン・コピュラ、フランク・コピュラを用いたときの同時事後確率密度関数 $\Pi(\phi|\Xi)$ は、

後確率密度関数 $\Pi(\beta_{d,e_1} | \beta_{-d,e_1}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha, \bar{\Xi})$ は,

$$\begin{aligned}
& \Pi(\phi | \bar{\Xi}) \\
& \propto \mathcal{L}(\phi | \bar{\Xi}) \rho(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}_d, \alpha) \\
& \propto \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \left[\tilde{c}(\hat{\mathbf{F}}^k(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^k)) \prod_{d=1}^D \prod_{i=1}^{I_d^{l_k}} \prod_{h=1}^{H_i} \frac{f(\bar{t}_h^i)}{\sigma_d f(\bar{t}_h^i)} \right. \\
& \quad \cdot \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{\ln f(\bar{t}_h^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'_d - \varepsilon_d^k}{\sigma_d} \right) \right. \\
& \quad \quad \left. \left. - \frac{\ln f(\bar{t}_h^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'_d - \varepsilon_d^k}{\sigma_d} \right\} \right] \\
& \quad \cdot \prod_{d=1}^D \left[\prod_{e_1=1}^{N_d^\beta} \left[\exp \left\{ - \frac{(\beta_{d,e_1} - a_{\beta_{d,e_1}})^2}{2b_{\beta_{d,e_1}}} \right\} \right]^{\psi_{d,e_1}} \right. \\
& \quad \cdot \left\{ \beta_{d,e_1}^{a_{\beta_{d,e_1}} - 1} \exp \left(- \frac{\beta_{d,e_1}}{b_{\beta_{d,e_1}}} \right) \right\}^{1 - \psi_{d,e_1}} \\
& \quad \cdot \exp \left\{ - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}_d - \mathbf{a}_{\boldsymbol{\theta}_d}) \mathbf{b}_{\boldsymbol{\theta}_d}^{-1} (\boldsymbol{\theta}_d - \mathbf{a}_{\boldsymbol{\theta}_d})' \right\} \\
& \quad \cdot \exp \left\{ - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_d - \mathbf{a}_{\boldsymbol{\varepsilon}_d}) \mathbf{b}_{\boldsymbol{\varepsilon}_d}^{-1} (\boldsymbol{\varepsilon}_d - \mathbf{a}_{\boldsymbol{\varepsilon}_d})' \right\} \\
& \quad \cdot \left\{ \sigma_d^{a_{\sigma_d} - 1} \exp \left(- \frac{\sigma_d}{b_{\sigma_d}} \right) \right\} \\
& \quad \cdot \frac{\alpha^{a_\alpha - 1}}{(b_\alpha)^{a_\alpha} \Gamma(a_\alpha)} \exp \left(- \frac{\alpha}{b_\alpha} \right) \quad (19)
\end{aligned}$$

と定式化することができる。ただし、 ψ_{d,e_1} は、劣化事象 d において使用する e_1 番目のベースラインモデルパラメータの定義域が $(-\infty, \infty)$ のときには 1 を、 $[0, \infty)$ のときには 0 をとるダミー変数である。パラメータに $\alpha \in (1, \infty)$ の制約があるガンベル・コピュラを用いたときの同時事後確率密度関数 $\Pi(\phi | \bar{\Xi})$ は、式 (19) において $\rho_\alpha(\alpha)$ を

$$\rho_\alpha(\alpha) = \frac{(\alpha - 1)^{a_\alpha - 1}}{(b_\alpha)^{a_\alpha} \Gamma(a_\alpha)} \exp \left(- \frac{\alpha - 1}{b_\alpha} \right) \quad (20)$$

と置換すればよい。

(3) 同時事後確率密度関数の推計

連続量を用いた多元的劣化過程モデルの各パラメータの条件付き事後確率密度関数を利用して同時事後確率密度関数を導出する。ベースラインパラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}$ から β_{d,e_1} ($e_1 = 1, \dots, N_d^\beta$) を除いたベクトルを $\boldsymbol{\beta}_{-d,e_1}$ と表す。同様に、特性パラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ から $\boldsymbol{\theta}_{d,e_2}$ ($e_2 = 1, \dots, N_d^\theta$) を除いたベクトルを $\boldsymbol{\theta}_{-d,e_2}$ 、異質性パラメータベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ から $\boldsymbol{\varepsilon}_{d,e_3}$ ($e_3 = 1, \dots, N_d^\varepsilon$) を除いたベクトルを $\boldsymbol{\varepsilon}_{-d,e_3}$ と表す。ただし、 d ($d = 1, \dots, D$) における $\boldsymbol{\beta}_d, \boldsymbol{\theta}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_d$ のパラメータ数をそれぞれ $N_d^\beta, N_d^\theta, N_d^\varepsilon$ とする。また、式 (19) より、 $\boldsymbol{\beta}_{-d,e_1}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha$ を既知とした時の β_{d,e_1} の条件付き事

$$\begin{aligned}
& \Pi(\beta_{d,e_1} | \beta_{-d,e_1}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha, \bar{\Xi}) \\
& \propto \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \prod_{d=1}^D \prod_{i=1}^{I_d^{l_k}} \prod_{h=1}^{H_i} \frac{f(\bar{t}_h^i)}{f(\bar{t}_h^i)} \\
& \quad \cdot \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{\ln f(\bar{t}_h^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'_d - \varepsilon_d^k}{\sigma_d} \right) \right. \\
& \quad \quad \left. - \frac{\ln f(\bar{t}_h^i)}{\sigma_d} \right\} \\
& \quad \cdot \prod_{d=1}^D \left[\prod_{e_1=1}^{N_d^\beta} \left[\exp \left\{ - \frac{(\beta_{d,e_1} - a_{\beta_{d,e_1}})^2}{2b_{\beta_{d,e_1}}} \right\} \right]^{\psi_{d,e_1}} \right. \\
& \quad \cdot \left\{ \beta_{d,e_1}^{a_{\beta_{d,e_1}} - 1} \exp \left(- \frac{\beta_{d,e_1}}{b_{\beta_{d,e_1}}} \right) \right\}^{1 - \psi_{d,e_1}} \quad (21)
\end{aligned}$$

と表せる。

$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_{-d,e_2}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha$ を既知とした時の $\boldsymbol{\theta}_{d,e_2}$ の条件付き事後確率密度関数 $\Pi(\boldsymbol{\theta}_{d,e_2} | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_{-d,e_2}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha, \bar{\Xi})$ は、

$$\begin{aligned}
& \Pi(\boldsymbol{\theta}_{d,e_2} | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_{-d,e_2}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha, \bar{\Xi}) \\
& \propto \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \prod_{d=1}^D \prod_{i=1}^{I_d^{l_k}} \prod_{h=1}^{H_i} \frac{f(\bar{t}_h^i)}{f(\bar{t}_h^i)} \\
& \quad \cdot \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{\ln f(\bar{t}_h^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'_d - \varepsilon_d^k}{\sigma_d} \right) \right. \\
& \quad \quad \left. - \frac{\bar{z}_i \boldsymbol{\theta}_i}{\sigma_d} \right\} \\
& \quad \cdot \prod_{d=1}^D \exp \left\{ - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}_d - \mathbf{a}_{\boldsymbol{\theta}_d}) \mathbf{b}_{\boldsymbol{\theta}_d}^{-1} (\boldsymbol{\theta}_d - \mathbf{a}_{\boldsymbol{\theta}_d})' \right\} \quad (22)
\end{aligned}$$

と表せる。

$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon}_{-d,e_3}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha$ を既知とした時の $\boldsymbol{\varepsilon}_{d,e_3}$ の条件付き事後確率密度関数 $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}_{d,e_3} | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon}_{-d,e_3}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha, \bar{\Xi})$ は、

$$\begin{aligned}
& \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}_{d,e_3} | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon}_{-d,e_3}, \boldsymbol{\sigma}_d, \alpha, \bar{\Xi}) \\
& \propto \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \prod_{d=1}^D \prod_{i=1}^{I_d^{l_k}} \prod_{h=1}^{H_i} \frac{f(\bar{t}_h^i)}{f(\bar{t}_h^i)} \\
& \quad \cdot \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{\ln f(\bar{t}_h^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \boldsymbol{\theta}'_d - \varepsilon_d^k}{\sigma_d} \right) \right. \\
& \quad \quad \left. - \frac{\varepsilon_d^k}{\sigma_d} \right\} \\
& \quad \cdot \prod_{d=1}^D \exp \left\{ - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_d - \mathbf{a}_{\boldsymbol{\varepsilon}_d}) \mathbf{b}_{\boldsymbol{\varepsilon}_d}^{-1} (\boldsymbol{\varepsilon}_d - \mathbf{a}_{\boldsymbol{\varepsilon}_d})' \right\} \quad (23)
\end{aligned}$$

と表せる。

$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}_{-d}, \alpha$ を既知としたときの σ_d の条件付き事

後確率密度関数 $\Pi(\sigma_d|\beta, \theta, \varepsilon, \sigma_{-d}, \alpha, \Xi)$ は,

$$\begin{aligned} & \Pi(\sigma_d|\beta, \theta, \varepsilon, \sigma_{-d}, \alpha, \Xi) \\ & \propto \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \prod_{d=1}^D \prod_{i=1}^{I_d^{l_k}} \prod_{h=1}^{H_i} \frac{1}{\sigma_d} \\ & \cdot \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{\ln f(\bar{l}_h^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \theta'_d - \varepsilon_d^k}{\sigma_d} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\ln f(\bar{l}_h^i) - \ln \bar{x}_h^i - \bar{z}_i \theta'_d - \varepsilon_d^k}{\sigma_d} \right\} \\ & \cdot \prod_{d=1}^D \left\{ \sigma_d^{a_{\sigma_d}-1} \exp \left(- \frac{\sigma_d}{b_{\sigma_d}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

と表せる。

コピュラのパラメータ α に関して, $\beta, \theta, \varepsilon, \sigma$ を既知としたときの α の条件付き事後確率密度関数 $\Pi(\alpha|\beta, \theta, \varepsilon, \sigma, \Xi)$ を定式化する. まず, クレイトン・コピュラ, ガンベル・コピュラ ($\alpha \in (0, \infty)$) を用いたとき,

$$\begin{aligned} & \Pi(\alpha|\beta, \theta, \varepsilon, \sigma, \Xi) \\ & \propto \prod_{k=1}^K \left\{ \tilde{c}(\hat{F}^k(\varepsilon^k)) \right\}^{L_k} \alpha^{a_\alpha-1} \exp \left(- \frac{\alpha}{b_\alpha} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

と表せる. また, フランク・コピュラ ($\alpha \in (1, \infty)$) を用いたとき,

$$\begin{aligned} & \Pi(\alpha|\beta, \theta, \varepsilon, \sigma, \Xi) \\ & \propto \prod_{k=1}^K \left\{ \tilde{c}(\hat{F}^k(\varepsilon^k)) \right\}^{L_k} (\alpha - 1)^{a_\alpha-1} \exp \left(- \frac{\alpha - 1}{b_\alpha} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

と表せる。

条件付き事後確率密度関数 (式 (21)-式 (26)) を用いた具体的な推計手順を図-2 に示している. 推計手順は以下のステップで構成される.

ステップ 1 先験的情報を用いて事前分布のパラメータ値 $a_\beta, b_\beta, a_\theta, b_\theta, a_\varepsilon, b_\varepsilon, a_\sigma, b_\sigma, a_\alpha, b_\alpha$, 未知パラメータの初期値 $\phi^{(0)} = (\beta^{(0)}, \theta^{(0)}, \sigma^{(0)}, \varepsilon^{(0)}, \alpha^{(0)})$ を設定する. さらに, バーンイン期間およびサンプリング回数を \underline{n}, \bar{n} とする. 初期値の影響はサンプリング数の増加とともに薄れていく.

ステップ 2 未知パラメータ $\phi^{(n)}$ ($n = 1, \dots, \bar{n}$) を以下の手順でサンプリングする.

ステップ 2-1 ベースラインパラメータ $\beta_{d,e_1}^{(n)}$ を条件付き事後確率密度関数 $\Pi(\beta_{d,e_1}^{(n)} | \beta_{-d,e_1}^{(n-1)}, \theta^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \sigma^{(n-1)}, \alpha^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする. $e_1 = N_d^\beta$ の場合, **ステップ 2-2** へ進む. そうでない場合は, **ステップ 2-1** に戻る.

ステップ 2-2 特性パラメータ $\theta_{d,e_2}^{(n)}$ を $\Pi(\theta_{d,e_2}^{(n)} | \beta^{(n-1)}, \theta_{-d,e_2}^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \sigma^{(n-1)}, \alpha^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする. $e_2 = N_d^\theta$ の場合, **ステップ 2-3** へ進む. そうでない場合は, **ステップ 2-1** に戻る.

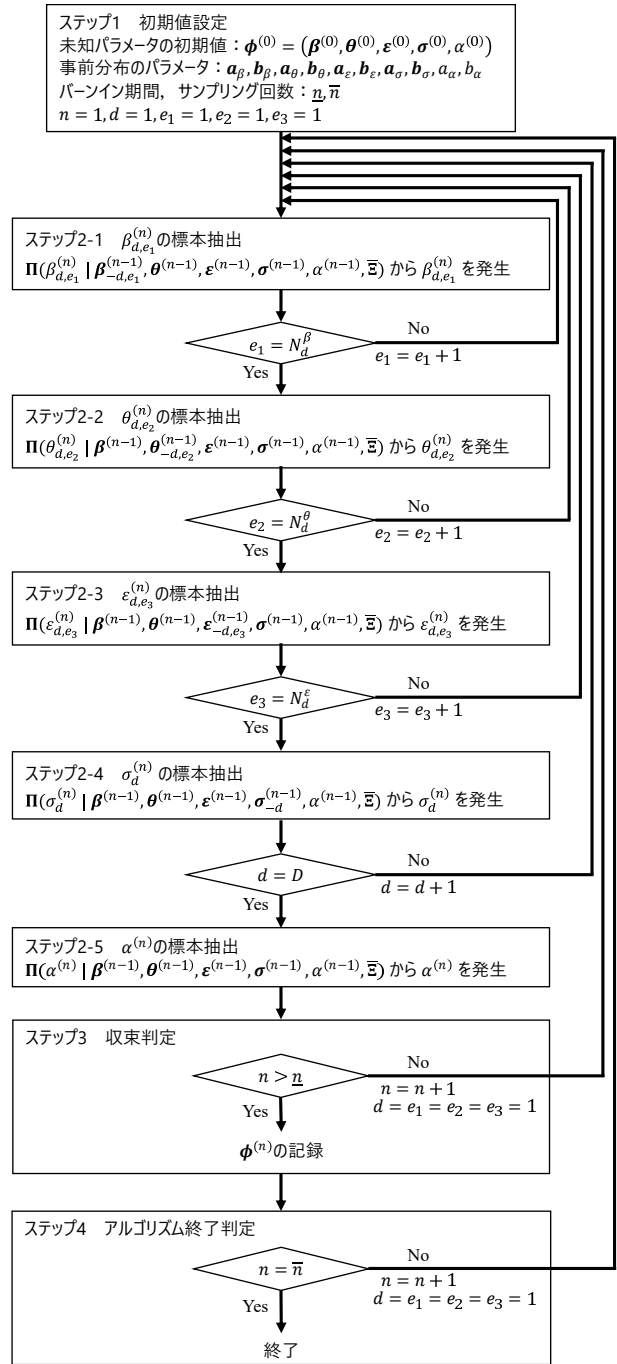


図-2 推計アルゴリズム

ステップ 2-3 異質性パラメータ $\varepsilon_{d,e_3}^{(n)}$ を $\Pi(\varepsilon_{d,e_3}^{(n)} | \beta^{(n-1)}, \theta^{(n-1)}, \varepsilon_{-d,e_3}^{(n-1)}, \sigma^{(n-1)}, \alpha^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする. $e_3 = N_d^\varepsilon$ の場合, **ステップ 2-4** へ進む. そうでない場合は, **ステップ 2-1** に戻る.

ステップ 2-4 偏差パラメータ $\sigma_d^{(n)}$ を $\Pi(\sigma_d^{(n)} | \beta^{(n-1)}, \theta^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \sigma_{-d}^{(n-1)}, \alpha^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする. $d = D$ の場合, **ステップ 2-5** へ進む. そうでない場合は, **ステップ 2-1** に戻る.

ステップ 2-5 コピュラパラメータ $\alpha^{(n)}$ を $\Pi(\alpha^{(n)} |$

$\beta^{(n-1)}, \theta^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \sigma^{(n-1)}, \alpha^{(n-1)}, \Xi$ からランダムサンプリングする。

ステップ 3 十分大きな n に対して $n > \bar{n}$ ならば $\phi^{(n)}$ を記録し、**ステップ 4** へ進む。そうでない場合は、**ステップ 2-1** に戻る。

ステップ 4 $n = \bar{n}$ ならば計算を終了する。そうでない場合は、 $n = n + 1$ とし**ステップ 2-1** へ戻る。

十分大きな n に対して、このようなマルコフ連鎖が定常状態に達していると考えれば、ギブスサンプリングによる $\phi^{(n)}$ ($n = \bar{n} + 1, \bar{n} + 2, \dots, \bar{n}$) のサンプリングは、式 (19) に示した同時事後確率密度関数 $\Pi(\phi|\Xi)$ からのサンプリングと等しくなる。したがって、ギブスサンプリングによって得られるこれらの標本 $\phi^{(n)}$ を用いて、パラメータベクトル $\phi = (\beta, \theta, \sigma, \varepsilon, \alpha)$ の同時事後確率密度関数に関する統計量を計算することも可能となる。ただし、**ステップ 2** で利用する条件付き事後確率密度関数 (式 (21))-式 (26)) からは直接にランダムサンプリングすることができないため、MH 法を用いて条件付き事後確率密度関数からのサンプリングを行う。

5. おわりに

本研究では、FWD たわみ量調査および路面性状調査により測定した舗装の耐荷力指標と路面指標を対象として、連続量を用いた多元的劣化過程モデルを適用し、予防保全的な補修計画の立案に資する分析を行った。具体的には、個別劣化事象の進展過程を連続量劣化ハザードモデルを用いて表現し、管理基準値における期待寿命と各対象施設固有の劣化速度の異質性を推定した。さらに、アルキメディアン・コンピュータにより劣化事象間の異質性相関構造を表現可能な多元的劣化過程モデルを用いて舗装の耐荷力指標と路面指標における異質性をグルーピングし、大規模修繕あるいは予防的補修の必要性の評価に寄与する分析を行った。なお、本研究で提案した方法論を高速道路の実点検データに適用した実証分析を行っている。その結果および考察に関しては研究発表会にて提示する。

REFERENCES

- 1) 国土交通省道路局：舗装点検要領，2017。[Road Bureau, Ministry of Land, Infrastructure, Transport and Tourism: Pavement Inspection Procedure, 2017.]
- 2) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73，pp68-82，2005。[Tsuda, Y., Kaito, K., Aoki, K. and Kobayashi, K.: Estimating Markovian Transition Probabilities for Bridge Deterioration Forecasting, *Journal of Japan Society of Civil Engineers*, No.801, pp.69-82, 2005.]
- 3) 小濱健吾，岡田真一，貝戸清之，小林潔司：劣化ハザード率評価とベンチマーキング，土木学会論文集 A，Vol.64，No.4，pp.857-874，2008。[Obama, K., Okada, K., Kaito, K. and Kobayashi, K.: Disaggregated Hazard Rates Evaluation and Bench-Marking, *Journal of Japan Society of Civil Engineers A*, Vol.64, No.4, pp.857-874, 2008.]
- 4) 水谷大二郎，小林潔司，風戸崇之，貝戸清之，松島格也：連続量を用いた劣化ハザードモデル：舗装耐荷力への適用，土木学会論文集 D3(土木計画学)，Vol.72，No.2，191-210，2016。[Mizutani, D., Kobayashi, K., Kazato, T., Kaito, K. and Matsushima, K.: A Continuous Deterioration Hazard Model: Application to Pavement Structure, *Journal of Japan Society of Civil Engineers D3*, Vol.72, No.2, 191-210, 2016.]
- 5) 水谷大二郎，小濱健吾，貝戸清之，小林潔司：社会基盤施設の多元的劣化過程モデル，土木学会論文集 D3(土木計画学)，Vol.72，No.1，pp.34-51，2016。[Mizutani, D., Obama, K., Kaito, K. and Kobayashi, K.: Multidimensional Infrastructure Deterioration Process Model, *Journal of Japan Society of Civil Engineers D3*, Vol.72, No.1, pp.34-51, 2016.]
- 6) Nelsen, R. B.: *An Introduction to Copulas*, Springer, 1999.
- 7) 戸坂凡展，吉羽要直：コンピュータの金融実務での具体的な活用方法の解説，日本銀行金融研究所，金融研究，pp.115-162，2005。[Tozaka, H. and Yoshihara, T.: Explanation of The Specific Use of Copulas in Financial Practice, *Monetary and Economic Studies, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan*, pp.115-162, 2005.]
- 8) Sklar, A.: Random variables, joint distribution functions, and copulas, *Kybernetika*, Vol.9, No.6, pp.449-460, 1973.
- 9) Gumbel, E. J.: Bivariate exponential distributions, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.55, No.292, pp.698-707, 1960.
- 10) Clayton, D. G.: A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence, *Biometrika*, Vol.65, No.1, pp.141-151, 1978.
- 11) Frank, M. J.: On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$, *Aequationes Mathematicae*, Vol.19, pp.194-226, 1979.
- 12) Breymann, W., Dias, A. and Embrechts, P.: Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance, *Quantitative Finance*, Vol.3, No.1, pp.1-14, 2003.
- 13) Watanabe, S.: Asymptotic Equivalence of Bayes Cross Validation and Widely Applicable Information Criterion in Singular Learning Theory, *Journal of Machine Learning Research*, Vol.11, (DEC), pp.3571-3591, 2010.