

# ボトルネック渋滞を内生化した住宅立地モデル の感度分析

板橋昂汰<sup>1</sup>・和田健太郎<sup>2</sup>

<sup>1</sup>非会員 筑波大学大学院 システム情報工学研究群 社会工学学位プログラム (〒 305-8573 茨城県つくば市  
天王台 1-1-1)

E-mail: s2120407@s.tsukuba.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 筑波大学准教授 システム情報系 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1)

E-mail: wadaken@sk.tsukuba.ac.jp (Corresponding Author)

本研究は、1つの勤務地と2つの居住地(都心・郊外)が存在する1次元都市空間を対象に、ボトルネック渋滞を内生化した出発時刻・住宅立地同時選択モデルの感度分析を行う。具体的には、まず、均衡居住・通勤パターンが両居住地の支出関数の差と都心・郊外のボトルネック容量比によって分類できることを示す。そして、各パラメータ(各居住地面積や各ボトルネック容量等)がそれぞれ変化したときの均衡解(各居住地の人口、各居住地の均衡通勤費用)の変化(感度)を理論的・数値的に分析することで、ボトルネック渋滞が住宅立地選択に与える影響について考察する。

**Key Words:** residential location, bottleneck congestion, departure time choice, comparative statics

## 1. はじめに

Alonso<sup>1)</sup>, Mills<sup>2)</sup>, Muth<sup>3)</sup>に始まる住宅立地モデルは、居住環境と通勤費用のトレード・オフ関係から通勤者の居住地を選択するモデルであり、通勤行動の変化と土地利用の変化の相互関係を数理的に表すことができる有名なモデルとして、長年に渡って研究が進められてきている。Wheaton<sup>4)</sup>は、このモデルの感度分析を行っている。具体的には、人口、農業地代、通勤費用、所得といった外生変数が変化した場合に、地代や都市の境界、効用水準などがどのように変化するかということについて比較静学分析を行っており、モデルのさまざまな理論特性を明らかにしている。

しかし、ほとんどの研究では、通勤費用を平均的な値で表現していて、通勤行動において重要な特徴であるピーク時の混雑を考慮できていないという課題がある。これに対応するのが、Vickrey<sup>5)</sup>に始まるボトルネックモデルである。これは、希望の到着時刻との乖離で生じるスケジューリングコストと、これに対応して時間で変動する混雑のトレード・オフ関係をもとに、通勤者の出発時刻を選択するモデルである。

高山・赤松<sup>6)</sup>は、これらの住宅立地・ボトルネック統合モデルの均衡状態について分析している。下位選択における均衡解を示し、従来の住宅立地モデルと比較した感度分析を数値的に行っているものの、特定の均衡パターン(どの地点・タイミングで需要・渋滞が

発生するか)のみの分析に留まっており、網羅的な均衡パターンにおける分析は行われていない。板橋・和田<sup>7)</sup>は、需要分布を内生化したタンデムボトルネック・ネットワークにおける出発時刻選択問題の分析を行っている。そこでは、2つのボトルネックの間における均衡パターンを、上位選択固有の費用(効用)差と隣接するボトルネック容量比によって分類できることを理論的に示している。しかし、分類したそれぞれの均衡パターンの均衡解については明らかにされていない。また、このモデルは、上位選択固有の費用は主に与件として分析されており、従来の住宅立地モデルにおける地代の考え方などは定義されていない。その他にも、統合モデルの研究は進められている<sup>8),9),10)</sup>が、均衡状態の感度分析を網羅的行った研究はない。

そこで、本研究では、1つの勤務地と2つの居住地(都心・郊外)が存在する1次元空間を対象に、ボトルネック渋滞を内生化した出発時刻・住宅立地同時選択モデルの感度分析を行う。具体的には、まず、板橋・和田(2022)<sup>7)</sup>における上位選択固有の費用(効用)差が、本論文で扱うモデルにおける両居住地の支出関数の差と等価であるというを示すことで、均衡居住・通勤パターンが両居住地の支出関数の差と都心・郊外のボトルネック容量比によって分類できることを示す。そして、分類された各パターンの均衡解(各居住地の人口、各居住地の均衡通勤費用、地代、効用レベル)を支出

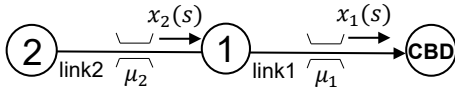


図-1: 対象ネットワーク

関数の差の関数として解析的に求める。それに基づき、各パラメータ（ボトルネック容量、居住地面積、総人口、予算）がそれぞれ変化したときの均衡解の変化（感度）を網羅的に分析することで、ボトルネック渋滞が住宅立地選択に与える影響について考察する。

## 2. モデル

### (1) 状況設定

本研究では、図-1 に示すような 2 つの居住地と CBD を結ぶネットワークを考える。このネットワーク上のノード 1, 2 は、それぞれ居住地 1, 2 を表す。消費者は、いずれかの居住地に住宅を立地し、CBD に通勤する。閉じた都市を考えるため、居住地  $i$  の人口  $Q_i (i = 1, 2)$  の総和を  $Q$  とする。居住地 1, 2 の住宅地総面積は、それぞれ  $A_1, A_2$  とする。

リンク 1, 2 の終端には、それぞれ容量  $\mu_1, \mu_2$  を持つボトルネック 1, 2 が存在する。いずれのボトルネックも、First-In-First-Out(FIFO) 原則を満たし、発生した待ち行列は point queue モデルで表現できると仮定する。また、各ノード間を移動する自由旅行時間は、一般性を失うことなく 0 とする。

### (2) 消費者の行動

#### a) 居住地選択行動

各消費者は、自らの効用が最大となるように居住地と財の消費量を選択する。ただし、消費者は、全員均質であると仮定する。すなわち、各消費者の行動は、

$$\max_{z_i, y_i} \{u(z_i, y_i) | z_i + r_i y_i + C_i = M, i = 1, 2\} \quad (1)$$

ここで、 $u(\cdot)$  は消費者の効用関数、 $z_i$  は合成財の消費量、 $y_i$  は消費者一人あたりの土地面積、 $r_i$  は居住地  $i$  の地代、 $C_i$  は居住地  $i$  の通勤費用、 $M$  は消費者の所得である。

この消費者の効用最大化問題は、以下の 2 段階選択問題

$$\max_i \left\{ \max_{z_i, y_i} u(z_i, y_i) | z_i + r_i y_i + C_i = M, i = 1, 2 \right\} \quad (2)$$

と等価である。すなわち、まず、各居住地で合成財と土地の最適消費量を決定し、そして、その結果決まる間

接効用値が最大の居住地  $i$  を選択すると考えればよい。より具体的には、まず、各居住地で最適な消費行動をしたときの効用は、以下の間接効用関数

$$v_i(r_i, M - C_i) \equiv \max_{z_i, y_i} \{u(z_i, y_i) | z_i + r_i y_i + C_i = M\} \quad (3)$$

によって表される。そして、居住地選択行動は、

$$\max_i v_i(r_i, M - C_i) \quad (4)$$

と表される。

ここで、効用レベル  $V_i$  を実現する支出関数を次のように定義する。

$$E(r_i, V_i) \equiv \min_{z_i, y_i} z_i + r_i y_i \quad \text{subject to} \quad u(z_i, y_i) = V_i \quad (5)$$

この解  $\bar{y}_i(r_i, V_i)$  は補償需要関数である。これは、効用最大化問題の解でもあるので、以下の関係が成り立つ。

$$E(r_i, v_i(r_i, M - C_i)) = M - C_i \quad (6)$$

$$\bar{y}_i(r_i, v_i(r_i, M - C_i)) = y_i(r_i, M - C_i) \quad (7)$$

最適行動下では支出関数は居住地選択に関する純所得を表しており、都心の純所得から郊外のそれを引いたものを、

$$\begin{aligned} DE(r, v) &\equiv E(r_1, v_1(r_1, M - C_1)) - E(r_2, v_2(r_2, M - C_2)) \\ &= C_2 - C_1 \end{aligned} \quad (8)$$

と定義する。

#### b) 出発時刻選択行動

通勤費用  $C_i$  は、消費者の出発時刻選択行動の結果として決まると考える。すなわち、消費者は、通勤費用が最小となるように CBD の到着時刻  $s$  を選択するとする。時刻  $s$  に CBD に到着する居住地  $i$  の消費者の通勤費用  $C_i(s)$  は、ボトルネックにおける渋滞遅れ  $w_i(s)$ 、(全員共通の) 希望到着時刻  $t_w$  と実際の到着時刻の乖離に応じて生じるスケジュール費用  $d(s)$  から構成される。つまり、消費者の通勤費用最小化問題は、

$$\min_s C_i(s) = \alpha \left\{ \sum_{j \leq i} w_j(s) + d(s) \right\} \quad (9)$$

ここで、 $\alpha$  は時間を金銭的費用に換算するための係数である。また、スケジュールディレイ費用関数  $d(s)$  は、スケジュールとの乖離の凸関数であり、区分的に微分可能、乖離がゼロのとき最小値 0 をとるとする。

### (3) 均衡条件

均衡状態とは、どの通勤者も自分だけが居住地および出発時刻を変更しても、自らの効用および通勤費用を改善できない (i.e., 選択変更のインセンティブが働かない) 状態である。以上の設定の下、均衡条件は次の 6 つの条件で定式化できる。

第 1 の条件は、居住地選択に関する均衡条件であり、次のように与えられる。

$$\begin{cases} V = v_i(r_i, M - \rho_i) & \text{if } Q_i > 0 \\ V \geq v_i(r_i, M - \rho_i) & \text{if } Q_i = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

ここで、 $V$  は均衡効用、 $\rho_i$  は均衡通勤費用を表す。

第 2 の条件は、居住地の容量制約に関する均衡条件であり、次のように与えられる。

$$\begin{cases} A_i = y_i Q_i & \text{if } r_i > 0 \\ A_i \geq y_i Q_i & \text{if } r_i = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (11)$$

なお、 $y_i$  は Roy の恒等式より、

$$y_i = -\frac{\partial v_i(r_i, M - \rho_i) / \partial r_i}{\partial v_i(r_i, M - \rho_i) / \partial M} \quad (12)$$

により与えられる。

第 3 の条件は、総消費者数の保存則であり、次のように与えられる。

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (13)$$

第 4 の条件は、出発時刻選択に関する均衡条件であり、次のように与えられる。

$$\begin{cases} \rho_i = C_i(s) & \text{if } q_i(s) > 0 \\ \rho_i \geq C_i(s) & \text{if } q_i(s) = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \forall s \quad (14)$$

ここで、 $q_i(s)$  は居住地  $i$  を起点として CBD に時刻  $s$  に到着する車両の OD 交通量を表す。

第 5 の条件は、OD 交通量の保存則であり、次のように与えられる。

$$Q_i = \int_s q_i(s) ds \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

第 6 の条件は、待ち行列に関する条件であるいま、ボトルネック  $i$  を通過し、CBD に時刻  $s$  に到着するフローを  $x_i(s) = \sum_{j \geq i} q_j(s)$  とすると、point queue モデルに基づく渋滞遅れ時間の条件は、以下となる（導出は Akamatsu et al.<sup>11)</sup> を参照）。

$$\begin{cases} x_i(s) = \mu_i \Delta \tau_{i-1} & \text{if } w_i(s) > 0 \\ x_i(s) \geq \mu_i \Delta \tau_{i-1} & \text{if } w_i(s) = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \forall s \quad (16)$$

ここで、 $\tau_i(s) = s - \sum_{j \leq i} w_j(s)$  は時刻  $s$  に CBD に到着する消費者がボトルネック  $i$  に到着する時刻、 $\mu_i$  はボトルネック  $i$  の最大流出率を表す。

#### (4) 効用関数の仮定

消費者の効用関数が、次のような対数線形関数

$$u(z_i, y_i) = a \ln z_i + b \ln y_i \quad (17)$$

で与えられた場合を考える。予算制約式を代入して、その一階条件をとると、

$$\begin{aligned} u'_i(z_i(y_i), y_i) &= -\frac{ar_i}{M - r_i y_i - \rho_i} + \frac{b}{y_i} = 0 \\ \Rightarrow y_i &= \frac{b(M - \rho_i)}{r_i} \end{aligned} \quad (18)$$

である。このとき、間接効用関数は、

$$v_i(r_i, M - \rho_i) = \ln(M - \rho_i) - b \ln r_i + (a \ln a + a + b \ln b) \quad (19)$$

以降では、 $V_0 \equiv a \ln a + a + b \ln b$  とおく。ここで、最適消費面積の逆関数（地代関数）は、

$$r_i(y_i) = \frac{b(M - \rho_i)}{y_i} \quad (20)$$

となる。

また、このとき、居住地選択に関する均衡条件（式 (10)～式 (13)）は以下のようになる。

$$\begin{cases} V = \ln(M - \rho_i) - b \ln r_i + V_0 & \text{if } Q_i(s) > 0 \\ V \geq \ln(M - \rho_i) - b \ln r_i + V_0 & \text{if } Q_i(s) = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (21)$$

$$\begin{cases} A_i = \frac{b(M - \rho_i)}{r_i} Q_i & \text{if } r_i > 0 \\ A_i \geq \frac{b(M - \rho_i)}{r_i} Q_i & \text{if } r_i = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (22)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad i = 1, 2 \quad (23)$$

予算  $M$  が均衡交通費用  $\rho_i$  より十分大きい自然な立地均衡状態は  $Q_1, Q_2 > 0$  かつ  $r_1, r_2 > 0$  である（証明は付録）。このとき、支出関数の差  $DE$  は、

$$\begin{aligned} DE(r, V) &= E(r_1, V) - E(r_2, V) \\ &= \exp(V + b \ln r_1 - V_0) - \exp(V + b \ln r_2 - V_0) \\ &= \exp(V - V_0) \{r_1^b - r_2^b\} \end{aligned} \quad (24)$$

であり、立地均衡状態においては、地代と居住者数について次の関係が成り立つ。

$$r_i = \frac{b(M - \rho_i)}{A_i} Q_i \quad (25)$$

### 3. 均衡状態の分析

本章では、均衡状態の性質を理論的に分析する。具体的には、(1) 節では、均衡居住・通勤パターンが両居住地の支出関数の差と都心・郊外のボトルネック容量比によって分類できることを示す。それに基づき、(2) 節では、各パターンにおける出発時刻選択の均衡解を支出関数の差  $DE$  の関数として求める。

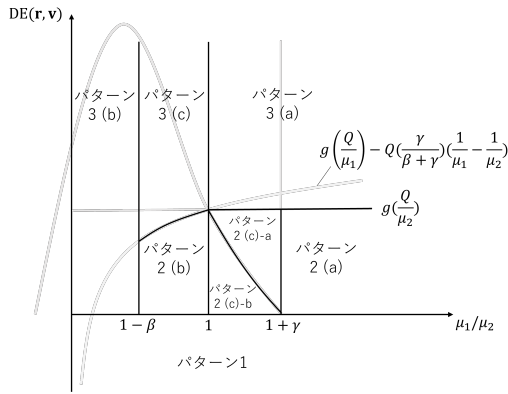


図-2: 均衡状態パターン成立条件の領域

(1) 均衡パターン

式 (24) より, 出発時刻・住宅立地同時選択における最適行動下では,  $DE = \rho_2 - \rho_1$  と表すことができる. これは, 板橋・和田<sup>7)</sup> におけるモード料金差  $f_{12} \equiv f_1 - f_2 = \rho_2 - \rho_1$  と等価である. したがって, 支出関数の差  $DE$  と都心・郊外のボトルネック容量比  $\mu_1/\mu_2$  によって, 図-2 のように均衡状態をパターン分類することができる. 各パターンは, 以下のように表すことができる. なお, 利用者が最初に CBD に時刻する時刻を  $t_f$ , 最後に到着する時刻を  $t_l$  とする.

パターン 1:  $w_2(s) = 0, \forall s$

パターン 2:  $Q_1, Q_2 > 0$

(a)  $q_1(s) > 0, \exists s \geq t_w$

(b)  $q_1(s) = 0, w_2(s) = 0, \forall s \geq t_w$

(c)  $q_1(s) = 0, \forall s \geq t_w, w_2(s) > 0, \exists s \geq t_w$

(a)  $w_1(s) = 0, w_2(s) > 0, t = t_l$

(b)  $w_1(s) > 0, w_2(s) = 0, t = t_l$

パターンの大分類は, 居住地選択パターンによる分類である. 詳細な分類は, 出発時刻選択に関わる条件(フローや渋滞のダイナミクス)による分類となっている. なお, 先にも述べたように, 立地均衡状態において対数線形効用関数を仮定した場合, 各居住者数は内点解となるため, 板橋・和田<sup>7)</sup> の分類におけるパターン 3 ( $Q_1 = 0$ ) は起こり得ない.

なお, 高山・赤松<sup>6)</sup> において, リンク容量比  $\mu^* = \mu_2/\mu_1$  と居住人口比  $Q_2/Q$  による次の条件が, 本モデルにおける均衡パターン 1・2 に対応する 2 つの到着パターンの境界であることを示している.

$$\frac{Q_2}{Q} \leq \begin{cases} \mu^* & \text{if } \mu^* \leq \gamma^* \\ \delta\{(\beta\beta^*)^{-1}\mu^* + \gamma^{-1}\} & \text{if } \gamma^* \leq \mu^* \leq \beta^* \\ 1 & \text{if } \beta^* \leq \mu^* \end{cases} \quad (26)$$

この条件について,  $DE$  の関数(本モデルの均衡解の形式)で表すと, 図-2 の各パターンにおける均衡パター

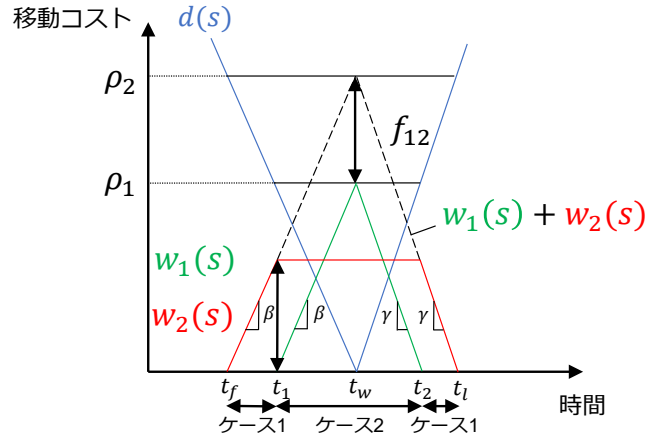


図-3: パターン 2(a) ( $1 + \gamma < \mu_1/\mu_2$ )

ン 1・2 の境界条件である  $DE > 0$  と一致することがわかる. よって, 本モデルにおける均衡パターン 1・2 の境界条件 ( $DE > 0$ ) は, 高山・赤松<sup>6)</sup> と対応していることがわかる.

(2) 出発時刻選択の均衡解

スケジュール費用関数として, 次の区分線形関数を仮定する.

$$d(s) = \begin{cases} \beta(t_w - s) & \text{if } t_w - s \geq 0 \\ \gamma(s - t_w) & \text{if } t_w - s \leq 0 \end{cases} \quad (27)$$

ここで,  $\beta, \gamma$  は, それぞれ, 早着・遅着に対する時間価値パラメータである. このスケジュールディレイ関数の定義より,  $(t_w - t_f) : (t_l - t_w) = \gamma : \beta$  の関係が成り立つ. なお, 以降では,

$$\delta \equiv \frac{\beta\gamma}{\beta + \gamma} \quad (28)$$

と定義する.

a) パターン 2(a)

パターン 2(a) における費用関数を図-3 に示す. パターン 2(a) は, 都心・郊外ともにさばけ交通量が一定かつ早着・遅着がともに存在するラッシュが実現する.

都心ボトルネックの渋滞  $w_1(s)$  が発生し始める時刻を  $t_1$ , 解消する時刻を  $t_2$  とする. このとき,  $T_1 = t_2 - t_1 = \frac{Q_1}{\mu_1 - \mu_2}, T_2 = t_l - t_f = \frac{Q_2}{\mu_2}$  となることを利用して,

$$\rho_1 = \delta \frac{Q_1}{\mu_1 - \mu_2}$$

$$\rho_2 = \delta \frac{Q_2}{\mu_2}$$

が成り立つ.  $\rho_2 - \rho_1 = DE$  であることを利用すると,

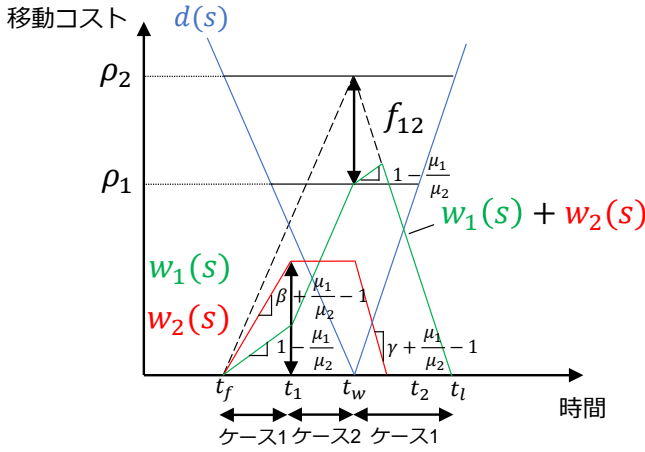


図-4: パターン 2(b) ( $1 - \beta < \mu_1/\mu_2 < 1$ )

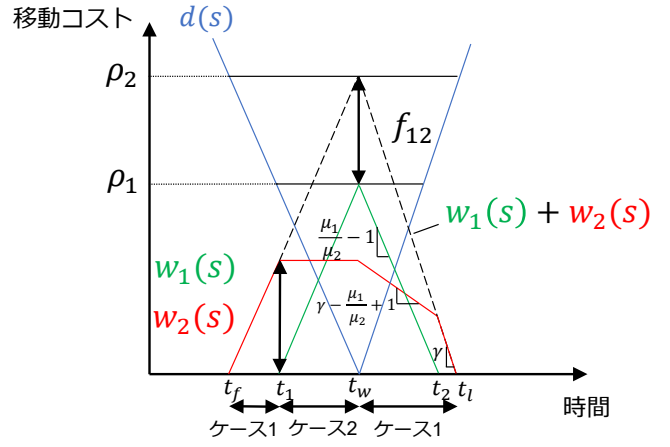


図-5: パターン 2(c)-a ( $\mu_1/\mu_2 < \rho_1/(t_l - t_w) + 1$ )

$Q_i, \rho_i$  の解析解は,

$$\rho_1 = \delta \frac{Q}{\mu_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1} DE \quad (29a)$$

$$\rho_2 = \rho_1 + DE = \delta \frac{Q}{\mu_1} + \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) DE \quad (29b)$$

$$Q_1 = \rho_1(\mu_1 - \mu_2)/\delta = \left(\frac{Q}{\mu_2} - \frac{DE}{\delta}\right) \frac{\mu_2}{\mu_1} (\mu_1 - \mu_2) \quad (29c)$$

$$Q_2 = Q - Q_1 \quad (29d)$$

b) パターン 2(b)

パターン 2(b) における費用関数を図-4 に示す。パターン 2(b) は、郊外居住者は典型的なラッシュに直面し、都心居住者は早着のみ発生する。

$q_1(s)$  が発生し始める時刻を  $t_1$ 、郊外ボトルネックの渋滞  $w_2(s)$  が解消する時刻を  $t_2$  とする。このとき、 $T_2 = t_1 - t_f = \frac{Q}{\mu_1}$  となることを利用して、

$$\rho_1 = \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \left(\frac{DE}{\beta + \mu_1/\mu_2 - 1}\right) + \beta \left(\frac{Q}{\mu_1} \frac{\delta}{\beta} - \frac{DE}{\beta + \mu_1/\mu_2 - 1}\right) \quad (30a)$$

$$\rho_2 = \delta \frac{Q}{\mu_1} \quad (30b)$$

$$Q_1 = (\mu_1 - \mu_2(1 - \beta))(t_w - t_1) = (\mu_1 - \mu_2(1 - \beta)) \left(\frac{Q}{\mu_1} \frac{\delta}{\beta} - \frac{DE}{\beta + \mu_1/\mu_2 - 1}\right) \quad (30c)$$

$$Q_2 = Q - Q_1 \quad (30d)$$

c) パターン 2(c)

パターン 2(c) についてであるが、 $w_1(s)$  が発生し始める時刻を  $t_1$ 、 $w_1(s)$  もしくは  $w_2(s)$  のどちらかが先に解消する時刻を  $t_2$  とすると、 $t > t_w$  (遅着時) において、 $\Delta w_1(s) = -(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1)$  の値によって  $w_i(s)$  の挙動が異なる。よって、都心ボトルネックの渋滞が先に解消するケース (図-5) をパターン 2(c)-a、郊外ボトルネックの渋滞

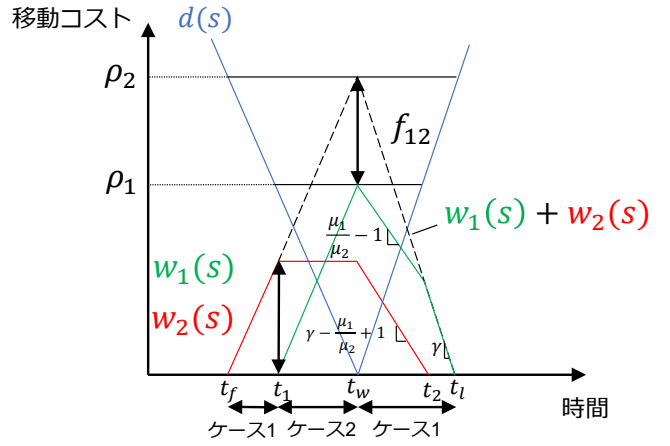


図-6: パターン 2(c)-b ( $1 < \mu_1/\mu_2 < 1 + \gamma$ )

が先に解消するケース (図-6) をパターン 2(c)-b とする。これら二つのパターンで解析解を求める。

まず、パターン 2(c)-a について、

$$\rho_1 = \frac{Q_1}{\mu_1 - \mu_2(1 - \beta)} \beta$$

$$\rho_2 = \delta \frac{Q_2}{\mu_2}$$

が成り立つ。 $\rho_2 - \rho_1 = DE$  であることを利用すると、 $Q_i, \rho_i$  の解析解は、

$$\rho_1 = \left(\delta \frac{Q}{\mu_2} - DE\right) \left(\frac{\mu_2}{(\mu_1 - \mu_2(1 - \beta)) \frac{\delta}{\beta} + \mu_2}\right) \quad (31a)$$

$$\rho_2 = \rho_1 + DE \quad (31b)$$

$$Q_1 = \left(\frac{Q}{\mu_2} \cdot \frac{\delta}{\beta} - \frac{DE}{\beta}\right) \left(\frac{\mu_2(\mu_1 - \mu_2(1 - \beta))}{(\mu_1 - \mu_2(1 - \beta)) \frac{\delta}{\beta} + \mu_2}\right) \quad (31c)$$

$$Q_2 = Q - Q_1 \quad (31d)$$

次に、パターン 2(c)-b について、

$$Q = \mu_2(t_1 - t_f) + \mu_1(t_l - t_1) = \mu_2 \frac{DE}{\beta} + \mu_1(t_l - t_1)$$

$$t_l - t_1 = (t_w - t_f) \left( 1 + \frac{\beta}{\gamma} \right) - \frac{DE}{\beta}$$

$$t_w - t_f = \frac{Q_1}{\mu_1 - \mu_2(1 - \beta)} + \frac{DE}{\beta}$$

が成り立つ。これらを利用すると、 $Q_i, \rho_i$  の解析解は、

$$\rho_1 = \delta \left\{ \frac{Q}{\mu_1} - \frac{DE}{\beta} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{\beta}{\gamma} \right) \right\} \quad (32a)$$

$$\rho_2 = \rho_1 + DE \quad (32b)$$

$$Q_1 = \left\{ \frac{Q}{\mu_1} - \frac{DE}{\beta} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{\beta}{\gamma} \right) \right\} \left( \frac{\mu_1 - \mu_2(1 - \beta)}{1 + \frac{\beta}{\gamma}} \right) \quad (32c)$$

$$Q_2 = Q - Q_1 \quad (32d)$$

#### 4. 感度分析

本章では、各パラメータがそれぞれ変化したときの均衡解の変化（感度）を数値的に分析することで、ボトルネック渋滞と住宅立地選択の関係について調べる。具体的には、(1) 節で数値実験の概要とその結果を示す。それに基づき、(2) 節では、パラメータが変化したときの均衡システムの変化のメカニズムについて考察する。最後に、(3) 節では、従来の住宅立地理論と比較して、ボトルネック渋滞が住宅立地選択に与える影響について考察する。

##### (1) 数値実験概要と結果

この数値実験では、図-2の各パターンの領域を網羅するようなパラメータで均衡解を求め、その中で、あるパラメータのみが変化した場合の均衡解の変化を見る。

この結果をまとめたものが表-1である。ここでは、パラメータを増加させたとき、均衡解が増加していれば「+」、減少していたら「-」、変化がない場合は「0」を記入している。なお、いくつかの均衡解において、パラメータのケースによって感度の符号が一つに決まらない場合がある。そのような箇所については、多くのパラメータのケースで得られる符号を記入した上で(\*)を付ける。

##### (2) 考察

本節では、前節の結果（表-1）に基づいて、各パラメータの変化による均衡システムの変化のメカニズムについて考察する。なお、パターン 2(b) のほとんどの箇所感度の符号が一つに決まっていない。また、以降の考察でも取り上げるが、他のパターンとは異なる感度を持つ箇所もあるように、パターン 2(b) は異質なパターンであると言える。現在、この理由は不明であ

表-1: 感度分析結果

		$\mu_1$	$\mu_2$	$A_1$	$A_2$	$Q$	$M$
パターン 2a	$\rho_1$	-	-(*)	+	-	+	-
	$\rho_2$	-	-	-	+	+	+
	$Q_1$	+	-	+	-	+	-
	$Q_2$	-	+	-	+	-	+
	$r_1$	+	-	-	-	+	+(*)
	$r_2$	-(*)	+	-(*)	-	+(*)	+
	$V$	+	+	+	+	-	+
	$DE$	+	-	-	+	+	+
パターン 2b	$\rho_1$	-	+(*)	+(*)	-(*)	+(*)	-(*)
	$\rho_2$	-	0	0	0	+	0
	$Q_1$	-(*)	-(*)	+(*)	-(*)	+(*)	-(*)
	$Q_2$	+(*)	+(*)	-(*)	+(*)	-(*)	+(*)
	$r_1$	+	-(*)	-(*)	-(*)	+(*)	+(*)
	$r_2$	+	+(*)	-(*)	-(*)	-(*)	+
	$V$	+(*)	-(*)	+	+(*)	-(*)	+(*)
	$DE$	+(*)	-(*)	-(*)	+(*)	+(*)	+(*)
パターン 2ca	$\rho_1$	-	-	+	-	+	-
	$\rho_2$	-	-	-	+	+	+
	$Q_1$	+	-	+	-	+	-
	$Q_2$	-	+	-	+	-	+
	$r_1$	+	-	-	-	+	+
	$r_2$	-	+	-	-	+	+
	$V$	+	+	+	+	-	+
	$DE$	+	-	-	+	+	+
パターン 2cb	$\rho_1$	-	-(*)	+	-	+	-
	$\rho_2$	-	-	-	+	+	+
	$Q_1$	-	-	+	-	+	-
	$Q_2$	+	+	-	+	-	+
	$r_1$	-(*)	-	-	-	+	+
	$r_2$	+	+	-	-	+(*)	+
	$V$	+	+	+	+	-	+
	$DE$	-	-	-	+	+	+

るが、感度の符号を決定する分類方法に関して、さらなる条件が必要であると考えられる。その特定については今後の課題である。

また、パターン分類に関して、以降では、渋滞のダイナミクスにおいて都心の渋滞が先に無くなる性質を持つパターン 2(a) と 2(c)-a をパターン 2(A)、郊外の渋滞が先に無くなる性質を持つパターン 2(b) と 2(c)-b をパターン 2(B) として議論する。

##### a) 都心ボトルネック容量 $\mu_1$ が変化した場合

都心ボトルネック容量が増加した場合、すべてのパターンで両居住地の通勤費用は減少している。これは、 $\mu_1$  の増加によって都心の渋滞コストが減少するため、図-3～図-6からもわかるように、都心を通るすべての通勤者の通勤費用  $\rho_1, \rho_2$  が減少すると考えられる。また、限界通勤費用  $DE$  の感度を見ると、パターン 2(A) では増加している。これはつまり、 $\rho_1$  が相対的に減少していることを意味している。よって、パターン 2(A) では、通勤費用が相対的に減少した都心の人口が増加

するように変化している。

一方で、パターン 2(B) では、郊外の人口が増加するように変化している。しかし、パターン 2(b) と 2(c)-b の間で、その変化のメカニズムは異なる。パターン 2(c)-b では、パターン 2(A) と逆の論理で、DE の感度がマイナスであることから、 $\rho_2$  が相対的に減少していることがわかる。そのため、通勤費用が相対的に減少した郊外の人口が増加していると考えられる。パターン 2(b) では、DE の感度がプラスであるにも関わらず、都心の人口が増加するように変化している。これは、本節の冒頭でも述べたように、パターン 2(b) の異質な点である。このメカニズムの説明については今後の課題である。

#### b) 郊外ボトルネック容量 $\mu_2$ が変化した場合

郊外ボトルネック容量が増加した場合、すべてのパターンで郊外居住者の通勤費用は減少している。これは、 $\mu_2$  の増加によって郊外の渋滞コストが減少するため、図-3～図-6からもわかるように、郊外を通過する通勤者の通勤費用  $\rho_2$  が減少すると考えられる。なお、ここでも、パターン 2(b) では、式 (30b) より  $\rho_2$  は  $\mu_2$  の影響を受けないため、感度がゼロという異質な結果となる。先の議論と同様に、限界通勤費用の感度から相対的な通勤費用の変化について見てみると、すべてのパターンで郊外の通勤費用が減少していることがわかる。そのため、すべてのパターンで郊外の人口が増加していると考えられる。

#### c) 各居住地面積 $A_i$ が変化した場合

各居住地面積が増加した場合、全てのパターンで土地面積が拡大した居住地の人口が増加している。これは、まず、土地の需給の条件である式 (23) より、その居住地の地代  $r_i$  が相対的に低下する。このことは、式 (24) で表される DE の感度からも確認できる。よって、地代の低下した居住地  $i$  の人口が増加していると考えられる。

#### d) 総人口 $Q$ が変化した場合

総人口が増加した場合、すべてのパターンで都心の人口が増加している。これは、 $Q$  の増加によって、渋滞コスト  $w_i(s)$  がいずれのボトルネックでも増加することから、どちらの渋滞箇所も通過する郊外居住者の通勤費用が相対的に増加する。このことは、DE の感度からも確認できる。よって、都心の人口が増加していると考えられる。

#### e) 所得 $M$ が増加した場合

所得が増加した場合、すべてのパターンで郊外の人口が増加している。 $M$  が増加すると、式 (25) より、どちらの居住地においても地代が増加する。また、式 (19) より間接効用関数が増加することから、効用レベル  $V$  も増加する。これは、表-1からも確認できる。このとき、式 (24) で表される DE の感度を見ると、すべての

パターンでプラスであることから、郊外の地代が相対的に減少していることがわかる。よって、相対的に地代が減少した郊外の人口が増加していると考えられる。

なお、 $Q$  を増加させた場合も、 $M$  を増加させた場合も、DE が増加しているにも関わらず、人口分布は逆の感度を取る。これは、各居住地の人口が変化するメカニズムに違いがあると考えられる。具体的には、 $Q$  が増加した場合には、通勤費用  $\rho_i$  の相対的な変化（郊外で増加）から通勤費用差 DE が増加し、同時に  $\rho_i$  の変化の影響で  $Q_i$  がコンパクト化するように変化する。一方で、 $M$  が増加した場合には、地代  $r_i$  の相対的な変化から支出関数差 DE が増加し、同時に  $r_i$  の変化の影響で  $Q_i$  が郊外化するように変化する。つまり、 $Q$  の変化時には下位選択における通勤費用の変化が主に影響し、 $M$  の変化時には上位選択における地代の変化が主に影響する結果であると考えられる。

### (3) ボトルネック渋滞が住宅立地選択に与える影響に関する考察

本節では、(2) 節の考察を基に、ボトルネック渋滞を考慮することによって、住宅立地選択にどのような影響を与えるのかということについて考察する。具体的には、従来の住宅立地理論の感度分析<sup>4)</sup>の結果と比較して、それらのメカニズムにどのような違いがあるのかということに関して、従来の住宅立地理論と共通のパラメータである総人口と所得に着目して考える。

まず、総人口  $Q$  が増加した場合、従来の住宅立地理論では、都市全体で土地面積の需要が増加し、地代関数を増加させることになる。これは、総人口増加前の都市の境界地で地代を上昇させるので、結果的に都市の境界が広がる（郊外化する）ことになる。一方で、統合モデルでは、総人口の増加は都心の人口を増加させる。つまり、これをコンパクト化すると解釈すると、従来とは異なる結果となる。これは、総人口増加による通勤費用の変化が影響していると考えられる。従来の場合、通勤費用は CBD からの距離に依存する関数であるため、総人口増加の影響は受けませんが、統合モデルの場合、(2) 節でも述べたように、総人口増加によって、両ボトルネックの渋滞コストが増加するため、両居住地の通勤費用が増加する。この相対的な変化により、限界通勤費用が増加するため、都市はコンパクト化する。なお、従来の理論でも、限界通勤費用が増加すると、コンパクト化することが言われている。つまり、総人口増加による郊外化の効果よりも、内生的な限界通勤費用の増加によるコンパクト化の効果が大きいためであると解釈することもできる。

次に、所得が増加した場合、従来の住宅立地理論では、限界通勤費用の相対的な低下につながる。よって、

所得増加前の都市の境界地において、より高い地代を支払えるようになるので、結果的に都市の境界が広がる(郊外化する)ことになる。一方で、統合モデルでは、所得の増加は郊外の人口を増加させる。つまり、郊外化するという意味では同じ効果をもたらす。なお、このとき、限界通勤費用は増加しているが、ここでも、先の  $Q$  の変化時における議論と同様のことが言える。つまり、統合モデルでは、限界通勤費用が内生的に増加するように変化し、それがコンパクト化するような効果を持つが、その効果よりも所得増加の効果のほうが大きいため、結果的に郊外化したと考えられる。

以上より、本節の考察で共通して言えることは、統合モデルでは、限界通勤費用  $DE$  が内生的に決まるため、それが従来の住宅立地理論とは逆の方向に変化し得る。そのため、人口分布の感度が従来の理論と異なるケースがあるように、複雑なメカニズムとなる。

## 5. おわりに

本研究では、ボトルネック渋滞を内生化した住宅立地モデルの均衡状態の分析を行った。その結果、まず、支出関数の差とボトルネック容量比によって、均衡パターンが分類できることが理論的に明らかになった。また、それぞれの均衡パターンについて、支出関数の差の関数として表した均衡解を示した。そして、これらに基づき、すべての均衡パターンの網羅的な感度分析を行った。その結果から、各パラメータが変化したときに均衡解がどのように変化するかという均衡システムの特性的について考察し、特に都市の人口分布について以下の知見が得られた。

- 都心ボトルネック容量が増加したとき、限界通勤費用の変化の違いにより、パターン 2A ではコンパクト化、パターン 2B では郊外化する。
- 郊外ボトルネック容量が増加したとき、郊外居住者の通勤費用の減少により、すべてのパターンで郊外化する。
- 一方の居住地面積が拡大したとき、土地の需給の条件より、その居住地に人口が移動する。
- 都市人口が増加したとき、両ボトルネックの渋滞が広がる影響で、すべてのパターンでコンパクト化する。
- 所得が増加したとき、都心地代の相対的な上昇により、すべてのパターンでコンパクト化する。

これらを従来の住宅立地理論における感度分析の結果と比較すると、ボトルネック渋滞を考慮することによって通勤費用(特に渋滞コスト)がより複雑に変化し、異なる結果をもたらすことを示した。さらに、均衡パターンによって、その通勤費用のダイナミクスも異なるた

め、それによっても異なる感度を持つことも示した。なお、今回の感度分析は数値計算によって行ったものであり、特に均衡パターン 2(b) のメカニズムについて、その理論的な分析・考察は今後の課題である。

## 付録 I 証明

(1) 対数線形効用関数の場合に内点解になることの証明  
仮に  $Q_1 = Q, Q_2 = 0$  (端点解) であるとしよう。このとき、

$$A_1 = \frac{b(M - \rho_1)}{r_1} Q \quad (\text{I.1})$$

が成り立つ。なぜなら、地代  $r_1 = 0$  であるとする、

$$\frac{A_1}{Q} \geq \infty \quad (\text{I.2})$$

であるが、これは明らかに成り立たないためである。したがって、

$$V = a \ln a(M - \rho_1) + b \ln(A_1/Q) \quad (\text{I.3})$$

$\ln$  の中身はどちらも正であり、金銭や面積の適当な単位を選べば 1 以上にすることができる。つまり、均衡効用は有限の正の値と考えて問題ない。一方、 $i = 2$  については、 $r_2 = 0(Q_2 = 0)$  であるため、

$$V \geq \ln(M - \rho_2) + \infty + V_0 \quad (\text{I.4})$$

となるが、これは有限の  $V$  では満たすことができない。これは、 $Q_1 = Q, Q_2 = 0$  は実行可能ではないことを意味する。同様に、 $Q_1 = 0, Q_2 = Q$  の場合も実行可能ではないことを示すことができる。以上より、立地均衡状態は  $Q_1, Q_2 > 0$  (内点解) であることが示された。また、 $Q_1, Q_2 > 0$  のとき、上記と同様のロジックで  $r_1, r_2 = 0$  は成り立たないことを示せる。したがって、 $r_1, r_2 > 0$  である。

## 付録 II 各パターン解析解の導出過程

(1) パターン 2(a)

各居住地の均衡通勤コスト  $\rho_i$  は、各居住地の人口  $Q_i$  を使って次のように表される。

$$\rho_1 = \delta \frac{Q_1}{\mu_1 - \mu_2} \quad (\text{II.1})$$

$$\rho_2 = \delta \frac{Q_2}{\mu_2} = \delta \frac{Q - Q_1}{\mu_2} \quad (\text{II.2})$$

両者の差  $\rho_2 - \rho_1$  から、次の関係式が導ける。

$$\rho_2 - \rho_1 = \left\{ \frac{Q}{\mu_2} - Q_1 \left( \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \right) \right\} \delta = DE \quad (\text{II.3})$$

$$\Rightarrow Q_1 = \left\{ \frac{Q}{\mu_2} - \frac{DE}{\delta} \right\} \frac{\mu_2}{\mu_1} (\mu_1 - \mu_2) \quad (\text{II.4})$$

式 (II.1) に式 (II.4) を代入して

$$\rho_1 = \delta \frac{Q}{\mu_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1} DE \quad (\text{II.5})$$

$$\rho_2 = \rho_1 + DE = \delta \frac{Q}{\mu_1} + \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) DE \quad (\text{II.6})$$

### (2) パターン 2(b)

都心通勤者の総数は次のように表せる。

$$Q_1 = (\mu_1 - \mu_2(1 - \beta))(t_w - t_1) \quad (\text{II.7})$$

ここで,  $t_1 - t_f = Q/\mu_1$  より,

$$t_w - t_1 = \frac{Q}{\mu_1} \frac{\delta}{\beta} - \frac{DE}{\beta + \mu_1/\mu_2 - 1} \quad (\text{II.8})$$

式 (II.7) に式 (II.8) を代入して,

$$Q_1 = (\mu_1 - \mu_2(1 - \beta)) \left( \frac{Q}{\mu_1} \frac{\delta}{\beta} - \frac{DE}{\beta + \mu_1/\mu_2 - 1} \right) \quad (\text{II.9})$$

また, 均衡通勤コストについて, 図-4 の  $w_1(s)$  に関する費用関数より,

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \left( \frac{DE}{\beta + \mu_1/\mu_2 - 1} \right) \\ &+ \beta \left( \frac{Q}{\mu_1} \frac{\delta}{\beta} - \frac{DE}{\beta + \mu_1/\mu_2 - 1} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

なお, 郊外通勤者は典型的なラッシュに直面するため,

$$\rho_2 = \delta \frac{Q}{\mu_1} \quad (\text{II.11})$$

### (3) パターン 2(c)-a

各居住地の均衡通勤コスト  $\rho_i$  は, 各居住地の人口  $Q_i$  を使って次のように表される。

$$\rho_1 = \frac{Q_1}{\mu_1 - \mu_2(1 - \beta)} \beta \quad (\text{II.12})$$

$$\rho_2 = \frac{Q_2}{\mu_2} \delta = \frac{Q - Q_1}{\mu_2} \delta \quad (\text{II.13})$$

両者の差  $\rho_2 - \rho_1$  から, 次の関係式が導ける。

$$\rho_2 - \rho_1 = \left\{ \frac{Q}{\mu_2} \frac{\delta}{\beta} - Q_1 \left( \frac{1}{\mu_2} \frac{\delta}{\beta} + \frac{1}{\mu_1 - \mu_2(1 - \beta)} \right) \right\} \beta = DE \quad (\text{II.14})$$

$$\Rightarrow Q_1 = \left( \frac{Q}{\mu_2} \frac{\delta}{\beta} - \frac{DE}{\beta} \right) \left( \frac{\mu_2(\mu_1 - \mu_2(1 - \beta))}{(\mu_1 - \mu_2(1 - \beta)) \frac{\delta}{\beta} + \mu_2} \right) \quad (\text{II.15})$$

式 (II.12) に式 (II.15) を代入して

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \left( \frac{Q}{\mu_2} \frac{\delta}{\beta} - \frac{DE}{\beta} \right) \left( \frac{\mu_2}{(\mu_1 - \mu_2(1 - \beta)) \frac{\delta}{\beta} + \mu_2} \right) \beta \\ &= \left( \delta \frac{Q}{\mu_2} - DE \right) \left( \frac{\mu_2}{(\mu_1 - \mu_2(1 - \beta)) \frac{\delta}{\beta} + \mu_2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

### (4) パターン 2(c)-b

図-6 より, 総通勤者数  $Q$  は次のように表せる。

$$Q = \frac{DE}{\beta} \mu_2 + (t_1 - t_1) \mu_1 \quad (\text{II.17})$$

式 (II.17) 中の  $(t_1 - t_1)$  について,

$$\begin{aligned} t_1 - t_1 &= (t_w - t_f) \left( 1 + \frac{\beta}{\gamma} \right) - \frac{DE}{\beta} \\ &= \left( \frac{Q_1}{\mu_1 - \mu_2(1 - \beta)} + \frac{DE}{\beta} \right) \left( 1 + \frac{\beta}{\gamma} \right) - \frac{DE}{\beta} \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

式 (II.17) に式 (II.18) を代入して,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{DE}{\beta} \mu_2 + \left\{ \left( \frac{Q_1}{\mu_1 - \mu_2(1 - \beta)} + \frac{DE}{\beta} \right) \left( 1 + \frac{\beta}{\gamma} \right) - \frac{DE}{\beta} \right\} \mu_1 \\ \Rightarrow Q_1 &= \left\{ \frac{Q}{\mu_1} - \frac{DE}{\beta} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{\beta}{\gamma} \right) \right\} \frac{\mu_1 - \mu_2(1 - \beta)}{1 + \frac{\beta}{\gamma}} \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

また, 居住地 1 の均衡通勤コスト  $\rho_1$  は, 居住地 1 の人口  $Q_1$  を使って次のように表せる。

$$\rho_1 = \frac{Q_1}{\mu_1 - \mu_2(1 - \beta)} \beta \quad (\text{II.20})$$

式 (II.20) に式 (II.19) を代入して,

$$\rho_1 = \delta \left\{ \frac{Q}{\mu_1} - \frac{DE}{\beta} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{\beta}{\gamma} \right) \right\} \quad (\text{II.21})$$

## REFERENCES

- 1) Alonso, W.: Location and land use: Toward a general theory of land rent. *Harvard University Press*, 1964.
- 2) Mills, E. S.: An aggregative model of resource allocation in a metropolitan area. *The American Economic Review*, Vol.57, No.2, pp.197-210, 1967.
- 3) Muth, R. F.: Cities and housing; the spatial pattern of urban residential land use.. 1969.
- 4) Wheaton, W. C.: A comparative static analysis of urban spatial structure. *Journal of Economic Theory*, Vol.9, No.2, pp.223-237, 1974.
- 5) Vickrey, W. S.: Congestion theory and transport investment. *The American Economic Review*, Vol.59, No.2, pp.251-260, 1969.
- 6) 高山雄貴, 桑原雅夫: 動的混雑料金が都市空間構造に与える影響: ボトルネック渋滞を考慮した住宅立地モデル. 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.73, No.4, pp.219-227, 2009. [Takayama, Y., Akamatsu, T.: Irreducibility of dynamic traffic conditions in a model of residential location and departure time choice equilibrium with bottleneck congestion, *Doboku Gakkai Ronbunshu*, Vol.73, No.4, pp.219-227, 2009.]
- 7) 板橋昂汰, 和田健太郎: 需要分布を内生化したタンデムボトルネックにおける出発時刻選択均衡. 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.77, No.5, pp.1045-1055, 2022. [Itabashi, K., Kentaro, W.: Departure time choice equilibrium in a tandem bottleneck network with endogenous demand distribution, *Doboku Gakkai Ronbunshu*, Vol.77, No.5, pp.1045-1055, 2022.]
- 8) Gubins, S. and Verhoef, E. T.: Dynamic bottleneck congestion and residential land use in the monocentric city. *Journal of Urban Economics*, Vol.80, pp.51-61, 2014.

- 9) Takayama, Y. and Kuwahara, M.: Bottleneck congestion and residential location of heterogeneous commuters. *Journal of Urban Economics*, Vol.100, pp.65–79, 2017.
- 10) Fosgerau, M. and Kim, J.: Commuting and land use in a city with bottlenecks: Theory and evidence. *Regional Science and Urban Economics*, Vol.77, pp.182–204, 2019.
- 11) Akamatsu, T., Wada, K., and Hayashi, S.: The corridor problem with discrete multiple bottlenecks. *Transportation Research Procedia*, Vol.7, pp.474–498, 2015

(Received September 30, 2022)

(Accepted September 30, 2022)

## SENSITIVITY ANALYSIS OF A MODEL OF RESIDENTIAL LOCATION AND DEPARTURE TIME CHOICE EQUILIBRIUM WITH BOTTLENECK CONGESTION

Kota ITABASHI and Kentaro WADA