大規模道路ネットワークでの複数時間帯の交通状態推定の演算効率化

川村　雄斗[1]・峪　龍一[2]・内田　賢悦[3]

[1] 学生会員　北海道大学大学院　工学院（〒060-8628 北海道札幌市北区北 13 条西 8 丁目）
E-mail:ky12081023@eis.hokudai..ac.jp

[2] 正会員　北海道大学大学院　工学研究院（〒060-8628 北海道札幌市北区北 13 条西 8 丁目）
E-mail: r-tani@eng.hokudai.ac.jp

[3] 正会員　北海道大学大学院　工学研究院（〒060-8628 北海道札幌市北区北 13 条西 8 丁目）
E-mail: uchida@eng.hokudai.ac.jp

本研究では，交通感知器とプローブカーから観測されたデータを用いて，複数時間帯での大規模道路ネットワーク全体のリンク交通量とリンク遅れ時間の推定における演算効率化の手法について提案する．既往研究において，単一の時間帯から複数時間帯での計算の拡張にあたり，推定対象であるリンク交通量とリンク遅れ時間のパラメータ間の構造は複雑となっている．更に，尤度最大化問題を解いて交通状態を推定する際に，均衡制約付きの最適化問題を解くことが，解の探索方向を見つけることを困難としている．このため，大規模ネットワークでの計算の拡張にあたり，膨大な計算時間を要することが考えられる．そこで，感度分析により，摂動変数の局所点近傍において，尤度関数を解析的に近似することで，大規模ネットワークにおいて，効率的に解を探索する．

Key Words: *probe car data, traffic counter data, sensitivity analysis, traffic state estimation,*

1.　はじめに

道路ネットワーク全体の交通状態を推定するために，プローブカーデータと交通感知器が利用されている．プローブカーデータは，安価で大量のデータを取得できることから，先進国・新興国問わず，広く利用されることが期待されており，各車両の挙動を軌跡として観測できる．しかし，同時間帯におけるネットワーク規模での交通状態の網羅的な観測はプローブカーの密度に依存しており，プローブカーの密度が低い場合には，同時間帯におけるネットワーク全体の交通状態を推定することは困難である．したがって，同時間帯において，プローブカーで観測できていないリンクの交通状態を推定することが課題となっている．

プローブカーデータの利用が検討されている一方で，日本では交通量を観測するために交通感知器が一部のリンクに設置されている．交通感知器を設置して運用するための費用は高いことから，道路ネットワークを網羅するように交通感知器を設置することは財政的な都合上，現実的ではないのが実情である．しかし，固定的かつ連続的に交通量を観測できるという特徴は，プローブカーデータにはない側面である．プローブカーデータと交通感知器データを補完的に利用することによって，効率的な交通状態観測が実現される可能性がある．

複数の交通状態観測手法を組み合わせる研究はすでに行われている．峪・内田 (2020) [1] は道路ネットワークの不確実性を考慮した交通量配分モデルに基づく均衡制約付きの最尤推定モデルを構築し，複数時間帯を対象としてネットワーク全体のリンク交通量とリンク移動時間の同時分布を推定する手法を提案した．川村・峪(2021) [2]では，峪・内田 (2020) [1] によって構築された最尤推定モデルから推定された交通状態の確率分布を事前分布として，交通感知器から得られる交通量データおよびプローブデータから得られる移動時間を尤度とするベイズ推定を行い，交通状態の事後分布を推定する手法を提案した．既往研究における交通状態の解の探索において，推定対象であるリンク交通量とリンク遅れ時間のパラメータ間の構造は複雑となっている．更に，尤度最大化問題を解いて交通状態推定をする際に，均衡制約付きの最適化問題を解くことが，解の探索方向を見つけることを困難としている．このため，大規模ネットワークでの計算の拡張にあたり，膨大な計算時間を要することが考えられる．

そこで，ネットワーク問題における解の演算効率化を行うにあたり，感度分析を導入する．Tobin，Friesz(1988) [3]は．感度分析の非線形問題を，交通ネットワークにおいて，摂動におけるリンクフロー勾配計算の明示的な式を開発した．更に，均衡経路フローの非一意性を解決するために，均衡経路フローの実現可能領域で縮退していない極限点を選択する等価制限アプローチを開発した．

Yang and Bell [4]は，均衡リンクフローの導関数の計算にあたり，リンクコスト関数ベクトルが強単調かつ一回微分可能であり，最小コスト又は均衡経路上に正のフローが存在するという条件下で，陰関数定理から展開された式で導関数を計算する手法を提案した．

そこで本研究では，感度分析により，摂動変数の局所点近傍において，尤度関数を解析的に近似することで，大規模ネットワークにおいて，効率的に解を探索する手法を提案する．

本論文の構成は以下の通りである．第2章では，議論の際に使用した記号について説明する．第3章では，ネットワークモデルと尤度最大化問題について定義する．第4章では演算効率化のための感動分析について定義する．最後に第5章では本研究のまとめと今後の展望を示す．

2. 本研究における記号

本稿で用いる主な記号は以下に示す通りである．ここで，集合および確率変数は大文字で表すものとし，その集合の要素，あるいは確定的な変数は小文字で表すものとする．

A	ネットワーク上のリンク集合
A_0	ネットワーク上の交通感知器により，交通データが観測されているリンクの集合
I	O-D ペアの集合
J	経路集合
T	時間帯集合
Δ	リンク/経路接続行列
Λ	リンク/OD 接続行列
Q	ネットワーク上の総交通需要(生成交通量)
Q_t	各時間帯の時間帯別生成交通量
Q_{ti}	時間帯t の OD ペアi間の確率的交通需要 (OD 交通需要)
F_{tij}	時間帯t の OD ペアi間の経路jの確率的交通量(経路交通量)
V_{ta}	時間帯t のリンクaの確率的交通量(リンク交通量)
p_{ti}	時間帯t の OD ペア i 間の交通需要の配分率
p_{tij}	時間帯t の OD ペア i の経路 j を選択する確率(経路選択確率)
cv	生成交通量の変動係数
g_{tij}	時間帯t の OD ペアi間の経路jの一般化費用
c_{tij}	時間帯t の OD ペアi間の経路jのコスト
t_{ta}^0	時間帯t のリンクaの自由走行時間
C_{ta}	時間帯t のリンクaの確率的交通容量
γ_a, λ_a	リンクaの移動時間のパラメータ
c_{tij}	時間帯tの OD ペア i の経路 j の確率的移動時間(経路移動時間)
$\mathbf{f}_t, \mathbf{q}_t, \mathbf{v}_t$	時間帯tの全ての経路交通量，OD 交通需要，リンク交通量の平均ベクトル
$\boldsymbol{t}_t, \boldsymbol{c}_t$	リンク移動コスト，経路移動コストのベクトル
μ_{ti}	経路移動時間の最小値
$\boldsymbol{\mu}_t$	経路移動時間の最小値のベクトル

3. モデル

(1) 交通流

ノードNの集合とリンクA，および OD ペアWの集合を持つ交通ネットワーク$G(N, A)$を考える．確率的総交通需要(生成交通量)Qは対数正規分布に従う．

$$Q \sim LN\left(\mu_Q, \sigma_Q\right) \tag{1}$$

μ_Q，σ_Qは対数正規分布のパラメータである．時間帯別生成交通量Q_tは，割合p_tを用いて以下のように表される．

$$Q_t = p_t \cdot Q \ \forall t \in T \tag{2}$$

OD 交通需要Q_{ti}は，OD 配分率p_{ti}と時間帯別生成交通量Q_tの積として表現される．

$$Q_{ti} = p_{ti} \cdot Q_t \ \forall t \in T, \forall i \in I \tag{3}$$

ある時間帯tにおける OD 交通需要Q_{ti}，経路交通量F_{tij}，リンク交通量V_{ta}はそれぞれ以下の関係で表現される．

$$\sum_{j \in J_t} F_{tij} \Lambda_{aj} = Q_{ti}\ , i \epsilon I \tag{4}$$

$$V_{ta} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_t} \Delta_{aj} \cdot F_{tij} \ \forall a \in \mathrm{A}, \forall t \in T \tag{5}$$

ここで，Δ_{aj}は経路jがリンクaを通過する場合に 1，それ以外に 0 をとる接続行列，Λ_{aj}は経路jが OD ペアIに接続する場合に 1，それ以外に 0 をとる接続行列である．

ある時間帯tにおける経路交通量，OD 交通需要，リンク交通量のベクトルをそれぞれ以下で表現する．

$$\mathbf{F}_t = (F_{t11}, F_{t12}, \cdots F_{tij} \cdots F_{t|i||j|})^T \forall t \in T \tag{6}$$

$$\mathbf{Q}_t = (Q_{t1}, Q_{t2}, \cdots Q_{ti} \cdots Q_{t|i|})^T \forall t \in T \tag{7}$$

$$\mathbf{V}_t = (V_{t1}, V_{t2}, \cdots V_{ta} \cdots V_{t|a|})^T \forall t \in T \tag{8}$$

経路交通量，OD 交通需要，リンク交通量の平均ベクトルをそれぞれ以下で表現する．

$$\mathbf{f}_t = \mathrm{E}[\mathbf{F}_t] = (f_{t11}, f_{t12}, \cdots f_{tij} \cdots f_{t|i||j|})^T \forall t \in T \tag{9}$$

$$\mathbf{q}_t = \mathrm{E}[\mathbf{Q}_t] = (q_{11}, q_{12}, \cdots q_{ti} \cdots q_{|t||i|})^T \forall t \in T \tag{10}$$

$$\mathbf{v}_t = \mathrm{E}[\mathbf{V}_t] = (v_{t1}, v_{t2}, \cdots v_{ta} \cdots v_{t|a|})^T \forall t \in T \tag{11}$$

経路交通量の平均とリンク交通量の平均のベクトル集合はそれぞれ以下で表される．

$$\Omega_{\mathbf{f}_t} = \{\mathbf{f}_t | \wedge \mathbf{f}_t = \mathbf{q}_t, \mathbf{f}_t \geq \mathbf{0}\} \forall t \in T \tag{12}$$

$$\Omega_{\mathbf{v}_t} = \{\mathbf{v}_t | \mathbf{v}_t = \Delta \mathbf{f}_t, \wedge \mathbf{f}_t = \mathbf{q}_t, \mathbf{f}_t \geq \mathbf{0}\} \forall t \in T \tag{13}$$

(2) 移動時間

リンク移動時間は以下に示す BPR 関数に基づいて定義されるものとする．

$$T_{ta}(V_{ta},C_{ta}) = t_{ta}^0 \cdot \left(1+\gamma_a \cdot \left(\frac{V_{ta}}{C_{ta}}\right)^{\lambda_a}\right) \quad (14)$$
$$\forall t \in T, \forall a \in \mathrm{A}$$

上に示す，確率的なリンク移動時間は確定項と確率項に分離することができる．ここで，リンク交通量とリンク交通容量の変動に影響される確率項を，「リンク遅れ時間」と定義する．以下ではリンク移動時間に着目する．リンク交通量とリンク交通容量はそれぞれ対数正規分布に従うことから，リンク遅れ時間もまた対数正規分布に従うことがわかる．ここで，リンク遅れ時間はリンク移動時間を確定項の分だけ平行移動したものであるため，それぞれの分散共分散は等しい．各リンクにおける自由走行時間が所与であるとすると，リンク移動時間を推定することとリンク遅れ時間を推定することは等しくなる．しかし，移動時間と同時に推定する交通状態としてリンク交通量を含める場合，尤度を計算するために，分布形状を等しくする都合，推定する交通状態としてリンク遅れ時間を採用することが適当である．

$$T_{ta}(V_{ta},C_{ta}) = t_{ta}^0 + \frac{t_{ta}^0 \cdot \gamma_a}{{C_{ta}}^{\lambda_a}} \cdot (V_{ta})^{\lambda_a} \quad (15)$$
$$\forall t \in T, \forall a \in A$$

ここで，時間帯 t におけるリンク移動時間のベクトルを以下で表現する．

$$\mathbf{T}_t = (T_{t1}, T_{t2}, \cdots T_{ta} \cdots T_{t|a|})^T \ \forall t \in T \quad (16)$$

ある時間帯tにおけるリンク移動時間の平均ベクトルはそれぞれ以下で表される．

$$\mathbf{t}_t = \mathrm{E}[\mathbf{T}_t] = (t_{t1}, t_{t2}, \cdots t_{ti} \cdots t_{t|i|})^T \ \forall t \in T \quad (17)$$

経路移動時間は，その経路を通過するリンクの移動時間の和として表現される．

$$\Xi_{tij} = \sum_{a \in A} T_{ta} \cdot \Delta_{aj} \ \forall t \in T \forall i \in I, \forall j \in J_i \quad (18)$$

ここで，ある時間帯tにおける経路移動時間のベクトルを以下で表現する

$$\boldsymbol{\Xi}_t = (\Xi_{t11}, \Xi_{t12}, \cdots \Xi_{tij} \cdots \Xi_{t|i||j|})^T \forall t \in T \quad (19)$$

(3) 均衡配分モデル

経路コストc_{tij} は， 経路移動時間の平均と分散によって表現され，平均ベクトルを$\mathbf{c}_t$として表す．

$$\mathrm{c}_{tij} = E[\Xi_t] + \eta \cdot \mathrm{var}[\Xi_t] \forall t \in T, \forall i \in I, \forall j \in J \quad (20)$$

$$\mathbf{c}_t = E[c_{tij}] = (\mathrm{c}_{t11}, \mathrm{c}_{t12}, \cdots \mathrm{c}_{tij} \cdots c_{t|i||j|})^T \ \forall t \in T \quad (21)$$

なお，ηはドライバーのリスク回避的な経路選択行動を示すためのパラメータである．θは正の値をとるロジットモデルの分散パラメータであり，その値が大きいほど，確度の高い経路情報をもとに経路選択を行うことができる．経路交通量ベクトルが$\mathbf{f_t} \geq \mathbf{0}$であるとき, ある時間帯 t における経路コストの最小値は以下で表現される．

$$\mu_{ti} = min\{c_{tij}, j \in J_i\}, \forall t \in T, \forall i \in I \quad (22)$$

ここで，ある時間帯 t における経路コストの最小値のベクトルを以下で表現する．

$$\boldsymbol{\mu}_t = (\mu_{t1}, \mu_{t2}, \cdots \mu_{ti} \cdots \mu_{t|i|})^T \ \forall t \in T \quad (23)$$

経路交通量の平均ベクトル$\mathbf{f}_t$は，任意の経路$j \in J$と OD ペア$i \epsilon I$に対して，ワードロップ均衡状態にある．

$$f_{tij} > 0 \rightarrow c_{tij} = \mu_{ti} \ \forall t \in T, \forall i \in I \quad (24)$$
$$f_{tij} = 0 \rightarrow c_{tij} > \mu_{ti} \ \forall t \in T, \forall i \in I \quad (25)$$

ある OD ペアにおける UE 配分の均衡条件は，利用される経路の一般化コストはすべて等しく，利用されていない経路のコストより小さいかせいぜい等しくなることである．この均衡条件を踏まえると，利用者均衡条件は変分不等式問題として以下に表せる．

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} c_{tij} \cdot (f_{tij} - {f_{tij}}^*) \geq 0 \ \forall t \in T \quad (26)$$

$$\sum_{j \in J_i} f_{tij} = q_{ti} \forall t \in T \quad (27)$$

$$\mathbf{f}_t \geq \mathbf{0} \ \forall t \in T \quad (28)$$

また，(26)は以下のようにベクトル表記が可能である．

$$\mathbf{c}_t \cdot (\mathbf{f}_t - {\mathbf{f}_t}^*) \geq \ \forall t \in T \quad (29)$$

ここで，${f_{tij}}^*, {\mathbf{f}_t}^*$は，それぞれ均衡状態における$f_{tij}, \mathbf{f}_t$を表す．

(4) 最尤推定モデル

本節では，峪・内田 (2020) [1]で提案された手法に基づき，複数時間帯を対象として，尤度最大化によって，交通状態を推定する手法について述べる．

時間帯tにおいて，G日間の交通観測データが得られたとき，g 日目の観測に対する観測状態ベクトル$\mathbf{m}_{gt}$と観測値ベクトル$\hat{\mathbf{d}}_{gt}$を定義する．リンクaにおいて観測された交通状態のパターンをK_aとする．ここで，K_aの各パターンは，リンク交通量のみが観測される場合$\{v\}$，リンク遅れ時間のみが観測される場合$\{t\}$，リンク交通量とリンク遅れ時間の双方が観測される場合$\{v,t\}$，いずれも観測されない場合の４種類からなる．

$g \in \{1,\dots,G\}$日目に観測されるデータ数を$n(g)$，時間帯tとすると，多変量対数正規分布$\mathbf{X} \sim LN\ (\boldsymbol{\mu}_{Q_t},\ \boldsymbol{\Sigma}_{Qt})$に従う道路ネットワーク全体の交通状態は，それに対応する以下の多変量正規分布の尤度関数を最大化することによって推定することができる．

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\mu}_{Q_t},\ \boldsymbol{\Sigma}_{Qt}) = \prod_{g=1}^{G} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\hat{\boldsymbol{d}}_{gt} - \boldsymbol{\mu}_{gt}\right)^T \boldsymbol{\Sigma}_{gt}^{-1} \left(\hat{\boldsymbol{d}}_{gt} - \boldsymbol{\mu}_{gt}\right)\right)}{2\pi^{\frac{n(g)}{2}} \left[\boldsymbol{\Sigma}_{gt}\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (30)$$
$$\forall g \in G, \forall t \in T$$

ここで，以下の関係が成立する．

$$\boldsymbol{\Sigma}_{gt} = \mathbf{M}_{gt} \boldsymbol{\Sigma}_{Qt} \mathbf{M}_{gt}^T \ \forall g \in G, \forall t \in T \quad (31)$$
$$\boldsymbol{\mu}_{gt} = \mathbf{M}_{gt} {\boldsymbol{\mu}_{Qt}}^T \ \forall g \in G, \forall t \in T \quad (32)$$
$$\hat{\boldsymbol{d}}_{gt} = \mathbf{M}_{gt} \boldsymbol{d}_{gt}^T \ \forall g \in G, \forall t \in T \quad (33)$$

ここで，$\boldsymbol{d}_{gt}$は，$g \in \{1, \dots, G\}$日目に道路ネットワーク全体で観測される交通状態を表すベクトルで，以下のように定義する．

$$\boldsymbol{d}_{gt} = \begin{pmatrix} \hat{v}_1 & \hat{t}_1 & \cdots & \hat{v}_a & \hat{t}_a & \cdots & \hat{v}_{|A|} & \hat{t}_{|A|} \end{pmatrix} \quad (34)$$

ここで，$\hat{v}_{|A|}$，$\hat{t}_{|A|}$はそれぞれ，観測されたリンク交通量，リンク遅れ時間の対数をとったものである．$\mathbf{M}_{gt}$は，観測データ$\boldsymbol{d}_{gt}$を縮減する行列である．

4. 感度分析

既往研究では，尤度最大化問題を解いて交通状態を推定する際に，均衡制約付きの最適化問題を解くことが，解の探索方向を見つけることを困難としている．そこで本章では，感度分析により，摂動変数の局所点近傍において，尤度関数を解析的に近似することで，効率的に解を探索する手法を提案する．ここでの議論は Yang and Bell [4]に基づいて言及する．

Yang and Bell [4]では，リンクの移動コスト関数$\mathbf{t}_t(\mathbf{v}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t)$と，OD 交通需要ベクトル$\mathbf{q}_t(\boldsymbol{\varepsilon}_q)$に摂動パラメータを仮定している．ここで，摂動パラメータは，リンクの通行料の摂動$\boldsymbol{\varepsilon}_t$と OD 交通需要の摂動$\boldsymbol{\varepsilon}_q$をそれぞれ想定している．本研究では，尤度最大化問題において，未知変数を OD 交通需要として交通状態推定を行うことから，リンクの通行料についての摂動は考慮しないこととする．よって，以下の議論では，OD 配分率p_{ti}を摂動パラメータε_iとして設定する．そのため，摂動パラメータε_iは，OD 行列推定問題における OD 交通需要$\mathbf{q}_t$の変動を表す．ここで，摂動パラメータのベクトルを$\boldsymbol{\varepsilon}$と表現する．

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{p}_t \ \forall t \in T \quad (35)$$

$$\mathbf{p}_t = (p_{t1}, p_{t2}, \cdots p_{ti} \cdots p_{t|\mathrm{I}|})^T \forall t \in T \quad (36)$$

(29)で示した変分不等式問題は，摂動$\boldsymbol{\varepsilon}$を考慮すると以下のように表現される．

$$\mathbf{c}_t(\mathbf{f}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon}))^T(\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon})) \geq 0, \forall\, \mathbf{f}_t \in \Omega_{\mathbf{f}_t}(\boldsymbol{\varepsilon}) \forall t \in T \quad (37)$$

ここで，$\mathbf{f}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon})$は，摂動$\boldsymbol{\varepsilon}$を考慮した均衡状態の$\mathbf{f}_t$を示す．

感度分析の導入にあたり，2 つの技術的困難が伴う．１つは，変分不等式問題はパスベースの問題として定式化されているので，未知変数である経路交通量は解として一意ではないことである．２つは，交通流がゼロの経路，すなわち，ある OD ペア間で均衡フローが流れていない経路（非均衡経路）及び，経路集合の中で，いくつかの経路の線形結合よって表現される経路（従属経路）を経路集合の中に含めると，線形方程式が解けないことである．そのため，この２つの問題を解決するためのアプローチとして，道路ネットワークの均衡問題に対して，次の２つのような仮定を設けて分析を行う．

○仮定１

リンクコスト関数ベクトル$\mathbf{t}_t(\mathbf{v}_t)$は，正のリンクフロー$\mathbf{v}_t$に対して正かつ強単調であり，$\mathbf{v}_t$で一回連続微分可能，$\mathbf{q}_t(\boldsymbol{\varepsilon})$は$\boldsymbol{\varepsilon}$で一回連続微分可能である．

つまり，リンクコスト関数$\mathbf{t}_t(\mathbf{v}_t)$は，リンク交通量の平均ベクトルフロー$\mathbf{v}_t$に対してヤコビアン$\nabla\mathbf{t}_t(\mathbf{v}_t)$が正定値である．したがって，利用者均衡配分問題において，ヤコビアンが正定値であると，目的関数が凸になるのでリンク交通量は一意に決まる．本研究では，(20)式のように，経路選択基準を経路移動時間の平均と分散の和としている．また，リンク移動時間の共分散は考慮していない．したがって，リンク移動時間の平均と分散の和を実質的なリンクコストとして定義できる．これにより，実質的なリンクコストと経路コストの間の加法性が成立する．よって，本研究においても仮定１が満たされる．

○仮定２

均衡状態にある道路ネットワークにおけるすべての経路上に独立な正の経路フローベクトルが存在する．

ここでは，摂動$\boldsymbol{\varepsilon}$を考慮した道路ネットワークの均衡問題を考える．まず，$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$における均衡問題に注目する．道路ネットワークの均衡問題は，以下の方程式に対する経路交通量の平均ベクトル$\mathbf{f}_t$を用いて表現される．ここで，$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$はパラメータ$\varepsilon$の全ての要素がゼロであることを意味する．

$$\mathbf{c}_t(\mathbf{f}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0})) - \boldsymbol{\pi} - \Lambda^T \boldsymbol{\mu}_t = \mathbf{0} \ \forall t \in T \quad (38)$$

$$\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{f}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}) = \mathbf{0} \ \forall t \in T \quad (39)$$

$$\Delta \mathbf{f}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}) - \mathbf{q}_t(\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}) = \mathbf{0} \ \forall t \in T \quad (40)$$

$$\mathbf{f}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}) \geq \mathbf{0} \ \forall t \in T \quad (41)$$

$$\boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0} \quad (42)$$

（38）の$\mathbf{c}_t$は前に定義した経路コスト関数ベクトル，$\boldsymbol{\pi}$は経路交通量の平均の非負条件に対応するラグランジュ乗数のベクトルである．ここで，ある時間帯$\boldsymbol{t}$の OD ペア$\boldsymbol{i}$の経路交通量の非負条件に対応するラグランジュ乗数をπ_{ti}とすると，$f_{tij} = 0$におけるラグランジュ乗数π_{ti}は正であり，$f_{tij} > 0$におけるラグランジュ乗数π_{ti}はゼロである．本問題では，均衡化された経路のみを考えるので，ラグランジュ乗数π_{ti}は常にゼロである．したがって，経路交通量の平均がゼロの経路を除いた経路/リンク接続行列，経路/OD 接続行列をそれぞれ$\overline{\Delta}, \overline{\Lambda}$とすると，(38)-(42)は以下のように縮小される．

$$\bar{\mathbf{c}}_t(\mathbf{f}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0})) - \overline{\Lambda}^T \boldsymbol{\mu}_t = \mathbf{0} \ \forall t \in T \quad (43)$$

$$\overline{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}) - \mathbf{q}_t(\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}) = \mathbf{0} \ \forall t \in T \quad (44)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}) \geq \mathbf{0} \ \forall t \in T \quad (45)$$

ここで，$\bar{\mathbf{c}}_t(\mathbf{f}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}))$は，非均衡経路を除いた経路コストに関するベクトルを表す．仮定 2 より，以下の連立方程式は正の解$\bar{\mathbf{f}}_t{}^* > \mathbf{0}$を持つ．

$$\begin{bmatrix} \overline{\Delta} \\ \overline{\Lambda} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_t(\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}) \\ \mathbf{q}_t(\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}) \end{bmatrix} \ \forall t \in T \quad (46)$$

次に，パラメータ$\boldsymbol{\varepsilon}$が摂動する問題を考えるにあたり，線形方程式を解く必要がある．そのためには，接続行列$\bar{\Delta}, \bar{\Lambda}$が線形独立でなければならない．よって，接続行列$\bar{\Delta}, \bar{\Lambda}$それぞれから従属している経路を除去し，縮小した経路/リンク接続行列，経路/OD 接続行列をそれぞれ$\tilde{\Delta}$および$\widetilde{\Lambda}$とすると，(43)-(44)は以下のように縮小される．

$$\widetilde{\mathbf{c}_t}(\mathbf{f}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon})) - \widetilde{\Lambda}^T \boldsymbol{\mu}_t = \mathbf{0}\ \forall t \in T \quad (47)$$

$$\widetilde{\Lambda}\widetilde{\mathbf{f}_t}^*(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{q}_t(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}\ \forall t \in T \quad (48)$$

ここで，$\widetilde{\mathbf{c}_t}(\mathbf{f}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon}))$は非均衡経路と従属経路を除いた経路コストに関するベクトルを表す．仮定 1 より，リンクコストと OD 交通需要に関する摂動は微分可能である．よって(47)と(48)の両辺を摂動$\boldsymbol{\varepsilon}$に関して微分すると，以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\widetilde{\mathbf{f}}_t}\widetilde{\mathbf{c}_t}(\mathbf{f}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon})) & -\widetilde{\Lambda}^T \\ \widetilde{\Lambda} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_\varepsilon \widetilde{\mathbf{f}_t} \\ \nabla_\varepsilon \boldsymbol{\mu}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_\varepsilon \widetilde{\mathbf{c}_t}(\mathbf{f}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon})) \\ \nabla_\varepsilon \mathbf{q}_t(\boldsymbol{\varepsilon}) \end{bmatrix}\ \forall t \in T \quad (49)$$

左辺第一項をヤコビアン行列に置き換えると，以下のようになる．

$$J_{\widetilde{\mathbf{f}}_t}(0) = \begin{bmatrix} \nabla_{\widetilde{\mathbf{f}}_t}\widetilde{\mathbf{c}_t}(\mathbf{f}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon})) & -\widetilde{\Lambda}^T \\ \widetilde{\Lambda} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\ \forall t \in T \quad (50)$$

ここで，経路コスト関数$\widetilde{\mathbf{c}_t}(\mathbf{f}_t{}^*)$は，経路交通量$\widetilde{\mathbf{f}_t}$で直接偏微分することはできない．そのため，以下のように，経路コストとリンクコストの加法性を用いて，リンクコスト関数を，リンク交通量で微分したものとリンク/経路接続行列の積して分解したものを考える．

$$\nabla_{\widetilde{\mathbf{f}}_t}\widetilde{\mathbf{c}_t}(\mathbf{f}_t{}^*) = \tilde{\Delta}^T \nabla_{\mathbf{v}_t}\mathbf{t}_t(\mathbf{v}_t)\tilde{\Delta}\ \forall t \in T \quad (51)$$

ヤコビアン$J_{\widetilde{\mathbf{f}}_t}$を逆行列として計算し，陰関数定理を用いると，摂動$\boldsymbol{\varepsilon}$による経路交通量及び経路コストの最小値の微小変化は，以下の式で推定される．

$$\begin{bmatrix} \nabla_\varepsilon \widetilde{\mathbf{f}_t} \\ \nabla_\varepsilon \boldsymbol{\mu}_t \end{bmatrix} = \left[J_{\widetilde{\mathbf{f}}_t}(\mathbf{0})\right]^{-1} \begin{bmatrix} -\nabla_\varepsilon \widetilde{\mathbf{c}_t}(\mathbf{f}_t{}^*(\boldsymbol{\varepsilon})) \\ \nabla_\varepsilon \mathbf{q}_t(\boldsymbol{\varepsilon}) \end{bmatrix}\ \forall t \in T \quad (52)$$

以上より，3 章で示した最尤推定問題において，均衡制約付きの尤度最大化問題を解かずとも，感度分析を用いて，(53)に示すように，摂動パラメータ$\boldsymbol{\varepsilon}$を介した小問題を繰り返し解くことで，解の効率的な探索が可能となった．

$$\begin{aligned} &L(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{\mu}_{Qt},\ \boldsymbol{\Sigma}_{Qt}) \\ &\quad = \prod_{g=1}^{G} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\widehat{\boldsymbol{d}}_{gt} - \boldsymbol{\mu}_{gt}(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{\mu}_{Qt},\ \boldsymbol{\Sigma}_{Qt})\right)^T \boldsymbol{\Sigma}_{gt}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{\mu}_{Qt},\ \boldsymbol{\Sigma}_{Qt}) (\widehat{\boldsymbol{d}}_{gt} - \boldsymbol{\mu}_{gt}(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{\mu}_{Qt},\ \boldsymbol{\Sigma}_{Qt}))\right)}{2\pi^{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{g})/2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{\Sigma}_{gt}\right)^{\mathbf{1/2}}}\ \forall t \in T \end{aligned} \quad (53)$$

5. 今後の展望

本研究では，感度分析により，摂動変数の局所点近傍において，尤度関数を解析的に近似することで，大規模ネットワークにおいて最尤解を逐次的に探索する手法を提案した．今後の展望として，OD 交通需要の変動係数を摂動変数とした場合の感度分析アルゴリズムの定式化およびテストネットワークでの数値計算による検証が必要である．

参考文献

1) 峪　龍一，内田　賢悦：プローブデータと感知器データを組み合わせた交通状態の時空間推定，第 62 回土木計画学研究発表会，2020.
2) 川村　雄斗，峪　龍一，内田　賢悦：不完全交通データを活用した道路ネットワーク交通状態のリアルタイム更新，第 63 回土木計画学研究発表会，2021.
3) Tobin, RL and Frizes, TL : Sensitivity analysis for equilibrium network flows. Transportation Science, 22, 242-250, 1988.
4) Yang and Bell : Sensitivity analysis of network traffic equilibrium revisited: the corrected approach, In: 4th IMA International Conference on Mathematics in Transport Institute of Mathematics and its Applications, September, London, United Kingdom, 2009.

Improved computational efficiency of traffic srate estimation for multiple time periods on large road networks

Yuto KAWAMURA, Ryuichi TANI and Kenetsu UCHIDA

This study proposes a computationally efficient method for estimating link traffic flow and link delay time for an entire large-scale road network during multiple time periods using data observed from traffic detectors and probe cars. In previous studies, the structure between the parameters of the link traffic flow and the link delay time to be estimated has become complex in extending the computation from a single time period to multiple time periods. Furthermore, when estimating traffic state by solving a likelihood maximization problem, solving an optimization problem with equilibrium constraints makes it difficult to find the search direction for the solution. This can require a large amount of computation time when scaling up for large networks. Therefore, we use a sensitivity analysis to analytically approximate the likelihood function in the neighborhood of local points of the perturbed variables to efficiently search for solutions in large-scale networks.