動的システム最適配分の大域的最適解：待ち行列は存在しうるか

酒井 高良 [1]・赤松 隆 [2]・佐津川 功季 [3]

[1]学生会員　東北大学大学院情報科学研究科・JSPS 特別研究員 DC （〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408）
E-mail: takara.sakai.t1@dc.tohoku.ac.jp (Corresponding Author)
[2]正会員　東北大学教授　大学院情報科学研究科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408）
E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp
[3]正会員　東北大学助教　大学院情報科学研究科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-407）
E-mail: satsukawa@tohoku.ac.jp

本研究では，ツリーネットワークにおいて利用者の異質性を仮定した出発時刻選択問題を対象に「動的システム最適状態では全ボトルネックで待ち行列が存在しない」ことを証明する．具体的にはまず，渋滞（待ち行列）を明示的に考慮した上で，動的システム最適配分を相補性条件付き数理計画問題として定式化する．次に，問題の大域最適解では，いかなるボトルネックでも待ち行列が存在しないことを証明する．最後に，この事実を先験的に用いると，動的システム最適配分は数理構造が明快な線形計画問題に帰着できることを示す.

Key Words: *departure time choice, tree network, bottleneck model, dynamic system optimal assignment, global optimal solution*

1. はじめに

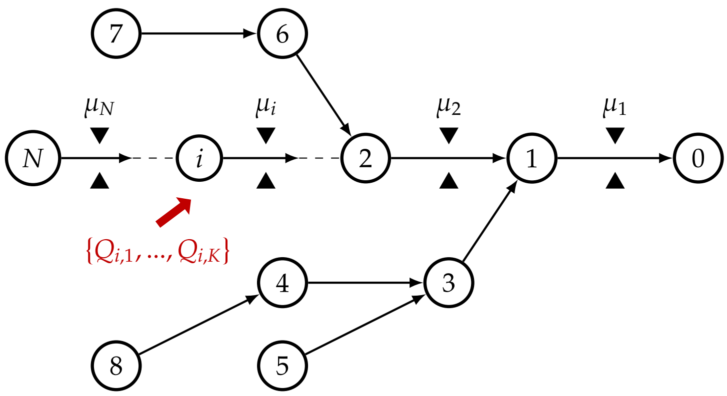
複数ボトルネックを考慮した出発時刻選択問題において,「総交通費用が最小化された交通状態では，すべてのボトルネックで待ち行列は存在しない」という主張は，直観的な尤もらしさに反して，いまだ厳密に証明がなされていない問いである．このことは「待ち行列が存在しないという前提で総交通費用を最小化した交通状態」と，単純に「総交通費用を最小化した交通状態」とが異なる状態である可能性を排除できていないことを意味しており，出発時刻選択問題の体系立った解析を妨げている．仮に上記の主張が真であった場合は，出発時刻選択問題の数学的性質が明らかになるだけでなく，見通しの良い厚生分析や明快な制御戦略の策定が可能となる.

本研究では，多起点一終点ツリーネットワークにおいて利用者の異質性を仮定した出発時刻選択問題を対象に，**主定理**:「総交通費用が最小化された交通状態では，すべてのボトルネックで待ち行列は存在しない」を証明する．すなわち，本稿のタイトルに対する答えは No であり，時空間上の一部に待ち行列が存在することによって総交通費用が最小化されるといったパラドックスは発生しないことを明らかにする．具体的にはまず，待ち行列を明示的に考慮した上で，総交通費用を最小化する問題として動的システム最適 (DSO: dynamic system optimal) 配分を定式化する．このとき，待ち行列ダイナミクスを表す条件が相補性条件となるため，DSO 配分は相補性条件付き数理計画問題となる．次に，この問題の大域最適解では，いかなるボトルネックでも待ち行列が存在しないことを，問題構造を活用した帰納法によって証明する．最後に，この事実を先験的に用いると，DSO 配分は数理構造が明快な線形計画問題に帰着できることを示す.

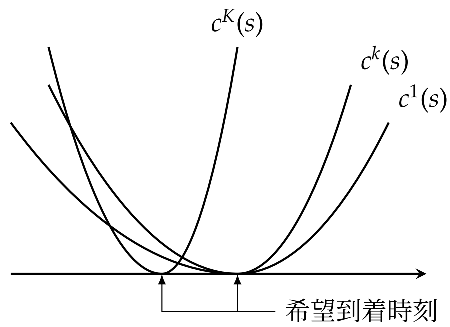
本稿の構成を次に示す．まず，2 章において基本的な状況設定を述べ，続く 3 章で DSO 配分を定式化する．そして，4 章で**主定理**を証明し，その系として DSO 配分の理論的特性を示す．最後に 5 章にて，本研究のまとめと今後の課題を述べる.

2. 状況設定

本研究では，**図–1** に示すような N 個の起点と唯一の終点 0 からなるツリーネットワークを解析対象とする．起点の集合を $\mathcal{N} \equiv \{i \mid i = 1, 2, ..., N\}$ で表し，各起点 i にただ一つ存在する直下流リンクのインデックスも i と対応付けて表す．以降の解析結果を明瞭に示すため，各起点 i について定義される 2 つの集合を導入する；起点 i とそれより下流側起点の集合を $\underline{\mathcal{N}}_i$，起点 i とそれより上流側起点の集合を $\overline{\mathcal{N}}_i$ と定義する．集合 $\underline{\mathcal{N}}_i$ および $\overline{\mathcal{N}}_i$ はツリーネットワークの構造から一意に定まる．例えば**図–1** の $i = 3$ に着目すると，$\underline{\mathcal{N}}_3 = \{3, 1\}$, $\overline{\mathcal{N}}_3 = \{3, 4, 8, 5\}$ となる．ここで集合 $\underline{\mathcal{N}}_i$，$\overline{\mathcal{N}}_i$ の要素に



図–1 多起点一終点ツリーネットワーク
全リンクにボトルネックが存在する



図–2 利用者の異質性（希望到着時刻とスケジュール遅れ時間価値）を反映したスケジュールコスト関数

は，ともに起点 i 自身が含まれることに注意されたい．またリンク i の直下流リンクを $\underline{i}$ と表す．

各リンク i の下流端には容量 μ_i のボトルネックが存在する．容量を超える交通量がボトルネックに流入した場合，ボトルネック待ち行列が形成される．この待ち行列のダイナミクスは point queue モデルで表現する（詳細な定式化は後述する）．また，リンク i の自由走行時間を d_i と表す．

ネットワーク上を旅行する利用者は K 個のグループ $\mathcal{K} \equiv \{1, 2, \ldots, K\}$ のいずれかに所属する．グループ k の利用者の希望到着時刻を s^{k*} と表し，グループ k の利用者が時刻 s に終点へ到着したときに経験するスケジュールコストを $c^k(s \mid s^{k*})$ と表す．ただし $c^k(s \mid s^{k*})$ は希望到着時刻 s^{k*} において 0，それ以外の配分対象時間帯 $\mathcal{S}$ において正の有限値をとる関数である (i.e., $c^k(s^{k*} \mid s^{k*}) = 0$, $0 < c(s \mid s^{k*}) < \infty \ \forall s \in \mathcal{S} \setminus \{s^{k*}\}$)．以降ではグループ k のスケジュールコスト関数を単に $c^k(s)$ と表記する．各グループのスケジュールコスト関数は，**図–2** に示すような形状となる．本研究では，希望到着時刻とスケジュール遅れ時間価値の両方の異質性を同時に考慮していることに注意されたい．各起点にはすべてのグループの利用者が存在するものとする．起点 i，利用者グループ k の利用者の総数は与件であり $Q_{i,k}$ と表す．

3. 定式化

本章では，DSO 配分を相補性条件付き数理計画問題として定式化する．まず，3.(1) において，問題の決定変数となる交通状態変数を，終点到着時刻を参照時刻として定義する．続いて 3.(2) において，それらの交通状態変数が満足すべき，物理的条件：待ち行列条件と需要保存条件を導入する．そして 3.(3) で，それらの物理的条件を制約条件として DSO 配分を定式化する．

(1) 交通状態変数の定義

本研究では，時々刻々の交通状態を表す変数を，唯一の終点への到着時刻を参照して定義する（i.e., ラグランジュ座標系アプローチ[1]）．具体的には，時刻 s に終点へ到着する利用者が，ボトルネック i へ流入（到着）する時刻を $\tau_i(s)$，ボトルネック i から流出（出発）する時刻を $\sigma_i(s)$ と表す．時刻 $\tau_i(s)[\sigma_i(s)]$ におけるボトルネック i の累積流入 [流出] 曲線を $A_i(\tau_i(s))[D_i(\sigma_i(s))]$ と表す．ここで，ツリーネットワークには経路選択が存在せず，各リンクで FIFO 原則が成立していることを踏まえると，任意の時刻 s に対して $\tau_i(s)$，$\sigma_i(s)$ は一意に定まることに注意されたい．時刻 s に終点へ到着する利用者がボトルネック i で経験する待ち行列遅れ時間を $w_i(s)$ とすると，$\tau_i(s)$，$\sigma_i(s)$ および $w_i(s)$ には，次の関係が成立する：

$$\sigma_i(s) - \tau_i(s) = w_i(s) \qquad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S}. \qquad (1)$$

図–3 は，時刻 s に終点へ到着する利用者の時空間軌跡を用いて $w_i(s)$，$\tau_i(s)$，$\sigma_i(s)$ の関係を図示したものである．以降では解析を明瞭にするため $d_i = 0 \ \forall i$ とする．なお，$\tau_i(s)$，$\sigma_i(s)$ は，式 (1) を下流側に向かって足し合わせることで，次のようにも書ける：

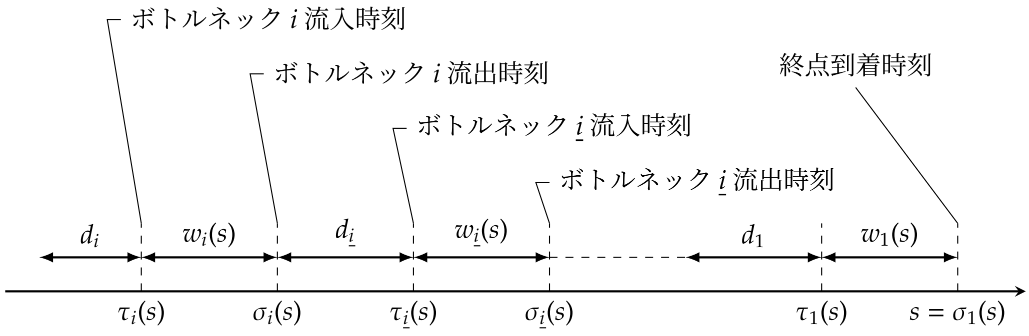
$$\tau_i(s) = s - \sum_{j: j \in \underline{\mathcal{N}}_i} w_j(s) \qquad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S}, \qquad (2)$$

$$\sigma_i(s) = s - \sum_{j: j \in \underline{\mathcal{N}}_i \setminus \{i\}} w_j(s) \qquad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S}. \qquad (3)$$

また，時刻 s に終点へ到着する起点 i，利用者グループ k の利用者の終点到着交通流率を $q_{i,k}(s)$ と表す．ただし，終点到着交通流率は非負 (i.e., $q_{i,k}(s) \geq 0$) である．

(2) 動的な交通流の物理的条件

任意の交通状態は，待ち行列条件および需要の保存条件を満足する必要がある．これらの条件が DSO 配分の制約条件となる．



図–3 時刻 s に終点へ到着する利用者の通行ボトルネック流入/流出時刻

a) 待ち行列条件

各ボトルネックでは，流入交通流率が容量を超過した場合に待ち行列が生じる．本研究では，このボトルネック待ち行列のダイナミクスを point queue モデルで表現する．先行研究[1),2)] に倣い，線形相補性条件と境界条件からなる待ち行列条件を定式化する．

最初にネットワーク FIFO 条件[1]に相当する境界条件から導出する．式 (2),(3) より，ネットワーク FIFO 条件：

$$s < s' \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sigma_i(s) < \sigma_i(s') \\ \tau_i(s) < \tau_i(s') \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s, s' \in \mathcal{S}$$

は，次の条件に帰着する[2]：

$$\dot{\tau}_i(s) > 0 \qquad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S}. \tag{4}$$

これが待ち行列条件における境界条件となる．

続いて，待ち行列の進展・解消を表す相補性条件を導出する．時刻 $\sigma_i(s)$ におけるボトルネック i の流出交通流率を $x_i(\sigma_i(s))$ と定義する．ボトルネックの物理的性質より，待ち行列が形成されている時間帯でボトルネック流出交通流率が容量に一致するため，$x_i(\sigma_i(s))$ は次のように定まる：

$$\begin{cases} x_i(\sigma_i(s)) = \mu_i & \text{if} \quad w_i(s) > 0 \\ x_i(\sigma_i(s)) \leq \mu_i & \text{if} \quad w_i(s) = 0 \end{cases}$$
$$\forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S}. \tag{5}$$

ここで，時刻 s に終点へ到着する利用者のボトルネック i 流出交通流率 $y_i(s)$ を次のように定義する：

$$y_i(s) \equiv \frac{\mathrm{d}A_i(\tau_i(s))}{\mathrm{d}s} \qquad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S}. \tag{6}$$

$y_i(s)$ は起点・グループ別の終点到着流率を集計した変数であるので $y_i(s) = \sum_{j \in \overline{\mathcal{N}}_i} \sum_{k \in \mathcal{K}} q_{j,k}(s)$ が成立する．また，$x_i(\sigma_i(s))$ と $y_i(s)$ には，FIFO 原則 (i.e.,$A_i(\tau_i(s)) = D_i(\sigma_i(s))$) より以下の関係式：

$$\frac{\mathrm{d}A_i(\tau_i(s))}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}D_i(\sigma_i(s))}{\mathrm{d}s}$$
$$\Leftrightarrow \quad y_i(s) = \frac{\mathrm{d}D_i(\sigma_i(s))}{\mathrm{d}s}\dot{\sigma}_i(s)$$
$$\Leftrightarrow \quad y_i(s) = x_i(\sigma_i(s))\dot{\sigma}_i(s) \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S} \tag{7}$$

が常に成立する．さらに，式 (4) より $\dot{\sigma}_i(s) = \dot{\tau}_{\underline{i}}(s) \neq 0$ であることを踏まえると，相補性条件 (5) は次の条件に帰着する：

$$\begin{cases} y_i(s) = \mu_i \dot{\sigma}_i(s) & \text{if} \quad w_i(s) > 0 \\ y_i(s) \leq \mu_i \dot{\sigma}_i(s) & \text{if} \quad w_i(s) = 0 \end{cases}$$
$$\forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S}.$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{j \in \overline{\mathcal{N}}_i} \sum_{k \in \mathcal{K}} q_{j,k}(s) = \mu_i \dot{\sigma}_i(s) & \text{if} \quad w_i(s) > 0 \\ \displaystyle\sum_{j \in \overline{\mathcal{N}}_i} \sum_{k \in \mathcal{K}} q_{j,k}(s) \leq \mu_i \dot{\sigma}_i(s) & \text{if} \quad w_i(s) = 0 \end{cases}$$
$$\forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S}. \tag{8}$$

これがボトルネックにおける待ち行列ダイナミクスを表す相補性条件となる．

b) 需要保存条件

配分対象時間帯 $\mathcal{S}$ において，すべての利用者は起点から終点まで旅行する．このことは以下に示す需要保存条件として表せる：

$$\int_{\mathcal{S}} q_{i,k}(s)\mathrm{d}s = Q_{i,k} \qquad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \tag{9}$$

(3) 動的システム最適配分

DSO 配分の定式化に先立ち，各利用者の交通費用を定義する．利用者は，起点から終点まで旅行することにより，通過ボトルネックにおける待ち行列遅れ時間とスケジュールコストを経験する．起点 i，グループ k の利用者が時刻 s に終点へ到着したときに経験する交

[1] 累積流入 [流出] 曲線の Lipschitz 連続条件あるいは non-vehicle holding 条件と解釈することもできる．

[2] 変数や関数に対する終点到着時刻 s についての微分を上付きドットで表す．

通費用を次のように表す：

$$C_{i,k}(s) = c^k(s) + \alpha \sum_{j;j\in\underline{N}_i} w_j(s) \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall i \in \mathcal{N}. \tag{10}$$

ここで α は待ち行列遅れ時間を交通費用に換算するパラメータであり，本研究では利用者グループによらず $\alpha = 1$ とする（i.e., 待ち行列遅れ時間に対するコスト感度に，利用者の異質性を仮定しない）．

DSO 配分は，前述の物理的条件のもとで，各利用者の交通費用 (10) の総和を最小化する相補性条件付き数理計画問題として定式化される：

[DSO]

$$\min_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{w}}. \quad \sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{k\in\mathcal{K}}\int_{\mathcal{S}}\left(c^k(s) + \sum_{j;j\in\underline{N}_i} w_j(s)\right)q_{i,k}(s)\mathrm{d}s \tag{11}$$

$$\text{s.t.} \quad \mu_i\dot{\sigma}_i(s) - \sum_{j\in\overline{N}_i}\sum_{k\in\mathcal{K}} q_{j,k}(s) \geq 0 \qquad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S}, \tag{12}$$

$$\left(\mu_i\dot{\sigma}_i(s) - \sum_{j\in\overline{N}_i}\sum_{k\in\mathcal{K}} q_{j,k}(s)\right)w_i(s) = 0 \qquad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S}, \tag{13}$$

$$\int_{\mathcal{S}} q_{i,k}(s) = Q_i^k, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \tag{14}$$

$$\sum_{j\in\underline{N}_i} \dot{w}_i(s) < 1 \quad \forall i \in \mathcal{N}, \tag{15}$$

$$q_{i,k}(s) \geq 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S} \tag{16}$$

$$w_i(s) \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S}. \tag{17}$$

式 (3) より，変数 $\sigma_i(s)$ は変数 $w_i(s)$ の従属変数となっていることに注意されたい．なお，制約条件 (12), (13), (17) が待ち行列ダイナミクスを表す相補性条件を意味する．制約条件 (15) は，待ち行列条件の境界条件 (4) を，式 (2) に基づき変数 $w_i(s)$ のみで記述したものである．[DSO] の最適解を $\{q_{i,k}^{\mathrm{S}}(s)\}$，$\{w_i^{\mathrm{S}}(s)\}$ とする．

[DSO] の制約条件には相補性条件が含まれるため，[DSO] は相補性条件付き数理計画問題のクラスに分類される．一般に，このようなクラスの問題は，様々な理由で解析が困難である[3]．例えば，制約領域の凸性が保証されないため，仮に目的関数の性質が良かったとしても，解の存在や一意性をはじめとする問題の特徴付けが難しい．また，最適性の必要条件が複雑な形式となるため，解の性質を把握しにくいことも知られている．

4. 主定理の証明

本章では，総交通費用が最小化された状態において，いかなるボトルネックでも待ち行列は存在しないことを証明する．まず 4.(1) にて，上記事柄を主張する主定理を導入する．続いて 4.(2) 全体を用いて，主定理を証明する．最後に 4.(3) で，主定理を用いて DSO 配分の理論的特性を示す．

(1) 主定理

総交通費用が最小化された状態において，いかなるボトルネックでも待ち行列は存在しないという主張は，以下の主定理にまとめられる：

主定理（DSO）． の最適解において，いかなるボトルネックでも待ち行列は存在しない：

$$w_i^{\mathrm{S}}(s) = 0 \qquad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S}. \tag{18}$$

証明は 4.(2) で示すが，ここではまず，**主定理**がもたらす数学的な恩恵として，DSO 配分が線形計画問題に帰着するという事実を先に述べておく．具体的には，$\{w_i^{\mathrm{S}}(s)\} = 0$ であることを先験的に考慮すると，[DSO] の待ち行列に関する制約条件 (12), (13)（非線形制約）を，ボトルネック容量制約条件を表す線形不等式制約に帰着させることできる．さらに，自明に制約条件 (15), (17) が不要となる．また，総交通費用も総スケジュールコストの項のみとなるため，問題の目的関数も線形となる．したがって，[DSO] はボトルネック容量制約のもとで総スケジュールコストを最小化する線形計画問題 [DSO-LP] に帰着する．このことを次の系にまとめる：

系 1（等価な線形計画問題）． [DSO] の終点到着交通流率の最適解 $\{q_{i,k}^{\mathrm{S}}(s)\}$ は，次の線形計画問題 [DSO-LP] の最適解として得られる：

[DSO-LP]

$$\min_{\boldsymbol{q}}. \quad \sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{k\in\mathcal{K}}\int_{\mathcal{S}} c^k(s)q_{i,k}(s)\mathrm{d}s \tag{19}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j\in\overline{N}_i}\sum_{k\in\mathcal{K}} q_{j,k}(s) \leq \mu_i \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S}, \tag{20}$$

$$\int_{\mathcal{S}} q_{i,k}(s) = Q_i^k \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \tag{21}$$

$$q_{i,k}(s) \geq 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S}. \tag{22}$$

(2) 証明

本節全体を用いて帰納法により**主定理**を証明する．具体的にはまず，ツリーネットワークの最上流ボトルネック e を対象に，最適解で待ち行列が存在しないことを示す．続いて，それ以外の任意のボトルネック n を対象に，最適解で上流側ボトルネック $i \in \overline{N}_n \setminus \{n\}$ で待ち行列が存在しない場合は，当該ボトルネック n でも存在しないことを示す．

a) 準備

証明に先立ち，いくつかの記号および補助問題を定義する．[DSO] の実行可能領域を $\mathcal{X}$ とする：

$$\mathcal{X} \equiv \{\{q_{i,k}(s)\}, \{w_i(s)\} \mid (12), (13), (14), (15), (16), (17)\}.$$

$\mathcal{X}$ のうちフロー変数 $\{q_{i,k}(s)\}$ に関する部分を $\mathcal{X}^q$，待ち行列変数 $\{w_i(s)\}$ に関する部分を $\mathcal{X}^w$ と表す．ここで $\mathcal{X}^w$ に含まれる（i.e., 実行可能な）任意の待ち行列パターン $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_i(s)\}$ に対して，集合 $\Omega_i(\boldsymbol{\omega}), \overline{\Omega}_i(\boldsymbol{\omega})$ を定義する：

$$\begin{cases} \Omega_i(\boldsymbol{\omega}) \equiv \{s \in \mathcal{S} \mid w_i(s) > 0\} \\ \overline{\Omega}_i(\boldsymbol{\omega}) \equiv \mathcal{S} \setminus \Omega_i(\boldsymbol{\omega}) \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{N}. \tag{23}$$

これを用いて，$\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{X}^w$ を与件としたときの，[DSO] の目的関数 $f(\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{\omega})$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{\omega}) &\equiv \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathcal{S}} \left(c^k(s) + \sum_{j; j \in \underline{N}_i} \omega_j(s) \right) q_{i,k}(s) \mathrm{d}s \\ &= \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathcal{S}} c^k(s) q_{i,k}(s) \mathrm{d}s \\ &\quad + \sum_{i \in \mathcal{N}} \int_{\mathcal{S}} \omega_i(s) \left(\sum_{j \in \overline{N}_i} \sum_{k \in \mathcal{K}} q_{i,k}(s) \right) \mathrm{d}s \\ &= \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathcal{S}} c^k(s) q_{i,k}(s) \mathrm{d}s \\ &\quad + \sum_{i \in \mathcal{N}} \int_{\Omega_i(\boldsymbol{\omega})} \omega_i(s) \mu_i \left(1 - \sum_{j \in \underline{N}_i \setminus \{i\}} \dot{\omega}_j(s) \right) \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

さらに，[DSO] において $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{X}^w$ を与件とした問題を考える．この問題は $\boldsymbol{q} \equiv \{q_{i,k}(s)\}$ のみを決定変数とした線形計画問題として次のように定義される：

[DSO-LP-q($\boldsymbol{\omega}$)]

$$\min_{\boldsymbol{q}}. \quad f(\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{\omega}) \tag{24}$$

$$\text{s.t.} \quad \mu_i \left(1 - \sum_{j \in \underline{N}_i \setminus \{i\}} \dot{\omega}_j(s) \right) - \sum_{j \in \overline{N}_i} \sum_{k \in \mathcal{K}} q_{j,k}(s) \geq 0 \quad \forall s \in \overline{\Omega}_i(\boldsymbol{\omega}), \quad \forall i \in \mathcal{N}, \tag{25}$$

$$\mu_i \left(1 - \sum_{j \in \underline{N}_i \setminus \{i\}} \dot{\omega}_j(s) \right) - \sum_{j \in \overline{N}_i} \sum_{k \in \mathcal{K}} q_{j,k}(s) = 0 \quad \forall s \in \Omega_i(\boldsymbol{\omega}), \quad \forall i \in \mathcal{N}, \tag{26}$$

$$\int_{\mathcal{S}} q_{i,k}(s) = Q_i^k \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall i \in \mathcal{N} \tag{27}$$

$$q_{i,k}(s) \geq 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S} \tag{28}$$

この問題 [DSO-LP-q($\boldsymbol{\omega}$)] の実行可能領域を $\mathcal{G}(\boldsymbol{\omega}) \equiv \{\boldsymbol{q} \in \mathcal{X}^q \mid (25), (26), (27), (28)\}$ と表す．

b) 最上流ボトルネックにおける証明

ツリーネットワークにおいて，最上流に存在する任意のボトルネック e について考える．ここでボトルネック e には，上流ボトルネックが存在しないことに注意されたい．任意の $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{X}^w$ は [DSO] の制約条件を満足するため

$$\mu_n \left(1 - \sum_{j \in \underline{N}_e \setminus \{e\}} \dot{\omega}_j(s) \right) > 0 \qquad \forall s \in \mathcal{S}, \tag{29}$$

が成立する．ここで，ボトルネック e の待ち行列がすべての時刻について 0 である $\boldsymbol{\omega}'$ を考える (i.e., $\omega'_e(s) = 0 \ \forall s \in \mathcal{S}$)．式 (29) より以下が成立する：

$$\begin{aligned} & f(\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{\omega}) - f(\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{\omega}') \\ &= \int_{\Omega_e(\boldsymbol{\omega})} \omega_e(s) \mu_n \left(1 - \sum_{j \in \underline{N}_e \setminus \{e\}} \dot{\omega}_j(s) \right) \mathrm{d}s > 0 \\ & \qquad \forall \boldsymbol{q} \in \mathcal{X}^q, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{X}^w \setminus \{\boldsymbol{\omega}'\}. \end{aligned} \tag{30}$$

$$\Rightarrow \quad f(\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{\omega}') < f(\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{\omega}) \quad \forall \boldsymbol{q} \in \mathcal{X}^q, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{X}^w \setminus \{\boldsymbol{\omega}'\}. \tag{31}$$

さらに $\Omega_e(\boldsymbol{\omega}') = \varnothing$ および $\overline{\Omega}_e(\boldsymbol{\omega}') = \mathcal{S}$ であるので，時間帯 $s \in \overline{\Omega}_e$ に課される不等式制約条件 (25) と時間帯 $s \in \Omega_e$ に課される等式制約条件 (26) に着目すると以下が成立する：

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\omega}) \subseteq \mathcal{G}(\boldsymbol{\omega}') \qquad \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{X}^w. \tag{32}$$

関係式 (31), (32) より，[DSO] の最適解 (i.e., DSO 状態) において最上流ボトルネック e で待ち行列は発生しない．

c) 最上流以外のボトルネックにおける証明

最上流ボトルネックを除く任意のボトルネック n について考える．ボトルネック n より上流側ボトルネックの待ち行列がすべての時刻について 0 である待ち行列パターン $\boldsymbol{\omega}'$ を用意する (i.e., $\omega'_i(s) = 0 \ \forall i \in \overline{\mathcal{N}}_n \setminus \{n\}, \forall s \in \mathcal{S}$)．このとき，$\boldsymbol{\omega}'$ を与件とした問題 [DSO-LP-q($\boldsymbol{\omega}'$)] の目的関数 $f(\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{\omega}')$ は次のように書ける：

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{\omega}') &= \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathcal{S}} c^k(s) q_{i,k}(s) \mathrm{d}s \\ &\quad + \sum_{i \in \mathcal{N} \setminus \{\overline{\mathcal{N}}_n \setminus \{n\}\}} \int_{\Omega_i} \omega_i(s) \mu_i \left(1 - \sum_{j \in \underline{N}_i \setminus \{i\}} \dot{\omega}_j(s) \right) \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{33}$$

続いて，ボトルネック n および n より上流のボトルネック待ち行列がすべての時刻について 0 である待ち行列パターン $\boldsymbol{\omega}''$(i.e., $\omega''_i(s) = 0 \ \forall i \in \overline{\mathcal{N}}_n, \forall s \in \mathcal{S}$) を用意する．2 つの待ち行列パターン $\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}''$ に対して，最上流ボトルネックの場合と同様に，

$$f(\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{\omega}'') < f(\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{\omega}') \ \forall \boldsymbol{q} \in \mathcal{X}^q, \forall \boldsymbol{\omega}' \in \mathcal{X}^w \setminus \{\boldsymbol{\omega}''\}, \tag{34}$$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\omega}') \subseteq \mathcal{G}(\boldsymbol{\omega}'') \qquad \forall \boldsymbol{\omega}' \in \mathcal{X}^w, \tag{35}$$

が成立する．これより [DSO] の最適解 (i.e., DSO 状態) において最上流ボトルネックを除く任意のボトルネックにおいて，その上流側ボトルネックで待ち行列が存

在しない場合，当該ボトルネックでも待ち行列は存在しない．

以上より**主定理**は示された．□

(3) 解の存在と最適性条件

主定理を用いれば，DSO 配分は線形計画問題という性質の良い問題クラスに帰着できるので，解の存在について比較的簡単に議論できる：

系 2（解の存在）. 配分対象時間帯 $\mathcal{S}$ が十分大きく，すべてのボトルネック容量が非ゼロ (i.e., $\mu_i \neq 0$) であるとき，[DSO-LP] の解は必ず存在する．

また，[DSO-LP] の最適性条件も容易に書き下すことができる．

系 3（最適性条件）. 需要保存条件 (21) とボトルネック容量制約条件 (20) に対応するラグランジュ乗数をそれぞれ $\rho_{i,k}$，$p_i(s)$ とする．[DSO-LP] の最適解を $\{q^{\mathrm{S}}_{i,k}(s)\}$, $\{\rho^{\mathrm{S}}_{i,k}\}$ および $\{p^{\mathrm{S}}_i(s)\}$ とすると，これらは以下の条件を満足する：

[DSO-LP-OC]

$$\int_{\mathcal{S}} q^{\mathrm{S}}_{i,k}(s)\mathrm{d}s = Q_{i,k} \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \tag{36}$$

$$\begin{cases} \sum_{j \in \underline{\mathcal{N}}_i} p^{\mathrm{S}}_j(s) + c^k(s) = \rho^{\mathrm{S}}_{i,k} & \text{if} \quad q^{\mathrm{S}}_{i,k}(s) > 0 \\ \sum_{j \in \underline{\mathcal{N}}_i} p^{\mathrm{S}}_j(s) + c^k(s) \geq \rho^{\mathrm{S}}_{i,k} & \text{if} \quad q^{\mathrm{S}}_{i,k}(s) = 0 \end{cases}$$
$$\forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S}, \tag{37}$$

$$\begin{cases} \sum_{j \in \overline{\mathcal{N}}_i} \sum_{k \in \mathcal{K}} q^{\mathrm{S}}_{j,k}(s) = \mu_i & \text{if} \quad p^{\mathrm{S}}_i(s) > 0 \\ \sum_{j \in \overline{\mathcal{N}}_i} \sum_{k \in \mathcal{K}} q^{\mathrm{S}}_{j,k}(s) \leq \mu_i & \text{if} \quad p^{\mathrm{S}}_i(s) = 0 \end{cases}$$
$$\forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in \mathcal{S}. \tag{38}$$

ここで，[DSO-LP] の容量制約条件に対応するラグランジュ乗数の最適解 $p^{\mathrm{S}}_i(s)$ は，DSO 状態を達成するための最適混雑料金パターンと解釈できることに注意されたい．つまり，各ボトルネックにおいて，時々刻々$p^{\mathrm{S}}_i(s)$ の最適混雑料金を賦課することで，利用者の費用最小化原理に基づく出発時刻選択行動のもとで DSO 状態を達成できる．このことは，最適性条件 (38) が，利用者の出発時刻選択条件を意味することから確認できる．また，このとき需要保存条件に対応するラグランジュ乗数の最適解 $\rho^{\mathrm{S}}_{i,k}$ は，最適混雑料金を賦課したもとで実現する DSO 状態における起点 i，グループ k 利用者の均衡コストを意味する．

5. おわりに

本研究では，多起点一終点ツリーネットワークにおいて利用者の異質性を仮定した出発時刻選択問題を対象に，DSO 状態ではいかなるボトルネックでも待ち行列が存在しないことを証明した (**主定理**)．さらに，この事実を用いると DSO 配分は数理構造が明快な線形計画問題に帰着することを明らかにした．

主定理は，直感的な尤もらしさに反して解析的な証明がなされていない未解決問題であった．それにも関わらず，いくつかの研究では**主定理**を前提として結論を導いていため，出発時刻選択問題の理論体系には，ある種の不完全性が内在していた．本研究の証明はこの点を克服するものであり，出発時刻選択問題に対する理論的貢献は大きいと言える．

今後の課題として，経路選択を含むネットワークにおいても，同様の事実が成立するかどうか検証することが挙げられる．また，コリドーネットワークにおいて近年進展している，DSO 配分の解析解を用いて動的利用者均衡 (dynamic user equilibrium) 配分を解析するアプローチ[4),5),6)] と，本研究の結果を統合させていくことも重要な課題である．

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 (JP20J21744, JP21H01448, JP20H02267) の助成を受けた研究の一部です．ここに記し，感謝を表します．

参考文献

1) Akamatsu, T., Wada, K. and Hayashi, S.: The corridor problem with discrete multiple bottlenecks, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.81, No.3, pp.808–829, 2015.
2) Akamatsu, T., Wada, K., Iryo, T. and Hayashi, S.: A new look at departure time choice equilibrium models with heterogeneous users, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.148, pp.152–182, 2021.
3) Luo, Z.-Q., Pang, J.-S. and Ralph, D.: *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, Cambridge University Press, 1996.
4) 酒井高良, 赤松隆, 佐津川功季: スケジュールコストの異質性を考慮したタンデムボトルネック出発時刻選択問題, 土木学会論文集 D3（土木計画学）, Vol.77, No.4, pp.330–345, 2021.
5) Fu, H., Akamatsu, T., Satsukawa, K. and Wada, K.: Dynamic traffic assignment in a corridor network: Optimum vs. equilibrium, *arXiv*, 2021.
6) Sakai, T., Akamatsu, T. and Satsukawa, K.: A queue replacement principle for corridor problems with heterogeneous commuters, *working paper*, 2022.