パスの単調性を仮定したネットワークの到達可能確率の近似計算について

小林　俊一[1]・中山　晶一朗[2]・山口　裕通[3]

[1]正会員 金沢大学准教授 理工研究域地球社会基盤学系（〒 920-1192 石川県金沢市角間町）
E-mail: koba@se.kanazawa-u.ac.jp（Corresponding Author）
[2]正会員 金沢大学教授 融合研究域融合科学系（〒 920-1192 石川県金沢市角間町）
E-mail: nakayama@staff.kanazawa-u.ac.jp
[3]正会員 金沢大学助教 理工研究域地球社会基盤学系（〒 920-1192 石川県金沢市角間町）
E-mail: hyamaguchi@se.kanazawa-u.ac.jp

OD 接続性の定量的評価手法として、乱数を利用して各試行における各エッジの通行の可能・不可能を判定した反映させ、多数の試行を行って到達可能回数を統計的に整理し、到達可能確率を推定する方法（MC 法）がある。MC 法の課題は計算効率であり、十分な試行回数を確保する必要がある。ネットワーク情報を単純化するため、OD を接続する経路にある種の単調性を課してエッジの有向化を図ると、ループが存在しないネットワークが構成できる。この経路のことを「単調なパス」と呼ぶことにする。本論文では、単調なパスで構成されるネットワークを対象に、各ノードへの到達可能確率の独立性を仮定し、ノードへの到達可能確率を近似的に評価する方法を議論した。矩形グリッドを対象とした数値実験を実施したところ、近似解法は MC 法による到達可能確率を常に上回るため、到達可能確率の上界値評価への活用が期待できる。

Key Words: *Number of paths, Road Network, Connectivity, Tree structure, Monotonic path*

1. はじめに

著者らは大規模災害時に途絶しにくい交通ネットワークを検討するために、交通ネットワーク上の 2 ノードあるいは 2 エリア間の接続性を定量的に測る尺度について関心がある。平常時には交通容量や旅行時間も接続性を検討する上で重要な要素であるが、大規模災害時には接続しているか否かが最優先であると考え、ネットワークのジオメトリやトポロジーに着目した定量的尺度について検討を進めている。

到達可能確率を接続性の指標とする考えがある。その到達可能確率を具体的な計算法としてモンテカルロ法が知られている。モンテカルロ法は乱数を利用した試行を繰り返して数値的に近似解を求める数値解析法の総称である。ネットワークの到達可能確率の計算におけるモンテカルロ法は以下の通りである。ネットワークを構成する各リンクの通行可能確率を独立事象であると仮定し、ある 1 回の試行において、一様乱数を用いて各リンクの通行可能・不可能を決めたうえで、2 ノード間あるいは 2 エリア間が接続するか否かを確認する。これを多数の試行回数で実施し、全試行回数に対する接続する試行回数から到達確率を評価する。モンテカルロ法は数値計算分野で多くの実績のあり手堅い方法と言えるが、計算効率が悪いことが課題として挙げられる。つまり精度を確保するためには十分な試行回数が必要であり、計算コストは必ずしも低くはない。

一方、経路数に基づいて接続性を評価する考え方もある。互いに重複するリンクを許さない経路を完全独立経路と呼ぶ。例えば、原田ら[1]，瀬戸ら[2] は完全独立経路数を用いて OD の接続強度を論じている。しかし、道路ネットワークでは 1 ノードに接続するリンク数は交差点の物理的な制約により高々数個であるため、OD の完全独立経路数もこの制約を受けることに注意が必要である。これに対して部分的なリンクの重複を許す経路（本論文では「非重複経路」と呼ぶことにする）を用いる考え方もある。ただ、非重複経路を全て数え上げる問題は組合せ爆発が起こることが知られ、単純な正方格子上の対角に位置するノード間の非重複経路計算ですら困難である。湊ら[3] が考案した効率的なデータ構造に基づく超高速グラフ列挙アルゴリズム ZDD を駆使しても 26×26 の正方格子に対して，30CPU (Xeon E7-8837)，メインメモリ 1400GB で 2 日間の計算が必要とされる[4]。また計算した全ての結果を取り出すのに、3 週間を要すると報告されている[5]．このため、実際の道路ネットワークに対して、非重複経路を全て数え上げることは実質的に不可能と考えてよい。

著者らは非重複経路数を近似的に評価するため、OD を接続する全て経路のうち「単調パス」のみを対象とし、その総数を簡単に計算する方法を提案した[6]。この

「単調パス」とは、OD をつなぐパスの中である種の単調性を満足する経路を指す。具体的な単調性の内容については後述するが、この操作によってネットワークからループを排除できることが特徴である。ループが存在しないネットワークであれば、隣接行列のべき乗を計算することで OD 間を接続する単調パスの総数が計算可能、という論理である。ただ「単調パス」を利用した方法によれば、確かに OD をつなぐ単調パスを満たす非重複経路の総数は計算できるが、この総数の解釈が難しいと著者らは考える。ネットワークが複雑になるほど非重複経路の総数が増加することは容易に予想できるが、現状では最短リンク長などネットワーク情報の空間解像度、あるいは OD 間の最短距離が非重複経路の総数に及ぼす影響について検討が不足している。

そこで本論文では、「単調パス」の性質とリンクの通行可能確率を組合わせた折衷的なアプローチで、OD の到達可能確率を近似的に評価する方法を提案し、得られる数値解の性質を議論する。

2. 定式化

(1) ネットワーク情報の表記

参考文献[7] に従い、本論文で取り扱うネットワーク情報の表記法について簡単に整理する。ノードはある地点の位置を表し、隣接する 2 ノードをつなぐ道路のことをエッジと呼ぶ。ノードの属性としては位置情報を、エッジの属性としては始点ノード、終点ノードおよびエッジコストを考える。エッジコストとして、本研究では物理的な距離であるエッジ長さを利用する。この他にエッジコストとして、旅行時間など正の値を持つ量を用いることも可能である。

全ノード数を n とするとき、ネットワークのトポロジーは配列寸法 $n \times n$ の隣接行列 $\boldsymbol{A}$ で表現できる。隣接行列の (i, j) 成分 A_{ij} は、ノード i からノード j に向うエッジの接続関係を表し、直接接続する場合は 1、そうでなければ 0 をとる。

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) \text{ is directly connected} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

無向グラフの場合、全てのエッジは両方向に通行可能であるので、隣接行列は対称行列となる。一方、有向グラフの場合は一方通行となるエッジが存在するため隣接行列は非対称となる。

あるノードから出発し、いくつかのエッジを経由して出発ノードに戻れる場合、この経路をループと呼ぶ。無向グラフであれば、出発ノードから隣接ノードに向かい、そこから出発ノードに戻る経路が許されるため、必ずループが存在する。ループが存在しないグラフのことを「森」という。その中で全てのノードが連結している場合が「木」である[1]。グラフが「森」や「木」である場合は、適当にノード番号の入れ替えを行えば、隣接行列 $\boldsymbol{A}$ は必ず上三角行列として表せ、対角項以下の全ての成分がゼロとなる。

隣接行列の冪乗の成分 A_{ij}^m は、ノード i から m 個のエッジを経由してノード j に到達する経路数となる。したがってノード i からノード j に到達する経路の総数 N_{ij} は、行列の冪乗の総和を取ればよい。

$$N_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_{ij}^m \tag{2}$$

もしネットワーク上にループが存在しなければ、隣接行列は上三角行列で表せるので、隣接行列の冪乗はたかだか n 乗でゼロ行列となる。このとき、ノード i からノード j に到達する経路の総数 N_{ij} は有限項の和として以下で表せる。

$$N_{ij} = \sum_{m=1}^{n} \boldsymbol{A}_{ij}^m \tag{3}$$

(2) OD 間を接続する単調パスの抽出方法

既往文献[6] に従って、その概要を簡単に説明する。

まずネットワークが「木」を構成する例を考えてみよう。力学的なアナロジーとして管路網のポテンシャル流に着目すると、これは「木」を構成する。なぜなら管路網の流れは、必ず全水頭の高い方から低い方に流れるので、ループとなる経路は存在しない。また経路に沿って必ず全水頭は減少するので、経路上のノード属性は単調性を示す。

このアイディアを距離に応用する。簡単のため全ノードが連結した状態、つまり任意のノードから任意のノードに到達可能な状態を仮定する。ある始点ノードから各ノードへの最短距離を計算する。これはダイクストラ法[8] で簡単に計算できる。得られた各ノードへの最短距離を用いて、単調性を示すように各エッジの通行可能方向を定義すればループは存在しえないので、このネットワークは「木」を構成する。

さらに OD の接続性を検討するために、「木」を構成するネットワークの作り方を拡張する。ダイクストラ法により始点ノードおよび終点ノードの両方からの各ノードへの最短距離を計算する。得られた最短距離に基づき、ノードの集合 V を始点ノード側の部分集合 V_o と終点ノード側の部分集合 V_t の 2 つに分離する。

$$V_o \cup V_t = V,\ V_o \cap V_t = \emptyset \tag{4}$$

その上で全てのエッジについて有向化操作を行う。この際、エッジ始点とエッジ終点が属する部分集合によって、

[1] この定義により、本研究で言う「森」や「木」は、あるノードから複数のエッジが流出するだけでなく、あるノードに複数のエッジが流入することも許される。

エッジの有向化操作は 3 つのパターンに分類できる。

- エッジ始点ノードとエッジ終点ノードの両方が始点側部分集合 V_o に属している場合: 最短距離が増加する方向に有向化する。
- エッジ始点ノードとエッジ終点ノードの両方が終点側部分集合 V_t に属している場合: 最短距離が減少する方向に有向化する。
- エッジ始点ノードとエッジ終点ノードで属する部分集合が異なる場合: 始点側部分集合のノードから終点側部分集合のノードへ有向化する。

この結果、OD を接続する経路にはある種の単調性が確保されており、ループは存在しない。この経路のことを「単調なパス」と呼ぶことにする。本方法による「単調パス化」は、OD の両方から木を構成するネットワークを作り始め、両者の界面で 2 つの木を接続したもの、と見ることも可能である。本方法のバリエーションとして、OD を単一のノードではなくエリアで定義することや、木を作る際に最短距離の上限を設けることで極端に遠回りをする経路を排除することなども可能である。なお OD 間に単調なパスを作る方法自体は任意であるので、工学的な意味付けを考慮して適切な方法を選べばよい。

(3) OD 到達可能確率の近似評価法

単調パス化したあるネットワークを考える。始点ノード O からあるノード j への到達可能確率を p_j とする。ノード j へ到達可能な状況とは、その上流ノード i に到達可能かつ i から j への有向エッジが通行可能な状況である。上流側に複数のノードが存在する場合は、いずれか 1 つのエッジを経由して到達できれば良い。

ここで、もし上流側ノード $i \in V_j$ に到達可能な確率 p_i が独立事象であるならば、ノード j に到達できない確率 $\bar{p}_j$ は上流側のノード $i \in V_j$ のいずれからも到達できないことを意味する。これは余事象（記号 $\bar{*}$）を考えれば、以下の式で簡単に表現できる。

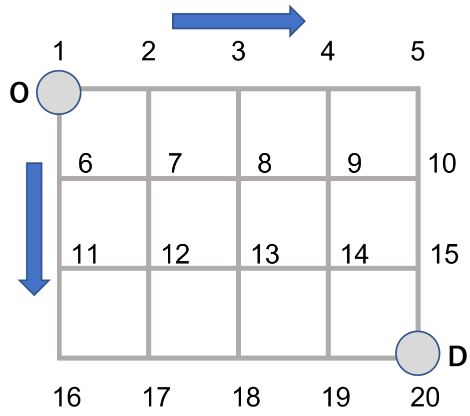
$$\bar{p}_j = \prod_{i \in V_j} \left(\bar{p}_i + p_i\left(1 - q_{ij}\right)\right) = \prod_{i \in V_j} \left(1 - p_i q_{ij}\right) \qquad (5)$$

ここに集合 V_j はノード j の上流側ノードの集合、また q_{ij} はノード i から j へのエッジの通行可能確率である。

一般的に、ネットワークの単調パス化を図っても、任意のノード i に到達可能な確率 p_i は独立事象にはならない。これは単調パス化の際に用いる「木」が、あるノードに複数のエッジが流入することを許すことからも理解できる。したがって**式-**(5) はあくまでも近似評価法である。

しかし、現在の状態は直前の状態のみに影響されるマルコフ過程のように、ノード到達可能確率を計算する際に、ずっと上流側に遡ることなく、**式-**(5) の形で上流側ノードの到達可能確率から下流側ノードへの到達可能確率が決定論的に計算できれば、MC 法と比較して、計算コストの大幅な削減が期待できる点は魅力的である。

実際の数値計算では、始点ノードの到達可能確率を常に 1.0 とし、残りのノードへの到達可能確率については前進計算を行い、適当な緩和係数を用いて解を更新する。このプロセスを繰返すことで数値解の収束を図る。実際に計算したところ、繰返し計算の収束性は良く、安定した数値解を得ることが可能であった。



図–1 3 × 4 矩形グリッドの例題

3. 数値実験結果とその解釈

式-(5) による提案手法と MC 法との比較を行うため数値実験を実施する。使用するネットワークを**図-1** に示す 3 × 4 の等辺長矩形グリッド（ノード数 20）である。対角に位置するノード 1 を始点に、またノード 20 を終点とする。各エッジについては、水平方向は右向き、鉛直方向は下向きのみを通行可能とすることで、有向パス化する。エッジ数は 31 である。また各エッジの通行可能確率は 0.9 とした。

MC 法については、各試行ごとに、各エッジに対して乱数を発生させ、通行不能の場合にはペナルティとして十分に大きなエッジコスト（距離）を付与した。また始点ノードからの接続性はダイクストラ法を利用し、もし最短距離がペナルティ値以上であれば、到達不可能と判定した。また MC 法の計算精度を確認するため、試行回数について $n = 10^2$ 回、$n = 10^4$ 回、$n = 10^6$ 回の 3 パターンを実施した。数値解析結果を**表-1** に示す。

MC 法については試行回数が $n = 10^4$ 回と $n = 10^6$ 回の 2 ケースを比較しても、数値解にバラつきが見られる。このような単純な例題であっても試行回数の設定には十分な注意が必要である。試行回数を事前に推定できる方法は特になく、必要とする精度が確保されているかどうかは、実際の計算結果から判断するしか

表–1 数値実験結果（各ノードへの到達可能確率）

Node	**Eq.** (5)	MC $n = 10^2$	MC $n = 10^4$	MC $n = 10^6$
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0.9000	0.8700	0.9041	0.8997
3	0.8100	0.7900	0.8147	0.8096
4	0.7290	0.7400	0.7371	0.7286
5	0.6561	0.6800	0.6602	0.6558
6	0.9000	0.9300	0.9051	0.8998
7	0.9639	0.9600	0.9638	0.9638
8	0.9641	0.9300	0.9557	0.9529
9	0.9545	0.9200	0.9354	0.9301
10	0.9423	0.9100	0.9048	0.9022
11	0.8100	0.8200	0.8085	0.8098
12	0.9641	0.9500	0.9526	0.9531
13	0.9825	0.9800	0.9700	0.9701
14	0.9837	0.9700	0.9703	0.9678
15	0.9826	0.9200	0.9630	0.9608
16	0.7290	0.7800	0.7243	0.7287
17	0.9545	0.9500	0.9297	0.9301
18	0.9837	0.9800	0.9685	0.9679
19	0.9868	0.9800	0.9745	0.9731
20	0.9871	0.9700	0.9747	0.9728

ない。

提案手法との MC 法の解が一致するのは、グリッドの上辺に位置するノード 2, 3, 4, 5 および、グリッド左辺に位置するノード 6, 11, 16 である。これは始点ノード 1 からエッジが直列で繋がっており、途中から流入するエッジが無いために事象の独立性が維持されていることが理由である。これらのノードに対して、残りのノードではネットワーク構造を介して、エッジの流入や流出を繰り返すことによって事象の独立性が完全には維持されていないため、提案手法と MC 法の解に差が生じたと解釈できる。

また興味深いことに、MC 法で試行回数が十分だと思われる $n = 10^6$ の解については、必ず提案手法の解を下回る値となっている。これは、提案手法が到達可能確率の上界値を与えていることを示唆する。

単調パス化した等辺長の矩形グリッドの対角方向に始点終点を設定すれば、最短経路の本数を数え上げる組合せ問題に帰着しノード 1 からノード 20 への総経路数は $N = 7!/3!/4! = 35$ 通りとなる。しかしながら 35 通りの経路があることだけで、始点と終点の連結性の強度を測ることは難しい。今回提案した手法は、ネットワーク情報の単調パス化を利用して到達可能確率を決定論的に評価することにより、MC 法の欠点である計算負荷や計算精度の問題の解決を図ると言える。

4. おわりに

本論文では、ネットワーク情報を単純化するため、OD を接続する経路にある種の単調性を課した単調なパスで構成されるネットワークを対象に、各ノードへの到達可能確率の計算法について論じた。各ノードへの到達可能確率が独立事象であると仮定し、ノードへの到達可能確率を近似的に評価する決定論的方法を議論した。

矩形グリッドを対象とした小規模な数値実験を実施したところ、提案する近似解法は MC 法による到達可能確率を常に上回ることを確認した。このため、提案手法は到達可能確率の上界値評価への活用が期待できる。

ただし本論文の提案手法には仮定も多く、交通工学的な意味で有用性を確認するための課題が残されている。また今回は矩形グリッドという特殊な条件での数値実験であるため、ネットワークのトポロジー・ジオメトリがより複雑な実ネットワークを用いた数値実験も実施し、数値解の特性を更に詳しく把握する必要がある。

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 21H01451 の助成を受けたものである．ここに記して謝意を表する．

参考文献

1) 原田剛志, 倉内文孝, 高木朗義: リダンダンシーを考慮したアクセシビリティに基づく道路ネットワークの接続脆弱性評価, 土木学会論文集 D3, Vol. 70, No. 1, pp. 76-87, 2014.
2) 瀬戸裕美子, 宇野伸宏, 塩見康博: 非重複経路数を考慮したアクセシビリティ指標に基づく医療施設配置計画, 土木学会論文集 D3, Vol. 67, No. 5, pp. 57-68, 2011.
3) 湊真一: BDD/ZDD を用いたグラフ列挙索引化技法, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 57, No. 11, pp. 597-602, 2012.
4) Iwashita, H., Nakazawa, Y., Kawahara, J., Uno, T., and Minato, S.: Efficient Computation of the Number of Paths in a Grid Graph with Minimal Perfect Hash Functions, *TCS Technical Report*, TCS-TR-A-13-64, Hokkaido University, 2013.
5) OEIS Foundation Inc.: Number of non-intersecting (or self-avoiding) rook paths joining opposite corners of an n × n grid, *The On-Line Encyclopedia of Intefer Sequences*, https://oeis.org/A007764, 2021.
6) 北倉大地、小林俊一、中山晶一朗、山口裕通: 単調なパスを仮定した 2 ノード間の総経路数の計算手法について, 土木学会論文集 D3, Vol. 77, No. 5, 2021.（登載決定済）
7) Estrada, E and Knight, P.A.: A First Course in Network Theory, Oxford University Press, 2015.
8) Dijkstra, E.W.: A note on two problems in connexion with graphs, *Numerische Mathematik*, Vol. 1, pp. 269-271, 1959.

(Received mm dd, 2022)
(Acceptedmm dd, 2022)