

# 大規模ネットワークにおける 動的利用者均衡配分の効率的解法

涌井 優尚<sup>1</sup>・酒井 高良<sup>2</sup>・赤松 隆<sup>3</sup>

<sup>1</sup>非会員 東北大学 大学院情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: masanao.wakui.r4@dc.tohoku.ac.jp

<sup>2</sup>学生会員 東北大学 大学院情報科学研究科・JSPS 特別研究員 DC (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: takara.sakai.t1@dc.tohoku.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 東北大学教授 大学院情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

本研究では、一起点多終点ネットワークにおける経路選択 DUE 配分の効率的解法を開発した。具体的には、まず待ち行列に point queue を仮定した上で、DUE 配分を線形相補性問題として定式化した。そしてこの問題と等価な最適化問題に対し、大規模問題に適用可能な効率的アルゴリズムを提案した。数値実験を通して提案解法は、既存研究における数値計算例の 2 倍から 6 倍ほどのリンク数規模である巨大ネットワークに対しても、既存解法を上回る計算効率を保ち、かつきわめて高精度な解が計算できることが示された。

**Key Words:** *dynamic user equilibrium, route choice, linear complementarity problem, Frank-Wolfe algorithm*

## 1. はじめに

動的交通量配分 (Dynamic Traffic Assignment, DTA) とは、ネットワーク形状と交通需要を与件として、何らかの配分原則に基づいて実現する動的な交通状態を求めるモデルである。DTA は、静的交通量配分では表現できない渋滞の発生・進展・解消過程を明示的に記述できる。そのため、時間依存の渋滞緩和施策 (e.g., 動的混雑料金, TNP 制度) を設計・評価する理論基盤として有用である。DTA の中でも、配分原則として利用者個人の費用最小化原則を採用した動的利用者均衡 (Dynamic User Equilibrium, DUE) 配分は、ベンチマークモデルとして特に重要である。

利用者の選択行動に着目すると、DUE 配分は 2 種類に分類できる。一つは利用者が経路の選択のみを行い、自身の旅行費用を最小化する“経路選択 DUE 配分”、もう一つは利用者が経路選択に加え出発時刻の選択も行う“同時選択 DUE 配分”である。また、交通流の表現方法に着目すると、DUE 配分は同じく 2 分類できる。交通流を連続体として扱う“流体モデル”と、交通流中の各利用者を離散粒子として扱う“粒子モデル”である。これらの各分類について、一般ネットワークに適用可能な DUE 配分の数値解法がこれまでに数多く提案されてきた。例えば流体モデルに関して、経路選択 DUE 配分については Lo and Szeto<sup>1)</sup>, Long et al.<sup>2)</sup>, Gentile<sup>3)</sup> など、同時選択 DUE 配分については Han et al.<sup>4)</sup>, Thong et al.<sup>5)</sup> などである。また粒子モデルに関しては、経路

選択 DUE 配分について井料 (2011)<sup>6)</sup> が挙げられる。

しかしながら、いずれの DUE 配分についての既存研究にも、アルゴリズムの効率性および均衡解の信頼性の観点からいくつかの問題点が存在する。具体的には、まず流体モデル解法に関して、第一に、これらの研究では渋滞待ち行列の physical queue 表現や多起点多終点ネットワークを採用しているため、アルゴリズムにおいて、リンク内の交通密度計算や多起点多終点 OD ペアの配分計算など、複数の形式の異なる計算を繰り返し行う必要がある。そのため、既存研究の解法の多くは、ヒューリスティックな不動点アルゴリズムであり、多大な反復計算を要し時間計算コストが大きい。また、均衡解への理論的な収束保証もなされておらず、解の信頼性にも乏しい。加えて、一部の研究では経路変数を陽に用いて問題を定式化しているため、変数の次元が膨大となり、アルゴリズムの空間計算コストが極めて大きくなっている。このことは、ネットワーク規模に対して変数の次元が指数関数的に増加し、スケールな解法となっていないことを意味している。続いて粒子モデル解法 (以降, Atomic 解法) に関して、このアプローチは物理的な解釈が行いやすく、待ち行列モデルの拡張も容易であるという利点を持つ一方で、大規模ネットワークに対する適用可能性はこれまでに示されてこなかった。

以上を受け本研究では、一起点多終点ネットワークにおける経路選択 DUE 配分を解く、効率的で正確性にも優れるアルゴリズムを開発する。このために、まず

DUE 配分を“流体モデル”に基づく線形相補性問題として、経路変数を用いずに定式化する。続いて、これと等価な最適化問題に対し最適化アルゴリズムを適用するというアプローチをとる。最適化アルゴリズムには Frank-Wolfe 法ベースの解法を採用することで、実質的に線形計画問題を繰り返し解くことに落とし込むことができる。線形計画問題には効率的なアルゴリズムが多数存在することから、提案手法は大規模問題に対しても効率的な求解が可能となる。

本稿の構成を次に示す。まず 2. で本研究のモデルの枠組みをネットワーク・利用者について述べる。次に 3. では、DUE 配分を定式化し、時間帯別のサブ問題を、4. では定式化した問題を解くアルゴリズムを、それぞれ提示する。続いて 5. で、数値実験の結果を通して、既存解法と比較した提案手法の効率性や、正確性について議論する。最後に 6. で本稿のまとめを示す。

## 2. モデル

### (1) ネットワーク

本研究で対象とするネットワークは、唯一の起点ノードと複数の通過・終点ノード、およびそれらを結ぶ有向リンクからなる一起点多終点ネットワークとする。ネットワークに含まれるノードの集合を  $N$ 、リンクの集合を  $\mathcal{L}$  とそれぞれ定義し、それぞれの要素は  $i \in N, (i, j) \in \mathcal{L}$  と表す。集合  $N, \mathcal{L}$  の要素数は  $N, L$  とする。 $N$  の要素のうち、唯一の起点ノードを特に  $o$  と表す。また、あるノード  $k \in N$  について、全ての流入リンクの上流側ノード集合を  $I_k$ 、全ての流出リンクの下流側ノード集合を  $O_k$  とそれぞれ表す。

各リンク  $(i, j)$  の自由走行時間は  $\hat{c}_{ij}$  とする。各リンクに存在するボトルネックの交通容量は  $\mu_{ij}$  とし、これ以上の流入交通量が存在するとき、ボトルネック待ち行列が発生する。待ち行列は point-queue モデルで表現し、各リンクでは first-in-first-out (FIFO) が成立する。

### (2) 利用者

本研究で計算対象とする時間帯は  $S \equiv [0, S]$  とする。ネットワーク上を旅行する利用者は時刻  $s \in S$  に、起点ノードから各自の終点ノード  $k$  へ向け交通流率  $q_k(s)$  で出発する。ネットワーク上で実現する交通状態は、時刻  $s$  に起点を出発する利用者が経験する次の 3 種類の変数で表す<sup>1</sup>：各リンク  $(i, j)$  での待ち行列遅れ時間  $w_{ij}(s)$ 、各リンク  $(i, j)$  での流入交通流率  $y_{ij}(s)$ 、起点ノードから各ノード  $k$  への最短所要時間  $\pi_k(s)$ 。

時刻  $s$  に起点を出発した利用者が各リンクを通過す

際に経験する旅行時間  $c_{ij}(s)$  は、自由走行時間と待ち行列遅れ時間との和で下式のように表す：

$$c_{ij}(s) \equiv \hat{c}_{ij} + w_{ij}(s) \quad \forall (i, j) \in \mathcal{L}. \quad (1)$$

また各ノード  $k$  への最早到着時刻  $\tau_k(s)$  を次式で定義する：

$$\tau_k(s) \equiv \pi_k(s) + s \quad \forall k \in N. \quad (2)$$

## 3. 定式化

### (1) 均衡条件

DUE 状態とは、各起点出発時刻ごとに、どの利用者も自分一人が経路を変更しても、各自の総旅行費用をそれ以上改善できない状態である。ここで各自の総旅行費用とは、利用者が起点から自身の終点まで旅行する際に知覚する旅行時間である。この状態において、各変数は次に示す 4 つの均衡条件を満足する。

#### a) 待ち行列進展条件

待ち行列進展条件は、リンク旅行時間の変化率に着目して導出される条件である。待ち行列の変化によるリンク旅行時間  $c_{ij}(s)$  の変化率は以下の式により表現できる：

$$\frac{dc_{ij}(s)}{ds} = \begin{cases} \frac{y_{ij}(s)}{\mu_{ij}} - \frac{d\tau_i(s)}{ds} & (c_{ij}(s) > \hat{c}_{ij}) \\ \max \left[ \frac{y_{ij}(s)}{\mu_{ij}} - \frac{d\tau_i(s)}{ds}, 0 \right] & (c_{ij}(s) = \hat{c}_{ij}) \end{cases} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{L}, \forall s \in S. \quad (3)$$

ここで式 (1), (2) と、 $\frac{dc_{ij}(s)}{ds} = \frac{dw_{ij}(s)}{ds}$  を考慮すると、式 (3) は次の相補性条件に帰着する：

$$\begin{cases} w_{ij}(s) \cdot \left\{ \frac{dw_{ij}(s)}{ds} - \frac{y_{ij}(s)}{\mu_{ij}} + \left( \frac{d\tau_i(s)}{ds} + 1 \right) \right\} = 0 \\ \left\{ \frac{dw_{ij}(s)}{ds} - \frac{y_{ij}(s)}{\mu_{ij}} + \left( \frac{d\tau_i(s)}{ds} + 1 \right) \right\} \geq 0, w_{ij}(s) \geq 0 \end{cases} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{L}, \forall s \in S. \quad (4)$$

#### b) 最短経路選択条件

DUE 状態では、その時々における最短経路上にある  $(c_{ij}(s) - \pi_j(s) + \pi_i(s) = 0)$  リンクにのみ交通流が存在する  $(y_{ij}(s) > 0)$ 。このことより次の相補性条件が成り立つ。

$$\begin{cases} y_{ij}(s) \cdot \{c_{ij}(s) - \pi_j(s) + \pi_i(s)\} = 0 \\ c_{ij}(s) - \pi_j(s) + \pi_i(s) \geq 0, y_{ij}(s) \geq 0 \end{cases} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{L}, \forall s \in S. \quad (5)$$

#### c) フロー保存条件

起点を除く各ノード  $k$  について、次の等式で表されるフロー保存条件が成り立つ：

$$\sum_{j \in O_k} y_{kj}(s) - \sum_{i \in I_k} y_{ik}(s) + q_k(s) = 0 \quad \forall k \in N \setminus o, \forall s \in S. \quad (6)$$

<sup>1</sup> このような定式化は Lagrange 座標系アプローチと呼ばれる。詳細は既存研究<sup>7),8)</sup> に詳しい。

これは相補性条件の形式では、次のように記述できる：

$$\begin{cases} \pi_k(s) \cdot \left\{ -\sum_{j \in O_k} y_{kj}(s) + \sum_{i \in I_k} y_{ik}(s) - q_k(s) \right\} = 0 \\ -\sum_{j \in O_k} y_{kj}(s) + \sum_{i \in I_k} y_{ik}(s) - q_k(s) \geq 0, \pi_k(s) \geq 0 \end{cases} \quad \forall k \in \mathcal{N} \setminus o, \forall s \in \mathcal{S}. \quad (7)$$

#### d) ノード境界条件

DUE 状態では全利用者は各自の最短経路を選択している。このことから、ある時刻  $s$  に出発した利用者は、それ以前の時刻に出発したどの利用者よりもあらゆるノードに早くついてはならない。この制約は次の不等式で表される：

$$\frac{d\pi_k(s)}{ds} \geq -1 \quad \forall k \in \mathcal{N} \setminus o, \forall s \in \mathcal{S}. \quad (8)$$

また  $\pi_k(s)$  はその物理的意味から、自由流走行時間  $\hat{c}_{ij}$  から計算される各ノードへの最短所要時間  $\hat{\pi}_k$  を最小値とする。すなわち次の不等式も同時に満たされる必要がある：

$$\pi_k(s) \geq \hat{\pi}_k \quad \forall k \in \mathcal{N} \setminus o, \forall s \in \mathcal{S}. \quad (9)$$

## (2) 出発時刻の離散化

ここからは、数値計算を行う準備として出発時刻集合  $\mathcal{S} = [0, S]$  を一定の微小時間幅  $ds$  で離散化する。これに伴い本節では、ここまでで提示した各均衡条件も同様に離散化する。

離散時刻の総数は  $K+1$  個とし、全離散時刻の集合を  $\mathcal{K} \equiv \{k \mid 0, 1, 2, \dots, K\}$  と定義する。このようにすると、 $k+1$  個目の離散時刻  $s^k$  は  $k \cdot ds$  と表せる。以降では出発時刻  $s^k$  に対応する変数を、 $w_{ij}(s^k) = w_{ij}^k$  のように表す。ただし  $k=0$  は初期時刻とし、 $q_k^0 = 0, w_{ij}^0 = y_{ij}^0 = 0$  と定める。このことより、 $c_{ij}^0 = \hat{c}_{ij}, \pi_k^0 = \hat{\pi}_k$  である。連続変数の時間微分については全て、次のように近似する：

$$\frac{dw_{ij}(s)}{ds} \simeq \frac{w_{ij}^k - w_{ij}^{k-1}}{ds}. \quad (10)$$

なお、以降の再定式化は全てベクトル・行列形式で行う<sup>2</sup>。その際に用いる、 $w^k, y^k, c^k, \mu$  は  $L$  次元の、 $\pi^k, q^k$  は  $N-1$  次元の、対応する要素を全て並べたベクトルを指す。また  $A$  はノード・リンク接続行列を、 $A_+$  は  $A$  の負要素を全て 0 に置換した行列を表す。

#### a) 待ち行列進展条件 (離散)

$$\mathbf{0} \leq w^k \perp \{\alpha(w^k - w^{k-1}) - y^k + \alpha A_+^T (\pi^k - \pi^{k-1}) + \mu\} \geq \mathbf{0}. \quad (11)$$

#### b) 最短経路選択条件 (離散)

$$\mathbf{0} \leq y^k \perp \{c^0 + w^k + A^T \pi^k\} \geq \mathbf{0}. \quad (12)$$

<sup>2</sup> 以降で現れる単位行列  $I$ 、零行列 (ベクトル)  $\mathbf{0}$ 、1 行列 (ベクトル)  $\mathbf{1}$ 、その他定数行列 (ベクトル) は原則として、その演算に対して適切な次元であるとする。ただし、特に注意が必要な場合には、行列 (ベクトル) の次元を下付き添え字で表す。

#### c) フロー保存条件 (離散)

$$\mathbf{0} \leq \pi^k \perp \{-A y^k - q^k\} \geq \mathbf{0}. \quad (13)$$

#### d) ノード境界条件 (離散)

$$\pi^k \geq \max [\pi^{k-1} - \mathbf{1} ds, \pi^0]. \quad (14)$$

ただし  $\alpha \equiv \text{diag} [\mu_{ij}/ds], \forall k \in \mathcal{K} \setminus 0$  である。以上をまとめると、経路選択 DUE 配分は混合線形相補性問題として定式化できる。ここで各時刻の変数・定数を縦に並べた、次に示すベクトルを定義する：

$$w \equiv \begin{bmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^K \end{bmatrix}, y \equiv \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^K \end{bmatrix}, \pi \equiv \begin{bmatrix} \pi^1 \\ \vdots \\ \pi^K \end{bmatrix}, q \equiv \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^K \end{bmatrix}.$$

さらに、このうち  $w, y, \pi$  を縦に並べた未知変数ベクトル  $x$  を用意する： $x \equiv \{w, y, \pi\} \in \mathbb{R}_+^{(2L+N-1)K}$ 。これらを用いると、DUE 配分は混合線形相補性問題 [DUE-LCP] として次のように定式化できる：

#### [DUE-LCP]

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & x^* \in \mathbb{R}_+^{(2L+N-1)K}, \\ \text{such that} \quad & \mathbf{0} \leq x^* \perp (Mx^* + b) \geq \mathbf{0}, \\ \text{and} \quad & \pi^{k*} \geq \max [\pi^{k-1*} - \mathbf{1} ds, \pi^0] \\ & \forall k \in \mathcal{K} \setminus 0. \end{aligned}$$

ここで、係数行列  $M$  は次のような、歪対称に近く、また疎な構造を持つ：

$$M \equiv \begin{bmatrix} \Delta_K \otimes \alpha & -I & \Delta_K \otimes \alpha A_+^T \\ I & \mathbf{0} & I_K \otimes A^T \\ \mathbf{0} & -I_K \otimes A & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

なお、他の定数ベクトル・行列は以下のように定義される：

$$b \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{1}_K \otimes \mu + e_K \otimes \alpha(w^0 + A_+^T \pi^0) \\ \mathbf{1}_K \otimes c^0 \\ -q \end{bmatrix},$$

$$e \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta \equiv \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

## (3) 起点出発時刻別の時間分解

[DUE-LCP] の未知数の個数は  $(2L+N-1)K$  と膨大である。そのためこれを直接解くことは非効率である。このことを踏まえて、本研究では時刻別分解手法<sup>7)</sup>を採用する。具体的には [DUE-LCP] を起点出発時刻  $k$  について分解し、時間の進行方向に向かって逐次的に解いていく。ここでは、離散化した問題 [DUE-LCP] を起点出発時刻別に分解することを考える。

起点出発時刻  $k$  についての均衡条件 (11)-(14) はいずれも、時刻  $k, k-1$  についての変数のみから構成されて

いる。ゆえに [DUE-LCP] は、「時刻  $\kappa-1$  における均衡解を与件とした時刻  $\kappa$  のみの問題」の繰り返しとして、前の時刻から分解して解くことができる。これに伴い、新たな定数  $\beta^\kappa \equiv w^{\kappa-1} + A_+^\top \pi^{\kappa-1} - \mathbf{1}ds$  を導入することで、式 (11) は次のように書き換わる：

$$\mathbf{0} \leq w^\kappa \perp \{\alpha w^\kappa - y^\kappa + \alpha A_+^\top \pi^\kappa - \alpha \beta^\kappa\} \geq \mathbf{0}. \quad (15)$$

よって、ある一つの離散時刻  $\kappa \in \mathcal{K} \setminus 0$  に関するサブ問題は、式 (12), (13), (14), (15) より、混合線形相補性問題 [DUE-LCP-sub( $\kappa$ )] として次のように表せる。ただし  $x^\kappa \equiv \{w^\kappa, y^\kappa, \pi^\kappa\} \in \mathbb{R}_+^{2L+N-1}$  である：

[DUE-LCP-sub( $\kappa$ )]

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & x^{k*} \in \mathbb{R}_+^{2L+N-1}, \\ \text{such that} \quad & \mathbf{0} \leq x^{k*} \perp (M_{\text{sub}} x^{k*} + b^k) \geq \mathbf{0}, \\ \text{and} \quad & \pi^{k*} \geq \max [\pi^{\kappa-1} - \mathbf{1}ds, \pi^0]. \end{aligned}$$

ここで、係数行列およびベクトルは次に示す構造を持つ：

$$M_{\text{sub}} \equiv \begin{bmatrix} \alpha & -I & \alpha A_+^\top \\ I & \mathbf{0} & A^\top \\ \mathbf{0} & -A & \mathbf{0} \end{bmatrix}, b^k \equiv \begin{bmatrix} -\alpha \beta^k \\ c^0 \\ -q^k \end{bmatrix}.$$

$M_{\text{sub}}$  は  $M$  同様に、歪対称に近く、また疎である。

#### (4) サブ問題の等価変換

[DUE-LCP-sub( $\kappa$ )] はより解きやすい最適化問題クラスに変換することができる。次の二次計画問題 [DUE-QP( $\kappa$ )] の最適解は、[DUE-LCP-sub( $\kappa$ )] の均衡解に一致する：

[DUE-QP( $\kappa$ )]

$$\begin{aligned} \min_{x^k} \quad & z(x^k) \equiv x^{k\top} (M_{\text{sub}} x^k + b^k), \\ \text{s.t.} \quad & M_{\text{sub}} x^k + b^k \geq \mathbf{0}, \\ & w^k \geq \mathbf{0}, \quad y^k \geq \mathbf{0}, \\ & \pi^k \geq \max [\pi^{\kappa-1} - \mathbf{1}ds, \pi^0]. \end{aligned}$$

なお [DUE-QP( $\kappa$ )] の目的関数は、 $M_{\text{sub}}$  の歪対称性から

$$z(x^k) = w^{k\top} \alpha (w^k + A_+^\top \pi^k) + x^{k\top} b^k \quad (16)$$

と簡略化できる。

[DUE-QP( $\kappa$ )] は、その最適解において目的関数値が 0 になる。このことを用いると、収束計算において目的関数値に基づく正確な収束判定が可能である。

## 4. アルゴリズム

本研究で提案するアルゴリズムは 3. (3) で述べた時刻別分解を活用したものである。すなわちその大枠は、直前時刻における DUE 配分解を与件として、[DUE-QP( $\kappa$ )] を時刻の進行方向に向かって順に解いていく流れである。本研究では、[DUE-QP( $\kappa$ )] を解くアルゴリズムとして、Frank-Wolfe 法<sup>9)</sup>を採用する。

Frank-Wolfe 法は、目的関数の線形近似をもとに次点解を逐次探索するアルゴリズムである。すなわち非線形の二次計画問題を、線形計画問題の繰り返しとして解けることが、本アルゴリズムの強みである。線形計画問題の効率的解法は数理計画の分野で広く研究されており、これを用いることで大規模な DUE 配分問題も高速に解けることが見込める。

提案アルゴリズムの具体的な計算手順は次に従う：

**Step 0 :** 実行可能な初期解  $x^{(1)}$  を定め、 $n := 1$ .

**Step 1 :** [DUE-QP( $\kappa$ )] の線形近似問題の解を  $\hat{x}^{(n)}$  として計算。

**Step 2 :**  $\alpha_n := \operatorname{argmin} z((1-\alpha)x^{(n)} + \alpha\hat{x}^{(n)})$ .

**Step 3 :**  $x^{(n+1)} := (1-\alpha_n)x^{(n)} + \alpha_n\hat{x}^{(n)}$ .

**Step 4 :**  $z(x^{(n+1)}) \simeq 0$  ならば  $x^k := x^{(n+1)}$  として終了。そうでなければ  $n := n+1$  として Step 1 へ。

### (1) Step 0 における初期実行可能解の計算方法

本アルゴリズムにおいて、初期解  $x^{(1)}$  は制約条件を満たしている必要がある。この実行可能な初期解のうち一つは、次の線形計画問題 [DUE-FW-init] の解  $\bar{x}^*$  として得られる。ここで  $\bar{x}$  は  $x^k$  と同次元のベクトルであり、その要素には  $w^k, y^k, \pi^k$  と同次元の  $\bar{w}, \bar{y}, \bar{\pi}$  を持つ。

[DUE-FW-init]

$$\begin{aligned} \min_{\bar{x}, t_w, t_\pi} \quad & \mathbf{1}^\top t_w + \mathbf{1}^\top t_\pi, \\ \text{s.t.} \quad & M_{\text{sub}} \bar{x} + b^k \geq \mathbf{0}, \\ & -t_w \leq \bar{w} - w^{\kappa-1} \leq t_w, \\ & -t_\pi \leq \bar{\pi} - \pi^{\kappa-1} \leq t_\pi, \\ & \bar{w} \geq \mathbf{0}, \quad \bar{y} \geq \mathbf{0}, \quad t_w \geq \mathbf{0}, \quad t_\pi \geq \mathbf{0}, \\ & \bar{\pi} \geq \max [\pi^{\kappa-1} - \mathbf{1}ds, \pi^0]. \end{aligned}$$

### (2) Step 1 で解く線形近似問題

Step 1 では下記の線形計画問題 [DUE-FW-LP] を解く。ここで  $\hat{x}$  は  $x^k$  と同次元のベクトルであり、その要素には  $w^k, y^k, \pi^k$  と同次元の  $\hat{w}, \hat{y}, \hat{\pi}$  を持つ。[DUE-FW-LP] から得られた  $\hat{x}^{(n)}$  を用いて、ベクトル  $\hat{x}^{(n)} - x^{(n)}$  が、 $n$  回目の繰り返し計算における解の降下方向となる。

[DUE-FW-LP]

$$\begin{aligned} \min_{\hat{x}} \quad & \nabla z(x^{(n)})^\top \hat{x}, \\ \text{s.t.} \quad & M_{\text{sub}} \hat{x} + b^k \geq \mathbf{0}, \\ & \hat{w} \geq \mathbf{0}, \quad \hat{y} \geq \mathbf{0}, \\ & \hat{\pi} \geq \max [\pi^{\kappa-1} - \mathbf{1}ds, \pi^0]. \end{aligned}$$

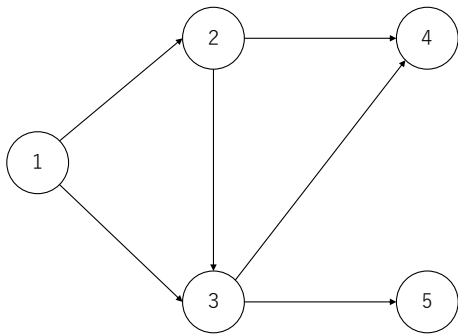


図-1 テストネットワーク

表-1 テストネットワークのリンク定数

link	free-flow travel time	capacity
(1, 2)	3.0	8.0
(1, 3)	5.0	12.0
(2, 3)	2.0	4.0
(2, 4)	5.0	6.0
(3, 4)	3.0	4.0
(3, 5)	1.0	6.0

ここで、目的関数に現れる関数  $z$  の勾配は解析的に、次のように書き下せる：

$$\nabla z(\mathbf{x}) = (\mathbf{M}_{\text{sub}} + \mathbf{M}_{\text{sub}}^T)\mathbf{x} + \mathbf{b}^k. \quad (17)$$

## 5. 数値実験

本章では、様々な実験ケースを対象とした DUE 配分の数値実験を通して、提案手法の計算効率性および正確性を評価する。

### (1) テスト実験

はじめに、提案手法による数値計算が正しく行われていることを、小規模ネットワークにおけるテスト計算により確認する。テスト計算には図-1 に示す 5 node 6 link テストネットワークを用い、起点ノードを 1、終点ノードを 4, 5 と設定した。各リンクの自由走行時間、容量は表-1 の通りである。配分対象時間は 60 分間、微小時間幅  $ds$  を 1 分とし、このうち交通需要は前半の 30 分間に、各終点へそれぞれ計 320 の利用者を山なりに与えた。

本ケースにおいて、全時刻を通しての配分計算は約 0.4 秒で終了した。得られた交通状態から、各リンクにおけるボトルネックでの累積交通量グラフが図-2 のように作成できた。これらのグラフから、配分計算により得た交通量が各リンク間で整合していること (e.g., リンク (2, 3) とリンク (2, 4) の交通量の合計はリンク (1,

表-2 ネットワークデータ

network	no. of links	dests.
Sioux Falls	76	23
Anaheim	914	37
Chicago Sketch	2950	386
Gold Coast	11140	1067
Austin	18961	7387

2) の交通量に一致する) が確認できる。

### (2) 大規模ネットワークへの適用

ここからは、提案手法の効率性および正確性を、井料 (2011)<sup>6)</sup> の Atomic 解法との比較数値実験により示す。数値実験には表-2 に示す様々な規模のネットワークを使用した。配分対象時間は 60 分間、微小時間幅  $ds$  を 1 分とし、このうち交通需要は前半の 30 分間に、唯一の起点ノードから各終点ノードへ均等に与えた。なお実験はピーク時の OD 需要が 10 veh/min である case 1 と、その 2 倍の case 2 で行った (図-3)。なおネットワーク上のリンク容量については、case 2 において適度に渋滞が発生するよう適宜調整して実験した。

図-4 は、横軸にネットワーク規模、縦軸に全時間帯の配分計算に要した CPU time<sup>3</sup> を対数軸で表したグラフである。グラフから、提案解法は Atomic 解法に比べ、需要・ネットワーク規模の増加に対する計算時間の上昇がより緩やかであり、ネットワークの規模が大きくなるにつれその優位性が高まることが読み取れる。特に需要・ネットワーク規模ともに大きい場合に関しては、提案解法は Atomic 解法の 15 分の 1 以上にまで計算時間を短縮できている。

また表-3 に、各実験条件において計算した均衡費用  $\pi^k$  の、真値との平均相対誤差が最も大きかった時刻  $k$  について、その時刻での平均相対誤差をネットワーク/case ごとに示す。なお、ノード  $k$  に関する相対誤差  $\varepsilon_k$  は、解の真値を  $\pi_k^{k*}$  として下式で定義する：

$$\varepsilon_k \equiv \frac{|\pi_k^k - \pi_k^{k*}|}{\pi_k^{k*}}. \quad (18)$$

表の結果から、提案解法により得た均衡費用は、ネットワークの規模に影響されことなく高精度に計算されていることが確認できる。

図-5 から図-8 には、Anaheim, Chicago Sketch, Gold Coast, Austin ネットワークでの case 2 における、表-3 に示した解の精度に至るまでのアルゴリズムの収束過程を示す。グラフの縦軸は均衡費用についての真値との平均相対誤差を、横軸は計算に要した CPU time をそ

<sup>3</sup> 本稿で扱う数値実験において、アルゴリズム中の収束判定基準 (Step 4) は全て、 $z(\mathbf{x}^k) < 10^{-6}$  とした。

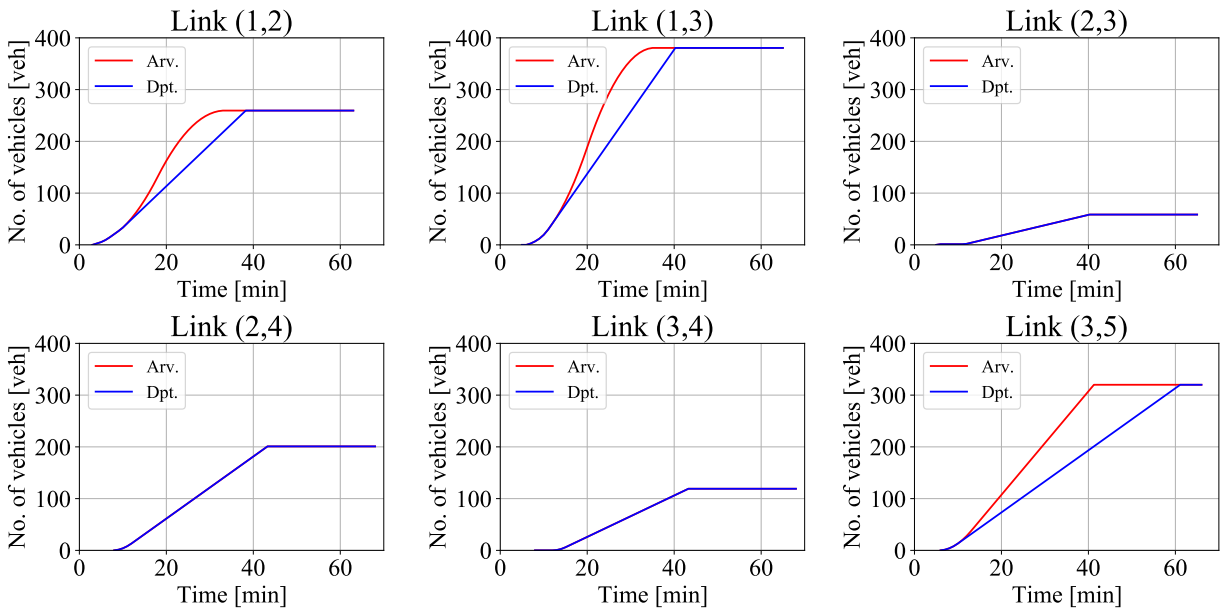


図-2 テストネットワークの累積交通量グラフ

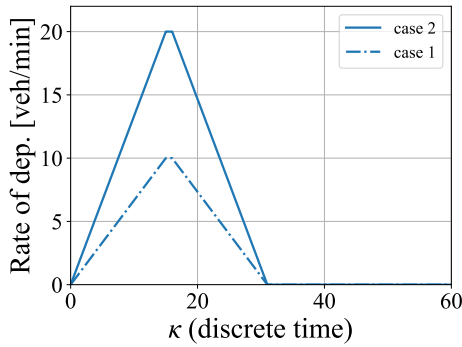


図-3 各時刻での OD 需要

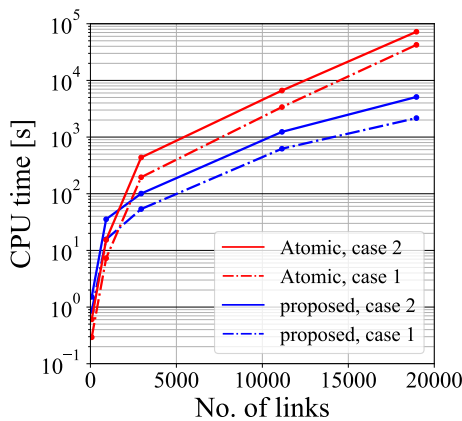


図-4 ネットワーク規模と計算時間の関係

それぞれ表す。図には離散時刻集合  $\mathcal{K}$  から代表して、計算コストが最も小さい時刻(一点鎖線), 最も大きい時刻(破線), 平均的な時刻(実線)における収束過程を示した。この結果より, 渋滞が蓄積した後半の時刻ほど

表-3 数値解と真値の最大平均誤差

network	case 1	case 2
Sioux Falls	$5 \times 10^{-17}$	0
Anaheim	$4 \times 10^{-09}$	$3 \times 10^{-07}$
Chicago Sketch	$9 \times 10^{-11}$	$1 \times 10^{-09}$
Gold Coast	$6 \times 10^{-08}$	$2 \times 10^{-07}$
Austin	$1 \times 10^{-10}$	$9 \times 10^{-10}$

相対的に計算時間を要するものの, Austin ネットワークについても最大 4 分ほどの所要時間で, ある一つの時刻に関する問題を解けていることがわかった。加えて図-9 には, Austin ネットワークについて, 同計算における [DUE-QP( $\kappa$ )] の目的関数値に関する収束過程を示す。図-8 に示した相対誤差は計算過程で上下しながら収束するのに対し, 図-9 の目的関数値は各反復計算で必ず減少していることが確認できる。これは, Frank-Wolfe 法の反復計算はその収束が保証されていることに関連する結果である。

本章の最後に, 提案手法により計算して得られた渋滞状況の遷移を, ネットワーク上に描画して示す。図-10, 図-11, 図-12 はそれぞれ, Anaheim, Chicago Sketch, Gold Coast ネットワークでの case 2 における, 時刻を追った渋滞状況の図である。ここで図中の赤く着色したリンクは, その時刻において待ち行列遅れ時間が  $10^{-4}$  以上の値を持つ(これらのリンクを渋滞リンクと呼ぶ)。いずれのネットワークにおいても, 最混雑時には渋滞リンクの割合が全体の 10% を超えている。したがって本研究での数値実験は, 渋滞現象を表現するという目

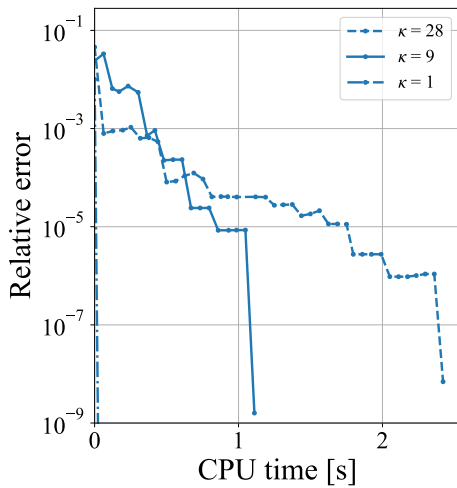


図-5 case 2 での収束過程：Anaheim

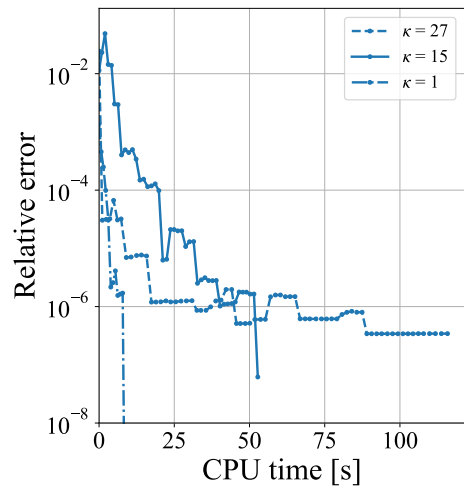


図-7 case 2 での収束過程：Gold Coast

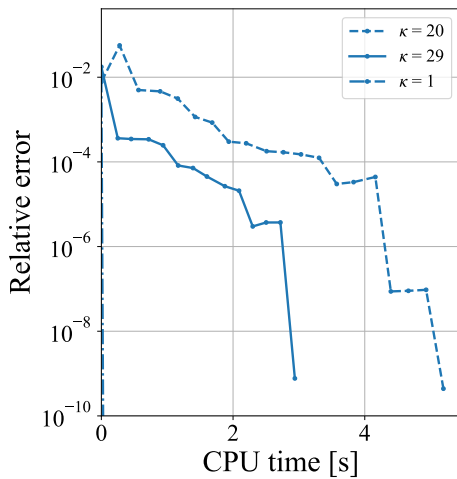


図-6 case 2 での収束過程：Chicago Sketch

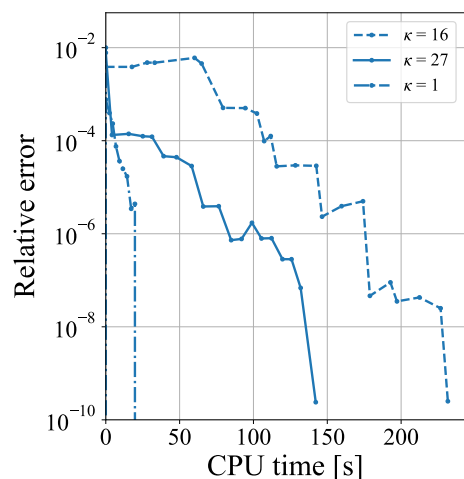


図-8 case 2 での収束過程：Austin

的に適うものであったと言える。

## 6. おわりに

本研究では、一起点多終点ネットワークにおける経路選択 DUE 配分の効率的な計算方法を提案した。具体的には、まず、DUE 配分を離散時刻系における混合線形相補性問題として定式化した。続いてこの問題を起点出発時刻別に分解し、また最適化問題に変換することで、DUE 配分の均衡解を求めるアルゴリズムを提案した。その結果、提案手法では定式化した問題に対してきわめて精度の良い均衡解を求めることができ、かつその効率性も、とくに規模の大きな問題に対しては、既存手法である Atomic 解法の 15 倍以上であるということが示された。

今後の重要な課題として、流体モデル・粒子モデル双方の強みを活かした配分モデルの開発が挙げられる。

Atomic 解法 (粒子モデル) の強みは physical queue 待ち行列モデルを容易に実装できる点にあると考える。そこで、例えば実社会の交通ネットワークにおいて、小区域単位の巨大ネットワークについての DUE 配分をまず本提案手法で解いて、その結果を用いて詳細に交通状態を知りたい小区域内での DUE 配分を改めて physical queue の粒子モデルで解く、などのスキームが確立すれば、流体モデル・粒子モデル両者の長所を活かすことができる。

また、同じく今後の課題として、本研究の成果を用いた経路・出発時刻同時選択 DUE 配分の効率的解法の開発がある。経路・出発時刻同時選択 DUE 配分の解法に関して、既存の手法<sup>4),5),10)</sup> はどれも、問題が経路選択 DUE 配分を包含していることを明示的に用いてはいない。この点から、既存手法よりもさらに効率的な解法を提示できる可能性は未だ大いに残されていると考えられる。同時選択 DUE 配分に対し、経路選択 DUE 配

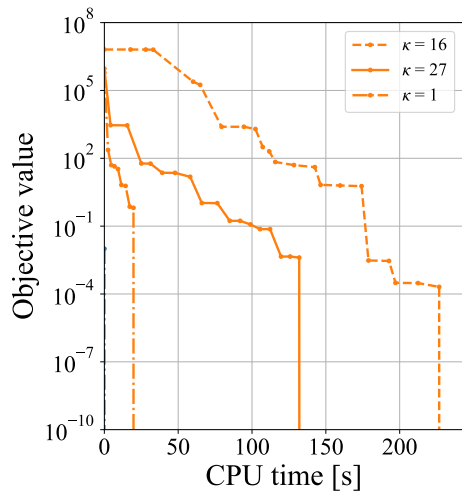


図-9 case 2 での目的関数収束過程：Austin

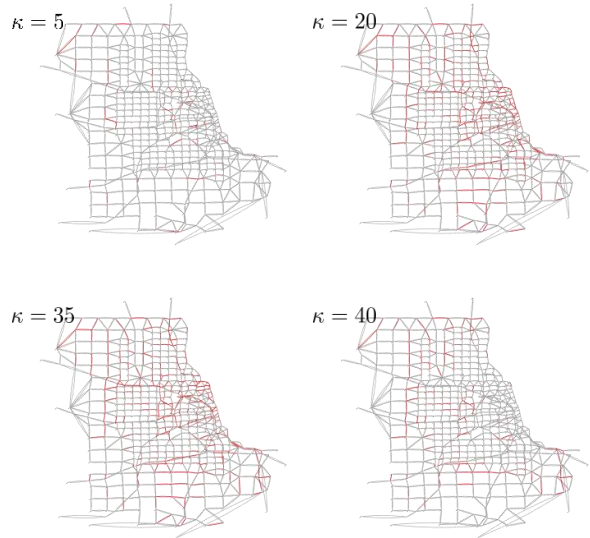


図-11 渋滞状況遷移：Chicago Sketch

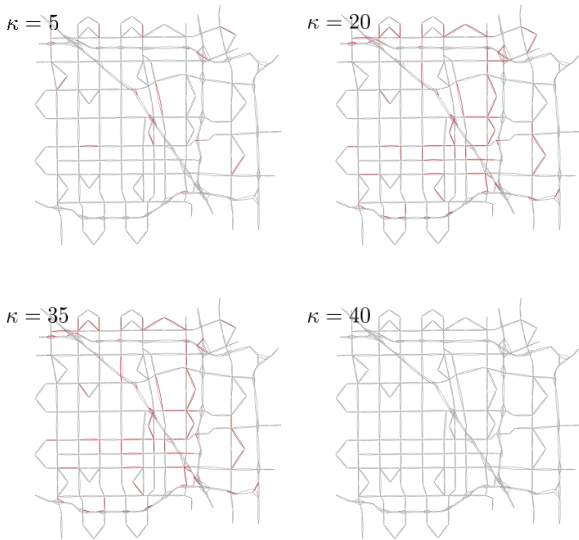


図-10 渋滞状況遷移：Anaheim

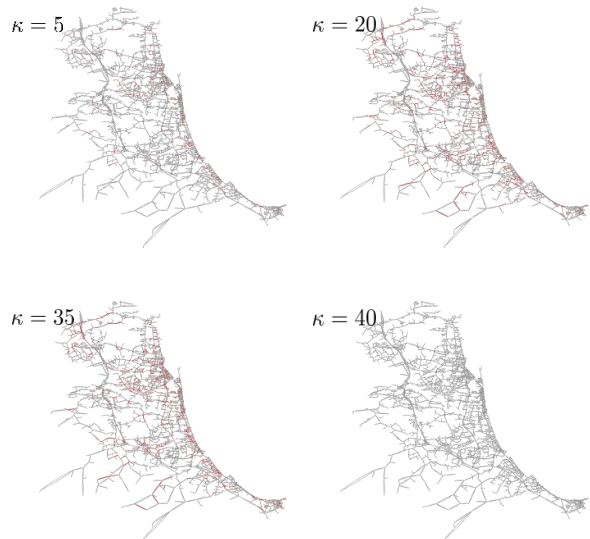


図-12 渋滞状況遷移：Gold Coast

分がそのサブ問題となるような分解を施すことができれば、本研究の成果を活用した新たな効率的解法の構築が期待できる。

**謝辞：** 本研究はJSPS 科研費 (JP20J21744, JP21H01448) の助成を受けた研究の一部です。ここに記し、感謝を表します。

**参考文献**

- 1) Lo, H. K. and Szeto, W. Y.: A cell-based variational inequality formulation of the dynamic user optimal assignment problem, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.36, No.5, pp.421–443, 2002.
- 2) Long, J., Huang, H.-J., Gao, Z. and Szeto, W. Y.: An intersection-movement-based dynamic user optimal route choice problem, *Operations Research*, Vol.61, No.5,

- pp.1134–1147, 2013.
- 3) Gentile, G.: Solving a dynamic user equilibrium model based on splitting rates with gradient projection algorithms, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.92, pp.120–147, 2016.
- 4) Han, K., Eve, G. and Friesz, T. L.: Computing dynamic user equilibria on large-scale networks with software implementation, *Networks and Spatial Economics*, Vol.19, No.3, pp.869–902, 2019.
- 5) Thong, D. V., Gibali, A., Staudigl, M. and Vuong, P. T.: Computing dynamic user equilibrium on large-scale networks without knowing global parameters, *Networks and Spatial Economics*, pp. 1–34, 2021.
- 6) 井料隆雅: 車両を離散化した動的交通量配分問題の nash

- 均衡解の解法, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.67, No.1, pp.70–83, 2011.
- 7) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Dynamic equilibrium assignment with queues for a one-to-many od pattern, *Transportation and Traffic Theory*, Vol.12, pp.185–204, 1993.
  - 8) Akamatsu, T.: An efficient algorithm for dynamic traffic equilibrium assignment with queues, *Transportation Science*, Vol.35, No.4, pp.389–404, 2001.
  - 9) Frank, M., Wolfe, P. et al.: An algorithm for quadratic programming, *Naval research logistics quarterly*, Vol.3, No.1-2, pp.95–110, 1956.
  - 10) 長江剛志, 赤松隆, 清水廉, 符皓然: 経路・出発時刻同時選択型の動的利用者均衡配分の求解法: 二次計画問題アプローチ, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.76, No.3, pp.264–281, 2020.

(2022. 3. 6 受付)