

離散選択モデル研究の最近の展開 — 異質性と摂動性の観点から —

福田 大輔¹・城間 洋也²

¹正会員 東京大学教授 大学院工学系研究科 社会基盤学専攻 (〒 113-8656 文京区本郷 7-3-1)

E-mail: fukuda@civil.t.u-tokyo.ac.jp

²正会員 パシフィックコンサルタンツ株式会社 九州支社 (〒 812-0012 福岡市博多区博多駅中央街 7-21)

E-mail: hiroya.shiroma@tk.pacific.co.jp

本論文では、近年方法論の展開が大きく進んでいる“異質性”と“摂動性”という観点を中心に離散選択モデル研究の包括的なレビューを行い、今後の行動モデル研究について筆者らなりの展望を示すことを目的とする。まず異質性に関しては、Mixed Multinomial Logit モデルを理論の下敷きとして、個人の選好の異質性を離散選択モデルの枠組で具体的に記述し、詳細な個人データに基づいて推計するための近年の方法論開発についてレビューを行う。次に摂動性に関しては、摂動効用の概念を概説した上で様々な意思決定の場面への応用可能性を示すと共に、一般化エントロピー概念、凸共役性、需要関数の可逆性等を鍵とした需要推計方法論の展開について包括的に整理する。最後にレビューを総括した上で、今後の行動モデル研究の展望について論じる。

Key Words: discrete choice analysis, heterogeneity, mixed multinomial logit, perturbed utility, generalized entropy

1. はじめに

(1) 背景と目的

改めて述べるまでもなく、1970年代初頭に米国で開発され、1980年代になって我が国でも研究が大きく展開した離散選択モデル¹は、交通需要予測やプロジェクト評価の実務における標準的なツールである。多項ロジット (MNL) モデル式の導出とパラメータ推定は、大学の交通計画の講義の必須教授項目とも言える^{1)~3)}。

この離散選択モデルについて、我が国でも交通計画、土木計画学、応用ミクロ経済学、行動計量学等において様々な研究が行われてきた。交通行動分析分野におけるレビュー論文も多数存在する。1980年代には四段階推定法に代わる実用可能性の観点に着目した整理⁴⁾や、ネスティッドロジット (NL) モデルによる多次元選択行動の整理^{5),6)}がなされている。1990年代から2000年代後期にかけては、現実の意思決定の特性を加味した様々なモデル展開^{7),8)}や、アクティビティ分析やネットワークモデリングにおける行動モデルの役割^{9)~12)}等が整理されている。さらに2010年代には、離散-連続モデルや社会的相互作用分析の整理^{13),14)}に加え、街区レベルの詳細空間設計への活用可能性¹⁵⁾と言った観点からの整理もなされている。

それに対し本論文では、近年方法論の展開が大きく

進んでいる“異質性”と“摂動性”という観点に特化して離散選択モデル研究の包括的なレビューを行い、今後の行動モデル研究について筆者らなりの展望を示すことを目的とする。

(2) 異質性

異質性 (Heterogeneity) とは、意思決定者の嗜好が個人間あるいは同一個人でも状況次第で異なり、結果として選択行動にも差異が生じる状況を指す²⁾。この考え方は新しいものではなく、意思決定者の社会経済変数をモデルに明示的に取り込むことによる“観測”異質性の考慮はモデルの開発当初から行われていた³⁾、パラメータの個人間変動を考慮したいいわゆるランダム係数モデルも1970年代初頭¹⁸⁾にその始源を見ることが出来る。そのような“非観測”異質性の考慮は、2000年代初頭の Mixed Multinomial Logit (MXL) モデル^{19),20)}の確立を以て概成したかと思われたが、標準的な MXL モデルは表現可能な異質性の統計分布パターンが限定的であるという、実務上、計算上の課題を有していた。このため、我が国ではさらなる研究開発や実務への展開があまり進まなかったと著者らは考えている。

これに対し、特に欧州の研究者を中心に、個人間異質性はもとより個人内異質性の考慮や、より柔軟な異質性分布を考慮可能なノンパラメトリック推定方法やベイズ統計学に基づく研究の展開がこの15年間で大き

¹ 非集計行動モデル (Disaggregate Choice Model)、個人選択モデル (Individual Choice Model) 等とも呼称されているが、本論文では離散選択モデル (Discrete Choice Model) という表記で統一する。

² 異質性に関して包括的に整理した論文として張ら¹⁶⁾がある。

³ もちろんこれこそが離散選択モデル開発の主な動機であった¹⁷⁾。

く進展してきた。そしてそれらの学術成果は、例えば、交通プロジェクト評価における重要なパラメータである旅行時間短縮価値²¹⁾や時間信頼性価値²²⁾の詳細な個人単位での推計に適用されている。特に欧州諸国²³⁾⁻²⁶⁾では、プロジェクト評価の実務においてもそれらの最新手法に基づく原単位推計結果が採用されている。

マーケティング・サイエンスの分野では、消費者間の異質性が古くから重要な研究課題であり、多くの研究が行われてきた。他方交通分野でも、特に近年、異質性を考慮可能な緻密な個人レベルの離散選択モデルを用いて、自動運転や MaaS (Mobility as a Service) のような不確実性が大きくシステム構成も複雑な新モビリティサービスの価値評価、より精緻化された交通プライシング問題への適用、ビッグデータマーケティングの枠組でのレコメンダーシステムへの適用等といった、新たな展開も見られるようになってきた。著者らは、効用理論という明確な理論基盤を背景に持つ離散選択モデルは、いわゆる“解釈可能な AI” (XAI)²⁷⁾の一つとしてさらなる可能性を有していると期待している。

(3) 摂動性

一方、摂動 (Perturbation) 及び摂動性という概念は、離散選択モデルの枠組で明示的に扱われることは従来見られなかった。元来、力学における摂動は、「主要な力の寄与 (主要項) による運動が、他の副次的な力の寄与 (摂動項) によって乱される現象」(Wikipedia) と定義されている。既に方程式が解けている系の運動や状態に対し、“比較的弱い相互作用”が入ったときにどのくらい変化するのかを調べるのが摂動論である⁴⁾。

この概念を行動モデルの枠組で捉え直すと、「現実の人々の意思決定が、標準的な意思決定理論⁵⁾ (主要項) から、単純ながらもある首尾一貫した副次的・変則的 (Anomaly) な要因⁶⁾ (摂動項) の影響を受けて乖離し、ある確率的な選択行動として発現するような状況」と考えることができるであろう。そのような摂動性の概念を意思決定理論として体系化したものが摂動効用 (Perturbed Utility) である^{29),30)}。

摂動効用という統一理論化がなされたのは最近のことであるが、実は離散選択モデルではこの概念はこれまでも暗黙に用いられてきた。具体的には、消費する財のバラエティが大きいことで効用が増大する状況を表した代表的消費者のある効用最大化問題の最適解 (需要関数) が MNL モデルに同型となることが従来より知られている³¹⁾⁻³³⁾ が、これは摂動効用項としてシャノン・エントロピー型関数を用いた特殊ケースであると解釈できる。摂動効用は、そうしたバラエティ選好の考慮

⁴⁾ 摂動論の入門的和書として Strogatz²⁸⁾ がある。

⁵⁾ 期待効用理論など。

⁶⁾ 財バラエティ選好、限定合理性、何らかの戦略的意図性など。

を一つの特例ケースとして包含し、それ以外の様々な意思決定特性を記述することが可能であり、MNL を含めた様々なクラスの離散選択モデルを首尾一貫した体系として導出することができる。

さらに摂動効用は、数理最適化における双対理論の枠組を援用することで、「確定効用プラス確率効用」という MNL 等が準拠してきた (加法型) ランダム効用モデル (Additive Random Utility Model: ARUM)³⁴⁾ との関連付けも明確にすることができる。双対理論の利用は、大規模な問題や動的離散選択の問題への拡張、モデルパラメータ推定方法の効率化、モデル識別問題の克服等という利点をもたらしている。このため、摂動効用の概念をランダム効用の概念と一体的に整理することに一定程度の意義があると筆者らは考えている。

(4) 論文の構成

2. では、MXL モデルを理論の下敷きとして、個人の選好の異質性を離散選択モデルの枠組で具体的に記述し、データに基づいて推計するための近年の方法論開発についてレビューを行う。3. では、Perturbed Utility の概念を概説した上で、様々な意思決定の場面への応用可能性を示すとともに、エントロピー概念、凸共役性、関数の可逆性等を鍵とした需要推計方法論の展開について包括的に整理する。最後に 4. ではレビューを総括した上で、今後の行動モデル研究の展望について論じる。

2. 異質性を考慮した離散選択モデルの展開

(1) Mixed Multinomial Logit Model の概要

離散選択モデルにおける異質性に関して検討するに当たり、MXL モデルの基本構造を理解しておくことがまず必要である。

a) クロスセクションデータの場合

クロスセクションデータ (個人 n ($n = 1, \dots, N$) に対し、それぞれの個人が各々一回の離散選択の場面に直面している状況) を考える。 β_n を直接観察することが不可能な個人 n の選好パラメータベクトルとしよう。 β_n は、個人間で独立かつ同一の確率密度関数 $f(\beta | \Omega)$ に従うと仮定する。ここで Ω はこの確率密度関数を規定するハイパーパラメータベクトルである⁷⁾。また、個人 n が選択した選択肢を j_n で表す。さらに、 $P_n(j_n^* | \beta)$ により、 β がある値として与えられたもとで個人 n の実際の選択行動が起こる確率 (条件付き尤度) を表すものとしてしよう。MXL モデルにおいて、 P_n は MNL 型の形式

⁷⁾ 例えば f が正規分布の場合、 Ω には平均と分散が相当する。

(Logit Kernel) として次式で与えられる.

$$P_n(j_n^* | \beta_n) = \frac{\exp(\beta_n x_{n,j_n^*})}{\sum_{j=1}^{J_n} \exp(\beta_n x_{n,j})} \quad (1)$$

ここで J_n は個人 n が直面する選択肢の総数, $x_{n,j}$ は選択肢 j に対する個人 n の観測属性ベクトル⁸である.

このとき, MXL モデルに基づく個人 n の実際の選択行動が起こる確率 (尤度) は, β に関する周辺化操作を行うことにより, 次式で与えられる⁹.

$$P_n(j_n^*) = \int_{\beta} P_n(j_n^* | \beta) f(\beta | \Omega) d\beta \quad (2)$$

このとき, 対数尤度関数は次式で表される.

$$LL(\Omega) = \sum_{n=1}^N \ln \left(\int_{\beta} P_n(j_n^* | \beta) f(\beta | \Omega) d\beta \right) \quad (3)$$

式 (2) の MXL モデルには積分計算が残るため, パラメータ推定においてはシミュレーション近似が通常用いられる. シミュレートされた対数尤度関数は次式で表される.

$$SLL(\Omega) = \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{1}{R} \sum_{r=1}^R P_n(j_n^* | \beta_{r,n}) \right) \quad (4)$$

ここで $\beta_{r,n}$ は, 個人 n における $f(\beta | \Omega)$ からの合計 R 個のサンプリングパラメータのうち r 番目の標本を指す. 通常, 合計 N 人の個人に対して異なるサンプリング¹⁰が行われるため, この対数尤度の計算には全部で NR 個のサンプリングパラメータ標本が必要となる.

b) 繰り返し選択データの場合

複数時点で観測されたパネルデータや, 選好意識 (SP) 調査から得られるデータは, 同一個人による繰り返しの選択データを含んでいる. こうした場合, 同一の個人であれば, 選択の場面が異なってもその選好は変わらず同一であると仮定することは自然と考えられる. 個人 n が T_n 回の選択の場面に直面し, 場面 t で選択した選択肢を $j_{n,t}^*$ ($t = 1, \dots, T_n$) とする. 選択の系列 $\{j_{n,t}^*\}_{t=1}^{T_n}$ が観測される同時確率は次式で表される.

$$P_n(\{j_{n,t}^*\}_{t=1}^{T_n}) = \int_{\beta} \left[\prod_{t=1}^{T_n} P_{n,t}(j_{n,t}^* | \beta) \right] f(\beta | \Omega) d\beta \quad (5)$$

対応する対数尤度関数は次のようになる.

$$LL(\Omega) = \sum_{n=1}^N \ln \left(\int_{\beta} \left[\prod_{t=1}^{T_n} P_{n,t}(j_{n,t}^* | \beta) \right] f(\beta | \Omega) d\beta \right) \quad (6)$$

シミュレートされた対数尤度関数は次式で表される.

$$SLL(\Omega) = \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left[\prod_{t=1}^{T_n} P_{n,t}(j_{n,t}^* | \beta_{r,n}) \right] \right) \quad (7)$$

⁸ 選択肢固有変数, 選択肢共通変数, 社会経済属性変数などをまとめて表記する.

⁹ MXL の “Mixed” とは, (1) の Logit Kernel を導出するために仮定しているランダム効用項がガンベル分布に従い, 選好パラメータが分布 $f(\beta | \Omega)$ に従うことで, 総効用がそれらの混合分布に従う状況を表していることに由来する.

¹⁰ サンプリングの方法も近年進展しているが本論文では触れない.

式 (7) より, 与えられたパラメータ標本 $\beta_{r,n}$ に対して選択確率の系列積 $\prod_{t=1}^{T_n} (P_{n,t}(j_{n,t}^* | \beta_{r,n}))$ がまず計算されることがわかる. そしてその上で系列積の標本平均を求め, 最後にその対数が取られている. これらの計算に伴い, 個人 n の全体尤度への寄与において RT_n 回の MXL 計算が必要となる.

c) 個人内異質性の考慮

以上の **a)**, **b)** は, 選好パラメータの個人間異質性のみを考慮するものであった. ここではさらに個人内異質性を導入する¹¹. そのために, 選好パラメータが選択場面 t によっても異なると考え, $\beta_{n,t}$ と表そう. その上で, $\beta_{n,t}$ を個人に固有の要素である α_n と, 個人及び選択場面に固有の要素である $\gamma_{n,t}$ に分解する. すなわち,

$$\beta_{n,t} = \alpha_n + \gamma_{n,t}, \quad \forall n, t \quad (8)$$

である. α_n は個人間で異なるが選択場面による影響は受けなため, 個人間異質性を捉えている. それに対し, $\gamma_{n,t}$ は個人間のみならず選択場面によっても異なるため, 個人内異質性を捉えている.

α_n が従う確率密度関数を $g(\alpha | \Omega)$, $\gamma_{n,t}$ が従う確率密度関数を $h(\gamma | \Omega)$ とし, $\alpha_n, \gamma_{n,t}$ の確率密度関数のハイパーパラメータを Ω として再定義すると, 対数尤度関数は次のように表される.

$$LL(\Omega) = \sum_{n=1}^N \ln \left[\int_{\alpha} \left(\prod_{t=1}^{T_n} \left(\int_{\gamma} P_{n,t}(j_{n,t}^* | \alpha, \gamma) h(\gamma | \Omega) d\gamma \right) \right) g(\alpha | \Omega) d\alpha \right] \quad (9)$$

個人間異質性について R 回, 個人内異質性について K 回のパラメータ標本のサンプリングを行うとすると, シミュレートされた対数尤度関数は次式のようになる.

$$SLL(\Omega) = \sum_{n=1}^N \ln \left[\frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left(\prod_{t=1}^{T_n} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (P_{n,t}(j_{n,t}^* | \alpha_{r,n}, \gamma_{k,t,n})) \right) \right] \quad (10)$$

式 (10) のシミュレーションでは, 個人 n に対し全部で KT_n 個の γ がサンプリングされた上で α に対して全部で R 個のサンプリングがなされる. その結果, 個人 n に対するサンプリング数は式 (7) では計 RT_n であったのに対し, 式 (10) では計 RKT_n のサンプリングが必要となり, 計算量が飛躍的に増加することが示唆される.

(2) 異質性のパラメトリックな表現方法

対象母集団における選好パラメータ β の異質性を具体的に表すためには, その確率密度関数 $f(\cdot)$ (あるいは, $g(\cdot)$ 及び $h(\cdot)$) を特定化する必要がある. MXL モデルの代表的教科書である Train²⁰⁾ では, 正規分布, 対

¹¹ その考慮のためには, 用いるデータセットは繰り返し選択データであることがモデルの識別 (Identification) 上で必須である.

数正規分布, 切断正規分布, 三角分布といった計算プログラム上の実装が比較的容易な確率密度関数を用いた事例の紹介が中心であり, 我が国における MXL モデルの適用事例の多くも, そのようなスタンダードな確率密度関数の活用にとどまっていた。

しかし, 分布形状に関する制約が比較的強いこれらの統計分布を用いて母集団の選好異質性を表そうとすることには限界が大きい。例えば, 旅行時間短縮価値は一般に非負の値を取ると期待されるが, 交通行動モデルの旅行時間変数のパラメータに正規分布を仮定すると, その特性上, 正負両方の値を必ず取り得てしまう¹²。一方, 対数正規分布を採用することで符号条件は必ず満足されるようになるが, 分布の裾が非常に厚くなるという新たな課題が生じる。

a) 柔軟なパラメトリック分布

これに対し, 上述のようなスタンダードな分布に従う確率変数を変数変換して得られる特殊なパラメトリック分布を用いることで, 分布形状に関する制約を緩和できることが知られている。柔軟性が高くかつ操作性に優れた分布の代表例は以下の二つである。

Johnson S_B 分布³⁵⁾ この確率分布は四つのパラメータを持ち, 分布の左右非対称性を表現できることや, 確率変数の上限値と下限値を有界に定めることのできるなどの点において, 正規分布や対数正規分布に比べて柔軟かつデータオリエンテッドに分布形状を設定することができる¹³。確率密度関数は次の通りである。

$$\beta \sim S_B(b, \sigma, \delta_0, \delta_1) \equiv \delta_0 + (\delta_1 - \delta_0) \frac{\exp(b + \sigma\omega)}{1 + \exp(b + \sigma\omega)} \quad (11)$$

ここで, ω は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数, b は確率分布のロケーションパラメータ, σ は標準偏差パラメータ, δ_0 はパラメータの下限値, δ_1 はパラメータの上限値を表す。

Johnson S_B 分布を用いて, Hess et al.³⁶⁾ は旅行時間短縮価値の母集団分布を推計し, 他の標準的分布よりも適合度が高いことを確認している。Train and Sonnier³⁷⁾ は, 環境質の変化に対する支払意思額の母集団分布を推計している。城間ら³⁸⁾ は, バイアスを極力小さくして信頼性の高い時間価値分布の推計結果を得るため, 複数のデータソースを活用し, 状態依存性等を明示的に組み込んだ上で, さらに異質性として Johnson S_B 分布を用いた個人レベルの離散選択モデルを構築している。しかし, Johnson S_B 分布を用いたパラメータの数値計算では, 上限・下限値 δ_0, δ_1 については予め分析者が値を与えなければ, 推定結果が安定しないという課題が残されている³⁷⁾。

対数一様分布 確率変数 u が範囲 $[a_L, a_U]$ の一様分布に従うとき, その対数変換値 $\beta = \log(u)$ が従う分布は対数一様分布と呼ばれる。この分布は対数正規分布に比べて分布の裾が短くなり, 極端に外れた選好パラメータが生じる可能性が小さくなっている。対数一様分布は Fosgerau²³⁾ において初めて時間価値分布の推計に用いられた。また, Hess et al.²⁶⁾ では, 状態依存性などその他の要因も盛り込んだより一般的なモデルフレームワークが構築され, イギリスにおける時間価値分布の推計の実務でも活用されている。

b) 混合正規分布に基づく MXL モデル

互いに独立な複数の正規分布に従う確率変数の線形和(混合正規分布: Discrete-Mixture-Normal)により, 任意の確率分布を高い精度で推計できることは古くから知られている³⁹⁾。この混合正規分布をパラメータの母集団分布を表すために用いた MNL 型の離散選択モデルは, 確率分布の混合を二重で行っていることから Mixed-Mixed MNL (M-MXL) モデルと呼ばれる⁴⁰⁾。これは, Q 個ある正規分布のうち q 番目のものを $N(\mu_q, \sigma_q^2)$ によって表し ($q = 1, \dots, Q$), さらに, それぞれの正規分布がサンプリングされる確率を π_q ($0 \leq \pi_q \leq 1$) によって表したとき, パラメータ β の母集団分布を $f(\beta) = \sum_{q=1}^Q \pi_q N(\mu_q, \sigma_q^2)$ によって特定化するものである。

Fosgerau and Hess⁴¹⁾ では, 混合正規分布によるパラメータ異質性を表現する枠組を構築し, 仮想データを用いた性能検証を行っている。Keane and Wasi⁴²⁾ では, M-MXL モデルを含めた様々な離散型混合分布によるパラメータの異質性表現の比較分析を行っている。Daziano et al.⁴³⁾ では, SP データに対して混合正規分布あるいは混合対数正規分布による異質性表現を導入した M-MXL モデル (NM-MXL, LNM-MXL) を推定し, 自動運転普及時の時間価値の母集団分布を推計している。

混合分布においては, 要素となる個別の確率密度関数のパラメータに加え, サンプリングされる確率 π_q も同時に推定する必要があるが, 一般的にこうした混合分布の推定は計算上不安定になりがちである。これに対し, Train⁴⁴⁾ は, EM (Expectation-Maximization) アルゴリズムを用いて安定的に混合分布を求める MXL モデルの推定フレームを構築している。

c) Logit-Mixed Logit モデル

Train⁴⁵⁾ は, 離散のパラメータ空間 (Finite Support) を想定した上で, 各パラメータ値の生起確率が MNL 式によって与えられる Logit-Mixed Logit (L-MXL) モデルを提案している。 β の母集団分布が有限の台 S 上で定義されると仮定すると, 個人 n が選択肢 j を選ぶ確率は

¹² 他にも, 分布が完全に左右対称になるという制約も課される。

¹³ パラメータの組合せ次第で複数の分布を表すことも可能である。

次式で与えられる。

$$P_n(j) = \sum_{r \in S} W(\beta_r | \alpha) \cdot Q_{n,j}(\beta_r) \\ = \sum_{r \in S} \left(\frac{e^{\alpha' z(\beta_r)}}{\sum_{s \in S} e^{\alpha' z(\beta_s)}} \right) \cdot \left(\frac{e^{\beta_r' x_{n,j}}}{\sum_{j' \in J_n} e^{\beta_r' x_{n,j'}}} \right) \quad (12)$$

ここで、 $W(\beta_r | \alpha)$ は質点 (Mass Point) $\beta_r \in S$ の生起確率、 $z(\beta_r)$ は β_r に関するベクトル値関数、 α はそれに呼応した未知パラメータベクトル、 $Q_{n,j}$ は β_r が与えられたもとでの選択肢 j の選択確率である

式 (12) の数理的構造は、従来からある潜在クラス選択モデル⁴⁶⁾ や Mass Point モデル^{47),48)} と同じである。但し、台 S の要素数を十分に大きく設定し、 $z(\beta_r)$ の関数形¹⁴⁾ を適切に設定することであらゆる混合分布を必要とする精度で近似することができる。パラメータ推定においては、質点 β_r を生成する台 S の部分集合 S_n をサンプリングし、それによってシミュレートされた対数尤度関数を構築している。また、NM-MXL に対する L-MXL の優位性として、対数尤度最大化において必要とされる対数尤度関数の勾配ベクトルを解析的に導出可能で、計算の高速化が可能となることが挙げられる。Bansal et al.⁴⁹⁾ は、説明変数ベクトルをそのパラメータが Logit-Mixture 分布に従うものとそうでないもの (固定パラメータ) とに分離した上で L-MXL モデルを構成する方法を開発している。

(3) ノンパラメトリックアプローチ

大量のデータの利用を前提にデータドリブンに選好パラメータの母集団分布を推計するのが、関数を事前に仮定しないノンパラメトリックアプローチである¹⁵⁾。

異質性を表現するという観点からの本アプローチは、基底関数を推定するという有限次元の問題に変換してから問題を取り扱うセミ・ノンパラメトリックなアプローチと、インプットとアウトプットの局所的な関係を推計することを主眼としたノンパラメトリックアプローチとに大別される。前者の代表例が Sieve 推定、後者の代表例が Kernel 推定である。

¹⁴ Train⁴⁵⁾ はスプライン、階段、多項式等の関数を挙げている。

¹⁵ Chen⁵⁰⁾ は計量経済モデル全般について次のように分類している。

- (a) Parametric : 全パラメータが有限次元空間で定義される場合
- (b) Nonparametric : 全パラメータが無限次元空間で定義される場合
- (c) Semiparametric : 一部パラメータが Parametric, その他パラメータが Nonparametric の場合

また、ARUM の枠組で以下のような整理⁵¹⁾ もなされている。

- (d) Nonparametric : 確定項の関数も確率項の分布関数も共に Nonparametric な場合
- (e) Semiparametric I : 確定項は Parametric だが確率項の分布関数は Nonparametric な場合
- (f) Semiparametric II : 確定項は Nonparametric だが確率項の分布関数は Parametric な場合

(d)~(f) の各カテゴリーに相当する離散選択モデル⁵²⁾ も開発されているが、確定項の Nonparametric 化は刺激量に対する反応量の非線形関係を意味しており、個人間や個人内の異質性を直接的に扱っているわけではないため、本論文のレビューでは対象外とする。

a) Sieve 推定

Legendre 多項式アプローチ Sieve 推定は、「充分滑らかな関数は基底関数の線形和により予め定めた任意の精度で近似可能である」という考え方に基づくものである。これにより、ノンパラメトリックの関数を求めるという無限次元空間上のパラメータ推定問題が、線形関数の係数を推定するという有限次元の問題に置き換えられる。基底関数としては、べき関数、階段関数、スプライン等が用いられる。

但し、一般的な関数とは異なり、確率密度関数 (又は分布関数) を Sieve 推定するためは留意すべき事項がある。確率密度関数は確率変数の全定義域で積分をとると 1 に等しくならなければならないという制約 (全確率は 1) が必須である。先述の NM-MXL や L-MXL は、そうした制約を暗に与えた Sieve 推定によりパラメータを求めていると解釈することも可能である。

そうした制約を満たし、基底関数として Legendre 多項式を用いて異質性パラメータの母集団分布をセミ・ノンパラメトリックに推計した研究に Fosgerau and Bierlaire⁵³⁾ がある。この研究では、適切に変換された Legendre 多項式 $L_k(x)$ (付録 a) 参照) を用いて、対象とする異質性パラメータ分布の近似を高い精度で行っている。N 次の修正 Legendre 多項式を次式で与える。

$$q_N(x) = 1 + \sum_{k=1}^N \delta_k L_k(x) \quad (13)$$

ここで δ_k は未知パラメータである。その上で、想定している分布 F から真の分布 G へ変換する関数 $G = Q(F)$ ($Q: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$) の一階偏微分を次式で近似している。

$$q(x) \approx \frac{1}{K} q_N^2(x) \quad (14)$$

ここで K は規格化定数で陽に求められ、 $K = 1 + \sum_{k=1}^N \delta_k$ となる。分析者が想定する β に関する分布 F と真の分布 G の関係を明示的に導入した上で、選択確率の近似式が以下の通り求められる。

$$P_n(j | \Omega) \approx \frac{1}{K} \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(j | \beta, \Omega) q_N^2(F(\beta)) f(\beta) d\beta \\ = \frac{1}{K} \int_0^1 P_n(j | F^{-1}(z), \Omega) q_N^2(z) dz \quad (15)$$

分析者は、Legendre 多項式の次数 N を要求される精度に応じて定め、その上で尤度比検定を通じて想定する β に関する分布 F と真の分布 G とがどれぐらい類似しているのか検定することができる。

冪級数展開アプローチ 上述した Fosgerau and Bierlaire⁵³⁾ の方法は、「使用しているパラメトリック分布 f が真の分布 g にどれぐらい近いのか」を Sieve 推定によって検定するものである。したがって、分布形そのものを推計する手法ではない。これに対し Fosgerau and Mabit⁵⁴⁾ は、異質性パラメータが従う確率密度関数

について、その関数そのものを推定するのではなく、生成される乱数を基底となる確率分布（一様分布や標準正規分布など）の冪級数により近似する方法を提案している。すなわち、 r 番目のサンプリング β_r を次式によって与える。

$$\beta_r = f(u_r | \alpha) = \sum_{k=1}^K \alpha_k u_r^k \quad (16)$$

ここで、 u は基底確率変数、 α は係数ベクトルである。

効用関数の確定項が βx で与えられているなら、 r 番目のシミュレート結果は $\sum_{k=1}^K \alpha_k (x u_r^k)$ のように係数パラメータに関して線形となるため、計算効率性が高い。さらに、冪級数の次数 K を適切に設定することで、分布の任意のモーメントを係数パラメータ値から求めることができることも知られている⁵⁵⁾。

b) Kernel 推定

Kernel 推定は、統計データのヒストグラム作成の考え方を一般化してその恣意性を極力排除すると共に、定量分析における操作性を高めようとしたものである。

Kernel 推定では、インプットとアウトプットの間の関係については観測データに基づく局所性（例えば、インプットの局所区間内ではアウトプットは定数あるいは線形等の単純な関数関係を持つ）を仮定しつつ、局所どうしが滑らかに接合するよう各観測データの貢献度を滑らかに変更させていくために、与えられたバンド幅 h のもとで $K_h(u) = K_h(-u)$ かつ $\int K_h(u) du = 1$ を満たす Kernel 関数 $K_h(\cdot)$ を用い、密度推定や回帰を行う¹⁶⁾。

離散選択モデルの枠組における Kernel 推定の適用事例は、後述する旅行時間短縮価値（時間価値）の母集団分布の推計等に限定されている。但しそれを考えるに当たり、異質性を想定する分布を“選好”（Preference）に求めるのか、それとも“支払意思額”（WTP）に求めるのかによる違いを理解しておくことが必要である。

Preference Space vs. WTP Space 離散選択モデルの枠組では、時間価値は費用（所得）の限界効用に対する旅行時間の限界効用の比率として定義されてきた。標準的な時間価値推計では、交通手段選択や経路選択等の ARUM 型の離散選択モデル、例えば、

$$U_{njt} = -\alpha_n p_{njt} + \theta'_n \mathbf{x}_{njt} + \epsilon_{njt} \quad (17)$$

を特定化し、選択データより求めたパラメータの比率 $\hat{\theta}_n / \hat{\alpha}_n$ によって時間価値を求めることが標準的であった（ α_n ：交通費用等の価格指数 p_{njt} に対応する係数（限界効用）、 θ_n ：旅行時間等も含めた選択肢属性 \mathbf{x}_{njt} に対応する係数（限界効用）ベクトル、 ϵ_{njt} ：ガンベル分布に従うランダム項であり、分散が個人毎に異なる状況すな

わち $\text{Var}(\epsilon_{njt}) = \mu_n^2 (\pi^2/6)$ を想定）。これが“Preference Space”で定義された効用関数である⁵⁸⁾。

効用の序数性より、正数であるスケールパラメータ μ_n で式(17)の両辺を除いても選好は変化しないことから、

$$U_{njt} = -(\alpha_n/\mu_n) p_{njt} + (\theta_n/\mu_n)' \mathbf{x}_{njt} + \epsilon_{njt} \quad (18)$$

を同じ行動を記述するランダム効用モデルとして用いることもできる。但し式(17)と異なり式(18)では、ガンベル分布に従う誤差項 ϵ_{njt} の分散が全ての個人 n で同一（ $= \pi^2/6$ ）となっている点が異なる。これはさらに $\lambda_n = (\alpha_n/\mu_n)$ 、 $\mathbf{c}_n = (\theta_n/\mu_n)$ 、 $\mathbf{w}_n = \mathbf{c}_n/\lambda_n$ と書き改めことで、次のように表すことができる。

$$U_{njt} = -\lambda_n p_{njt} + \mathbf{c}'_n \mathbf{x}_{njt} + \epsilon_{njt} = -\lambda_n p_{njt} + (\lambda_n \mathbf{w}_n)' \mathbf{x}_{njt} + \epsilon_{njt} \quad (19)$$

式(19)の形式が、“WTP Space”で定義された効用関数と称される⁵⁸⁾。選択肢の各属性に対する支払意思額 \mathbf{w}_n を直接的に表した行動モデルである。

さて、同じ行動データを(17)の特定化に基づいて推定するのか、式(19)の特定化に基づいて推定するのかの違いは、行動モデルに MNL を仮定する限りは何の違いももたらさない。しかし、MXL をはじめとする個人間異質性を考慮可能なモデルを適用する際には、両者は有意な違いをもたらす。具体的には、(1)それぞれ個別の分布に従うランダムな係数どうしの比によって与えられる指標（時間価値など）の分布のモーメント（の一部）が非有界になる問題（Preference Space⁵⁹⁾）、(2) μ_n が共通に係数の分母として含まれることに伴う係数間の相関の可能性（WTP Space^{58),60)} といったようなそれぞれの特徴があるが、時間価値をはじめとする（限界）支払意思額の母集団分布を推計するような問題¹⁷⁾においては、特に(1)の問題点に配慮し、WTP Space でのパラメータ推定が行われるようになりつつある。

Local Logit Fosgerau^{23),62)} は、Kernel 推定に基づく Local Logit モデルを構築し、上述の Preference Space や WTP Space における時間価値分布の母集団推計を詳細に分析した先駆的研究である。これらの研究では、旅行時間と費用の二属性のみで規定される Unlabelled 代替案の SP 選択実験（早く高い交通手段 0 と安く遅い交通手段 1 の間の二項選択）という状況を想定している。それぞれの旅行時間と費用を (t_0, c_0) 、 (t_1, c_1) で表し、回答者が交通手段 1 を選択したとき 1（交通手段 0 を選択したとき 0）を取る二値変数を y で表す（設定条件より $\Delta t \equiv c_1 - c_0 < 0 < \Delta t \equiv t_1 - t_0$ ）。

Fosgerau²³⁾ では、個人の旅行時間と費用それぞれの限界効用 α_t 、 α_c （及び対応する時間価値 $w \equiv \alpha_t/\alpha_c$ ）を仮定した上で、WTP Space 上で個人のノンパラメトリック

¹⁶⁾ 計量経済学への適用に関しては Li and Racine⁵⁶⁾ に詳しい。また、バンド幅 h の設定には、通常クロスバリデーション法等が用いられる。行動モデルと連携した旅行時間分布推計への同手法の拡張的な適用例として Fosgerau and Fukuda⁵⁷⁾ がある。

¹⁷⁾ Ojeda-Cabral et al.⁶¹⁾ は、時間価値推計で両推定方法がもたらす結果の相違を複数の実データを用いて実証比較分析している。

ク時間価値 w の分布関数 F_w に対して次の二項選択型確率モデル (Local Logit) :

$$P(y = 1) = P\left(w < -\frac{\Delta c}{\Delta t} \equiv v\right) = F_w(v) \quad (20)$$

を定め, Nadaraya-Watson 推定量 (付録 b) 参照) に基づいて F_w を Kernel 推定する方法を提案している¹⁸.

Local Logit は, 時間価値の非負性 ($w > 0$) を仮定すると, 時間価値における個人属性変数 x が与える影響 (すなわち観測異質性) をセミパラメトリックに考慮することができる¹⁹. なお, ノンパラメトリックな時間価値分布が同定できたとしても, それだけでは実務上の操作性は高くない. そのため, Local Logit の推定結果をもとに, それによりフィットしたパラメトリックな統計分布を探す作業が必要となるが, そのためのノンパラメトリックな統計的検定手法⁶⁵ も開発されている.

(4) 新たな分析事例

本節では, 2. (3) までに概説した異質性を考慮したモデルを用いた分析事例について整理する.

a) 自動運転への選好

近年, 自動運転技術の進展に伴い, 自動運転車を活用したオンデマンド型の交通サービスやライドシェア等数々の新モビリティが提案されている. 交通行動分析の分野においては, 現存しない新規の交通サービスに対する需要分析の手法として, SP 調査を行い, 仮想状況下における個人々の選好意思を離散選択モデルを用いて分析・把握することが古くから行われてきた⁶⁶. 近年では, 自動運転サービスに関しても, 同様のアプローチによりその社会的受容性や支払意思額, 交通時間節約価値の把握等に関する研究が数多く行われている.

Krueger et al.⁶⁷ では, オンデマンド型の自動運転サービスとライドシェア型の自動運転サービスの利用意向について SP 調査を行い, MXL モデルを活用したモデル分析により, 回答者個人間の異質性を考慮したうえで, 年齢等の個人属性による差異や回答者の現状の主な交通手段と利用意向の関係性について明らかにしている. また, Abe et al.⁶⁸ では, SP データに対して, 個人間の異質性を考慮した Ordered Logit モデルを適用し, 無人運行する自動運転サービス利用への受容性について明らかにしている. 自動運転サービスに対する支払意思額や交通時間節約価値に関する研究としては, Steck et al.⁶⁹, Kolarova et al.⁷⁰, Krueger et al.⁷¹, Zhong et al.⁷² があ

り, 従来の自動車利用時との交通時間節約価値との差異の存在等が報告されている. また, Krueger et al.⁷³ では, ランダム項に混合正規分布等のより柔軟な確率分布を仮定して自動運転サービスへの支払意思額の推計を行い, 複数のケースで推計結果を比較するなど, 推計精度の向上の面においても研究が進められている.

b) Mobility as a Service (MaaS) への選好

自動運転技術を活用した新モビリティサービスの導入に加えて, 各交通サービスの検索や予約, 決済を統合するといった MaaS 型の交通サービス導入の意向把握においても, 異質性を考慮した離散選択モデルを活用した分析が行われている. Guidon et al.⁷⁴ では, 仮想的な MaaS サービスの利用意向に関する SP 調査に対して個人間の異質性を考慮した MXL モデルを適用し, サービスへの支払意思額を推計することで, MaaS サービスとして統合すべき交通手段について示唆を与えている. また, Ho et al.⁷⁵ や Ho et al.⁷⁶ においても, 同様の手法により, サービスを利用する際重視する項目 (移動手段や料金設定方法等) や個人属性による差異を把握することで, MaaS サービスの利用条件や導入における課題を明らかにしている.

c) E-Commerce 配送オプションへの選好

Oyama et al.⁷⁷ は, E-Commerce (EC) 利用者の配送オプション選択行動に関する SP データを用いて MXL モデルを構築し, 多様なオプションメニューを構成する各属性に対する利用者の支払い意思額の母集団分布を推計している. SP 調査では「配送費用」, 「配送までの日数」, 「配送時間帯幅」等を属性とする配送オプションの選択実験を行い, 類似選択肢同士の相関や, 観測・非観測異質性を同時に考慮した MXL モデルを構築している. 特に非観測異質性に関しては, 式 (16) に基づくデータオリエンテッドな分布推計を行い, 図-1 に示すように, EC 利用者の選好に大きなバラエティがあることを実証的に明らかにしている.

(5) 推定方法の進展

MXL モデルの推定においては, 尤度計算の際にシミュレーション積分を行う必要があり, その分通常の MNL よりも計算負荷が大きいことが知られている. また, 個人間・個人内の異質性を考慮することでモデルが複雑化すると, さらに計算負荷は増大する. MXL モデルのこのような推定上の課題に対して, Becker et al.⁷⁸ では, 階層ベイズ推定法によるパラメータ推定手法を提案している. 同様に, Krueger et al.⁷⁹ では, ベイズ深層学習等で近年用いられる変分ベイズの考え方を援用したより計算負荷の小さい推定方法を提案するなど, 個人間・個人内の異質性を考慮したより複雑なモデルにおいても計算負荷が小さく対応可能な推定方法が開

¹⁸ 一方, Preference Space を仮定した Local Logit モデルは, ARUM のランダム項 ϵ の分布関数 F_ϵ を仮定し, $P(y = 1) = 1 - F_\epsilon(-\alpha_c \Delta c - \alpha_t \Delta t)$ によって与えられる. Fosgerau⁶² は, Preference Space と WTP Space それぞれで Local Logit を推定し, 時間価値分布の特徴を網羅的に明らかにしている.

¹⁹ Klein and Spady⁶³ は x の影響が局所的に定数であることを, また Fan et al.⁶⁴ は局所的な関係が線形であることをそれぞれ仮定したセミパラメトリック回帰方法を構築している. なお, y が離散変数である場合でも回帰分析によるモデル推定が可能である.

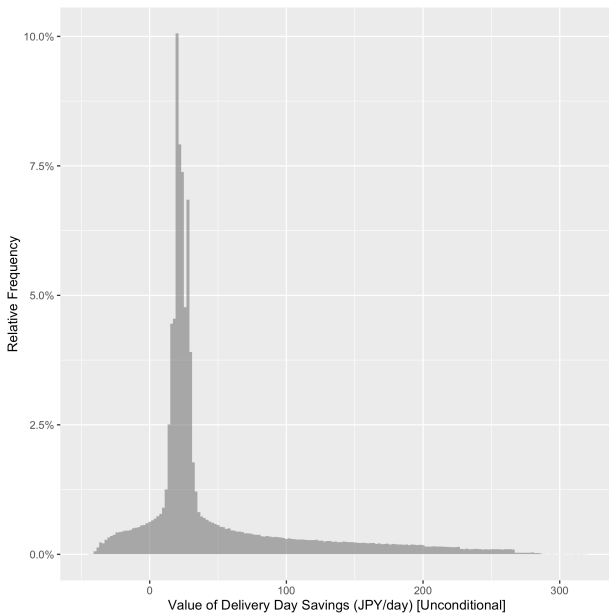


図-1 EC 利用者の配達日数短縮に対する限界的支払意思額の母集団分布推定結果（出典：Oyama et al.⁷⁷⁾）

発されている。さらに、Bansal et al.⁸⁰⁾ は、EM アルゴリズムを特殊ケースとして包含し深層学習等での適用例が豊富な Minorization-Maximization アルゴリズムによる L-MXL 及び NM-MXL モデルの高速推定アルゴリズムを提案している。

3. 摂動効用の概念とその展開

(1) 開発の経緯

摂動効用モデル (Perturbed Utility Model: PUM) は、確率現象として発現する個人の離散選択行動を、多様な観点から比較的単純な数理モデルとして記述することを企図した意思決定モデルと捉えることができる。PUM の基本形は以下の通りに表すことができる。

$$\mathbf{p}(\mathbf{v}) = \arg \max_{\mathbf{q} \in \Delta} \{\mathbf{q}'\mathbf{v} - F(\mathbf{q})\} \quad (21)$$

ここで、 \mathbf{p} は選択肢の数 J の次元上で定義されたシンプレックス集合 Δ 内のベクトル (Choice Probability Vector)、 \mathbf{v} は各選択肢の効用インデックスベクトルである。また、関数 F は確率配分 \mathbf{q} によってのみ規定される凸関数で、摂動関数 (Perturbation Function)²⁹⁾ 又は、ランダム化選好 (Preference for Randomization)³⁰⁾ と呼ばれる。

先述の通り、PUM と同等な数理構造を持つ意思決定モデルや交通行動モデルは古くから提示されていたが²⁰⁾、

²⁰⁾ 宮城の一連の先駆的研究^{31),32),81)} では、数理最適化の共役性理論から導かれた「選択の基本公式」に基づき、MNL が Shannon Entropy Model を定義する際の数理最適化問題と同型の問題から導出できることを示し、標準的消費者行動理論と整合する為の理論的基礎を与えている。なお、同様の導出が並行して Anderson et al.³³⁾ でも示されており、消費する財の「バラエティ」に対する選好を Entropy 関数によって表現した直接効用関数の最大化

PUM という統一的な枠組で様々なタイプの不確実性下の意思決定モデルがより一般的に表現可能であることが整理されたのは近年のことである^{29),30),85)}。これにより ARUM³⁴⁾ を含む幅広いクラスの多様な離散選択モデルを統一的な枠組で記述することが可能となっている。例えば、宮城・小川³¹⁾ や Anderson et al.³³⁾ のエントロピー型効用関数と同様に、PMU は異質な集団における代表的消費者の連続選択行動を表すと解釈できただけでなく、何らかの限定合理的側面を持つ個人の確率的選択行動を直接記述するモデルとしての解釈も可能である³⁰⁾。

(2) 様々な摂動効用モデル

a) 代表的消費者の MNL モデル

摂動効用をシャノン・エントロピー⁸⁶⁾ すなわち、

$$F(\mathbf{q}) = \eta \mathbf{q}' \ln \mathbf{q} \quad (22)$$

によって与えると、最適化問題 (21) の解は MNL 式によって与えられる^{31),33)}。

$$p_j^*(\mathbf{v}) = \frac{\exp(v_j/\eta)}{\sum_{j'=1}^J \exp(v_{j'}/\eta)}, \forall j \in J \quad (23)$$

ここで η はバラエティ選好の寄与度合いを表す非負のパラメータであり、ARUM-MNL の枠組ではランダム項のスケールパラメータの逆数に相当する。

b) 代表的消費者の 2-Level NL モデル

摂動効用を下記のように定めることで、Nested Logit 型の解を導出することができる^{82),83)}。

$$F(\mathbf{q}) = \sum_{\ell=1}^L \left[\eta_{\ell} \sum_{j \in J_{\ell}} q_j \ln(q_j) + (1 - \eta_{\ell}) \left(\sum_{j \in J_{\ell}} q_j \right) \ln \left(\sum_{j \in J_{\ell}} q_j \right) \right] \quad (24)$$

ここで、選択肢集合 J は互いに排反な L 個の部分集合 J_1, J_2, \dots, J_L に分割することができ、各ネスト J_{ℓ} には重み $\eta_{\ell} > 0$ が与えられているものとする。

このとき、個人の意思決定における摂動に起因して発現する選択確率は次の NL 式によって与えられる。

$$p_j^*(\mathbf{v}) = \frac{e^{u_j/\eta_{\ell}}}{\sum_{b \in J_{\ell}} e^{u_b/\eta_{\ell}}} \cdot \frac{\left(\sum_{b \in J_{\ell}} e^{u_b/\eta_{\ell}} \right)^{\eta_{\ell}}}{\sum_{\ell=1}^L \left(\sum_{c \in J_{\ell}} e^{u_c/\eta_{\ell}} \right)^{\eta_{\ell}}}, \forall j \in J \quad (25)$$

c) 加法型ランダム効用モデル (ARUM)

PUM はその特殊形として交通行動分析でも膨大な研究蓄積がある ARUM³⁴⁾ を包含している。詳しくは Nielsen et al.⁸⁷⁾ に示されているが、かなり一般的な条

問題の解が、Logit 型の需要関数になると共に、間接効用関数が Logsum 関数の形式になることが示されている。また、宮城⁸²⁾ 及び Verboven⁸³⁾ では、NL モデルを対象とした同様の数理分析が行われ、対応する代表的消費者の効用最大化問題が定式化されている。他方、ゲーム理論の学習モデルにおいても、特に確率的仮想プレイ (Stochastic Fictitious Play)⁸⁴⁾ の枠組の中で ARUM と PUM の関連性が解析されている。

件²¹のもとで、ARUM の定義式：

$$p_j(\mathbf{v}) = \int \mathbf{1}\left\{j = \operatorname{argmax}_{j \in \mathcal{J}} \{v_j + \varepsilon_j\}\right\} g(\varepsilon) d\varepsilon \quad (26)$$

が式 (21) と等価であることが証明されている (ここで、 $g(\varepsilon)$ はランダム効用ベクトルの多変量確率密度関数)。

d) バンドル選択モデル

Gentzkow⁸⁹⁾ は、複数の財の間の補完性 (Complementarity: ある財の需要が増える [減る] ともう一方の財の需要も増える [減る] 特性) を考慮可能な離散選択モデル (Bundle Choice Model: BCM)²² を構築し、新聞メディア (紙媒体、インターネット) の定期購読行動のモデル化に適用している。

BCM も PUM の特殊な 1 ケースであることを Allen and Rehbeck³⁰⁾ に基づき示そう。消費者が 2 種類の補完財 (財 1: 紙媒体の新聞, 財 2: ネット新聞) の組合せの購買を選択する状況を考える。選択肢は“両方買わない/財 1 のみ買う/財 2 のみ買う/両方買わない”の 4 つであり、対応するランダム効用を以下で特定化する。

$$\begin{cases} v_{0,0} = 0, \\ v_{1,0} = u_1(x_1) + \varepsilon_{1,0}, \\ v_{0,1} = u_2(x_2) + \varepsilon_{0,1}, \\ v_{1,1} = v_{1,0} + v_{0,1} + \varepsilon_{1,1}. \end{cases}$$

ランダム項 $\varepsilon_{1,1}$ が財の補完性 ($\varepsilon_{1,1} > 0$) や代替性 ($\varepsilon_{1,1} < 0$) を規定する。

このとき、選択行動を 2 次元ベクトル $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ で表すと、対応する摂動効用関数は次式で表される。

$$\sum_{k=1}^2 y_k u_k(x_k) + (y_1 \varepsilon_{1,0} + y_2 \varepsilon_{0,1} + y_1 y_2 \varepsilon_{1,1}) \quad (27)$$

e) マッチングモデル

補完性はマッチングの状況でも現れる。Fox et al.⁹¹⁾ は、一対一のマッチング状況における離散選択モデルを開発しているが、このモデルも PUM の枠組で記述することが可能である⁹²⁾。

このマッチングモデルにおける従属変数は、(サプライチェーン等における)「川下企業 j と川上企業 k がマッチングするか否か」であり、 $\tilde{y}_{j,k} \in \{0, 1\}$ の二値変数で表す。Fox et al.⁹¹⁾ は、譲渡可能効用²³ と幾つかの仮定のもとで、マッチング均衡時の従属変数行列 $\tilde{\mathbf{y}}$ が次の摂動効用型の式を最大化することを示した。

$$\max_{\tilde{\mathbf{y}} \in \mathcal{M}} \sum_{j,k} \tilde{y}_{j,k} u_{j,k}(x_{j,k}) + \sum_{j,k} \tilde{y}_{j,k} \varepsilon_{j,k} \quad (28)$$

²¹ ARUM の期待最大効用 $W(\mathbf{v}) = \int \max_{j \in \mathcal{J}} \{v_j + \varepsilon_j\} g(\varepsilon) d\varepsilon$ の対数変換として定義される関数 $F^*(\mathbf{v}) = e^{W(\mathbf{v})}$ に対し、二次導関数 $\nabla^2 F^*(\mathbf{v})$ が存在しかつそれが正定であるとき、凸共役の理論⁸⁸⁾ より式 (26) が式 (21) と等価であることが証明されている。

²² 観光交通行動への BCM の適用例として福田・森地⁹⁰⁾ がある。

²³ 各プレイヤーの効用が貨幣などのやり取りを通じてプレイヤー間で譲渡できるとき、それを譲渡可能な効用という。

ここで \mathcal{M} は起こりうるマッチングパターンを表す行列の集合である。

f) 合理的不注意 (Rational Inattention: RI) モデル

人間の限定合理性として不完全情報の状況を考える。人の情報処理能力には限界があり、情報処理に要するコストの存在は不確実性下での意思決定にも影響すると考える意思決定論の代表例が、Sims⁹³⁾ の合理的不注意 (RI) 仮説である。これは、情報の蓄積によって生じるエントロピーがある閾値を超えたときに経済主体が情報獲得に動くという仮説であり、主にマクロ経済学で進展してきた。人々が合理的に不注意になる状況を説明する理論である。

Matějka and McKay⁹⁴⁾ は、相対エントロピーが相互情報量を表しているという見地から、RI に基づく情報獲得の影響を考慮した不確実性下での MNL 型離散選択モデルを構築した。さらに Fosgerau et al.⁹⁵⁾ は、任意の ARUM と RI モデルの数理的な等価性を証明した。例えば MNL 型の RI モデルは、変分問題として次のように定式化される。

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^*(\mathbf{v}) &= \max_{\mathbf{q} \in \Delta} \{ \mathbb{E}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \lambda \times \text{Information Cost (IC)} \} \\ &= \max_{\mathbf{q} \in \Delta} \left\{ \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \left\{ \mathbf{q}(\mathbf{v}) [\mathbf{v} + \lambda \ln \mathbf{q}^0] - \lambda \mathbf{q}(\mathbf{v}) \ln \mathbf{q}(\mathbf{v}) \right\} \mu(\mathbf{v}) \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

ここで λ は情報獲得コスト (IC) の相対的重要度を表す非負のパラメータ、 \mathbf{A} はランダムなアクションを表す基底ベクトル、 $\mu(\mathbf{v})$ は \mathbf{v} の確率測度、 \mathbf{p}_0 は各選択肢の事前確率ベクトルを表す。

この最適化問題の解は次のように与えられる。

$$p_j^*(\mathbf{v}) = \frac{p_j^0 e^{v_j/\lambda}}{\sum_{j'=1}^J p_{j'}^0 e^{v_{j'}/\lambda}} = \frac{e^{(v_j + \log p_j^0)/\lambda}}{\sum_{j'=1}^J e^{(v_{j'} + \log p_{j'}^0)/\lambda}}, \quad \forall j \in J \quad (30)$$

これは、MNL の各効用ベクトル $v_j, j = 1, \dots, J$ がそれぞれ $\ln p_j^0$ だけシフトした確定効用に基づく MNL モデルと解釈することができる。

Matějka and McKay⁹⁴⁾ は、有名な「赤バス-青バス」問題⁹⁶⁾ を例に RI モデルの簡単な数値例を示し、状態が不確実な選択肢 (赤バスと青バス) に関する情報獲得コストが選択行動に及ぼす影響を考察している。

g) 故意なランダム選択 (Deliberate Randomization)

真の選好を引き出すような適切な制度設計 (メカニズムデザインなど) がなされていない状況では、人々は敢えて自分の選択をランダムに決めたりする状況が生じる。例えば Nikhil and Paulo⁹⁷⁾ は、米国の学校選択制においてそのような戦略的状況が起こりうることを実証的に示している。このような状況では、人々では真の選好だけで意思決定を行わず、故意に何らかのランダムな選択を行っている (すなわち、ランダム性そ

のものへの何らかの嗜好も兼ね備えている) と解釈することができる。

PUM の枠組においても, そうした“故意なランダムネスへの嗜好”を凸関数 F で定式化することでモデル化することができる³⁰⁾。

h) ゼロ確率の選択肢の考慮

MNL 等をはじめとする ARUM 型の離散選択モデルでは, 通常, 選択肢集合内のいずれの選択肢についても選択確率が必ず 0 より大きくなる。これに対し, PUM では, 一部の選択肢のみが正の選択確率を持つことを表現することが可能となっている。

そのような一つの具体例として, 摂動関数が \mathbf{q} に関する二次形式の場合には, 選択確率が 0 となる選択肢も選択肢集合に含まれるようなモデルを記述することが可能である^{30),87)}。

(3) 共役性概念に基づく統一的理解

PUM は数理最適化における凸共役 (付録 c) 参照) の概念を用いることで, ARUM, 選択確率, 期待最大効用などとの理論的関連付けを明確にすることができる。MNL に関しては, この考え方自体は宮城・小川³¹⁾ によってエントロピーモデルとロジットモデルの関連性が示されていたが, 近年 Fosgerau et al.⁹⁸⁾ による一般化逆需要ロジット (Generalized Inverse Logit: GIL) によって一般的なエントロピー尺度 (Generalized Entropy) のもとでより広いクラスの離散選択モデルの導出と, シェア型の需要関数の推計方法の構築がなされている。本節では, まず MNL についての共役性を改めて整理した上で, GIL の枠組に共役性概念を適用することでより統一的な理解を試みる。

a) ARUM-Logit と PUM-Shannon Entropy

いわゆる加法型ランダム効用モデル (ARUM)³⁴⁾ は, 確率効用のベクトル場が $u_j = v_j + \epsilon_j, \forall j \in \mathcal{J}$ として定義されるものである。このときランダム項 ϵ がどんな確率分布であるかに関わらず, 選択肢 j の選択確率は $p_j(\mathbf{v}) = \Pr(v_j + \epsilon_j = \max_k \{v_k + \epsilon_k \mid k \in \mathcal{J}\}), \forall j \in \mathcal{J}$ によって与えることができる。また, 消費者のお得感を表す余剰関数 (Surplus Function)²⁴⁾ は一般に期待最大効用で表すことができ, $G(\mathbf{v}) = E(\max_{j \in \mathcal{J}} u_j)$ と表される^{100)–102)}。さらに, 離散選択型需要関数における Roy の恒等式に相当する Williams-Daly-Zachary (WDZ) 定理^{103),104)} より, 任意の ARUM において余剰関数の勾配ベクトルが選択確率ベクトルを与えることも知られている。これらは, あらゆる ARUM に共通の性質である。

ここで, ARUM の確率項としてガンベル分布を仮定すると, 選択確率式は MNL に, 余剰関数はログサム式で表

され, ログサム式の確定効用による偏微分が MNL を与えることもよく知られている。また, 余剰関数から ARUM を構成するアプローチもよく知られ, McFadden¹⁰¹⁾ のいわゆる G 関数から, GEV (Generalized Extreme Value) モデルの系譜の諸モデル (NL, Cross Nested Logit, Paired Combinatorial Logit, Ordered GEV 等) が導出される。

一方, 共役性理論より, MNL モデルの期待最大効用 (余剰関数)²⁵⁾ $G(\mathbf{v}) = E(\max_{j \in \mathcal{J}} u_j) = \ln(\sum_{j \in \mathcal{J}} e^{\delta_j})$ の凸共役関数は, シヤノン・エントロピー (の -1 倍) $G^*(\mathbf{q}) = \sum_{j \in \mathcal{J}} q_j \ln q_j$ として与えられる^{32),81)}。また先述³¹⁾ の通り, シヤノン・エントロピー型 PU を持つ代表的消費者の効用最大化問題の最適解として得られるシェア型需要関数は MNL になる²⁶⁾。さらに, シヤノン・エントロピー型 PU の一階偏微分は確定効用ベクトル (をある定数ベクトル分だけシフトさせたベクトル) になることも示されている。

以上のように, 共役性概念を通して, ARUM-Logit と PUM-Shannon Entropy が一貫した体系として構成されることが分かる (図-2)。

b) GIL と PUM-Generalized Entropy

Fosgerau et al.¹⁰⁵⁾ 及び Fosgerau et al.⁹⁸⁾ (以降“FMD”と略記) は, ARUM と PUM の間の双対関係に着目し, 図-2 の関係を特殊ケースとして包含する Generalized Inverse Logit (GIL) と Generalized Entropy (GE) の体系を構築した (図-3)。これにより, GE を起点としてより広義のクラスの離散選択モデルを導出できる可能性を示すと共に, 応用マイクロ経済学や実証産業組織論において近年展開が進む製品差別化された財市場におけるマーケットシェア推定問題に, より一般的かつ効率的なパラメータ推定方法を提示している。またその一部は交通行動分析の問題に対しても適用が可能である。

FMD⁹⁸⁾ に準拠しモデルを示す。製品差別化された財市場の分析を念頭に, 商品を購入していないという行動を表す外部財 (outside goods) を記号 0 で明示し, 選択肢集合 \mathcal{J} には $j = 0, 1, \dots, J$ の $J+1$ 個の選択肢が含まれると考える²⁷⁾。財 j の市場シェアを s_j としたとき, GIL は次のように書き表すことができる。

$$\ln G_j(\mathbf{s}) = v_j - c, \quad j \in \mathcal{J} \quad (31)$$

ここで, Flexible Generator¹⁰⁵⁾ と呼ばれる関数 \mathbf{G} は, $\mathbf{G}: (0, \infty)^{J+1} \rightarrow (0, \infty)^{J+1}$ である多変量関数であり, (i) \mathbf{G} が一次同次性であること, (ii) $\ln \mathbf{G}$ のヤコビ行列が正定かつ対称であることが仮定されている。また, 確定効用ベクトル²⁸⁾ \mathbf{v} にはその市場固有定数 $c \in \mathbb{R}$ が加えら

²⁵⁾ McFadden¹⁰¹⁾ では, $\ln G(e^{\mathbf{v}}) = E(\max_{j \in \mathcal{J}} u_j)$ と定義されていることに留意されたい。

²⁶⁾ $G(\mathbf{v}) + G^*(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^T \mathbf{v}$ が常に成り立つことも示されている³¹⁾。

²⁷⁾ パラメータ推定を検討しない場合には, 外部財を除外したこれまでの分析枠組のまま議論を進めても一般性は失われない。

²⁸⁾ 実証産業組織論ではインデックスベクトルとも呼ばれる。但し

²⁴⁾ 選択確率生成関数 (Choice Probability Generating Function: CPGF) と呼ばれることもある⁹⁹⁾。

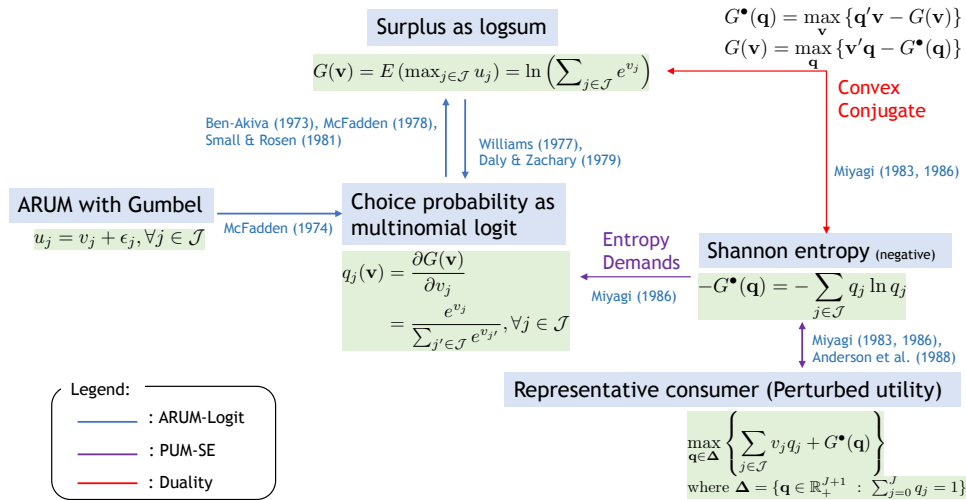


図-2 ARUM-Logit と PUM-Shannon Entropy の構成

れていることにも留意されたい。例えば $G_j(\mathbf{s}) = s_j$, すなわち $\ln s_j = v_j - c, j \in \mathcal{J}$ である場合には, 需要関数は MNL に等価になることが容易に確認できる。

標準的な ARUM では余剰関数に基づいて様々な確率的選択モデル (需要モデル) が導出されてきたのに対し, GIL の枠組では余剰関数と凸共役関係にある関数 G に基づいて様々な離散選択型の需要モデルを構築することが可能となる。また, G の引数が市場シェアであることから, $\ln G$ は逆需要関数と見立てられる²⁹。

関数 G の重要な特性の一つはその可逆性である。これまで製品差別化された市場財シェアの代表的な推計モデル¹⁰⁶⁾において, MNL と NL の場合に限り閉じた逆需要関数が存在することが示されていたが, 式 (31) の G は緩い条件下で Closed-Form の逆関数を持つことが示されている (**Proposition 1** in FMD⁹⁸⁾)。その逆関数を $\mathbf{H} = \mathbf{G}^{-1}$ で表そう。このとき一般化されたシェア型需要関数 $\sigma_j(\mathbf{v})$ 及び余剰関数 CS がそれぞれ次式で与えられる (**Proposition 2** in FMD⁹⁸⁾)。

$$s_j = \sigma_j(\mathbf{v}) = \frac{H_j(e^{\mathbf{v}})}{\sum_{k \in \mathcal{J}} H_k(e^{\mathbf{v}})}, j \in \mathcal{J} \quad (32)$$

$$CS(\mathbf{v}) = \ln \left(\sum_{k \in \mathcal{J}} H_k(e^{\mathbf{v}}) \right) \quad (33)$$

式 (32) は MNL を一般化したもの, 式 (33) はログサム変数を一般化したものであることが容易に確認できる。また, シェアの総和が 1 に等しいという性質から, 式 (31) における定数 c は余剰関数に等しい ($c = CS(\mathbf{v})$) ことも証明される。

GIL では, インデックスベクトルにおけるランダム係数 (すなわち非観測異質性) は仮定しない (no mixing assumption).
²⁹ これが Generalized “Inverse” Logit の由来となっている。

c) PUM による代表的消費者モデルとしての定式化

GIL モデルは, PUM の枠組の中で代表的消費者の効用最大化問題としても定式化することができる。そのために, 財 j の価格を p_j , 合成財の消費量を z , 所得 y の限界効用を α で表そう。所得が財価格に比べて十分に大きいとき, 代表的消費者の直接効用関数を次式で定式化する。

$$\max_{\mathbf{s}, z} \left\{ \alpha z + \sum_{j \in \mathcal{J}} v_j s_j - \sum_{j \in \mathcal{J}} s_j \ln G_j(\mathbf{s}) \right\} \quad (34)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j s_j + z \leq y \quad \text{and} \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} s_j = 1 \quad (35)$$

これは, 摂動効用関数 F を次式で定義される一般化エントロピー関数:

$$F(\mathbf{s}) = \Omega(\mathbf{s}) = \mathbf{s}' \ln G(\mathbf{s}) \quad (36)$$

で与えた摂動効用関数の最大化問題と解釈することが可能である。

また, 式 (33) の一般化余剰関数と式 (34) の一般化エントロピー関数が, MNL におけるログサム変数とシャノン・エントロピー関数の関係のように, 凸共役の関係にあることも示されている (図-3)。

d) ARUM との一致性

任意の ARUM において余剰関数が期待最大効用で表されること, さらにその期待最大効用のインデックスベクトルによる偏微分が選択確率を与えること (WDZ 定理) をそのまま援用することにより, ARUM は GIL であることが証明されている (**Proposition 5** in FMD⁹⁸⁾)。一方, 全ての GIL が ARUM とならない点にも留意されたい。これは, ARUM が一般に代替財しか取り扱えないのに対し, 一部の GIL は補完財も取り扱うことができるためである (**Proposition 3** in FMD⁹⁸⁾)。

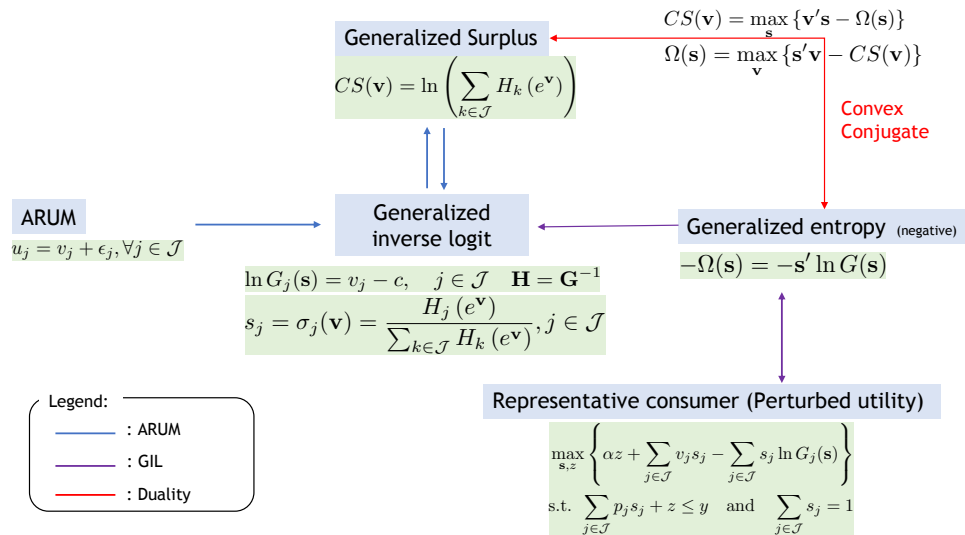


図-3 ARUM と PUM-Generalized Entropy の構成

(4) 需要関数のパラメータ推定

GIL による需要関数のモデル化は、実証的産業組織論における製品差別化された財のシェア推定の代表的手法である BLP (Berry-Levinsohn-Pakes) アプローチ¹⁰⁶⁾ 30 に代わり、より効率的にパラメータを推定できるような計量経済モデルを提供しうる。

今、添字 t により製品市場を表すものとする ($t = 1, \dots, T$)。また各製品 j は D 種類の製品特性 ($d = 1, \dots, D$) によってセグメント分けすることができるものとする。これは NL を特殊ケースとして包含するような選択肢の代替/補完パターンを考慮可能なグルーピング構造である。このとき、式(31)の GIL の特殊ケースとして、Fosgerau et al.⁹⁸⁾ は、次の IPDL (Inverse Product Differentiation Logit) モデルを提案している。

$$\ln G_j(\mathbf{s}_t; \boldsymbol{\theta}) = \left(1 - \sum_{d=1}^D \mu_d \right) \ln(s_{jt}) + \sum_{d=1}^D \mu_d \ln \left(\sum_{k \in \mathcal{G}_d(j)} s_{kt} \right) \quad (37)$$

ここで、 $\boldsymbol{\theta} \equiv (\mu_1, \dots, \mu_D)$ は、 $\sum_{d=1}^D \mu_d < 1$ かつ $\mu_d \geq 0, d = 1, \dots, D$ であるようなネストパラメータ、 $\mathcal{G}_d(j)$ は財特性 d に基づく製品 j の帰属するグループを表している。但し、外部財に関しては、それ一つで一つのグループを構成するものと仮定する。すなわち、

$$\ln G_0(\mathbf{s}_t; \boldsymbol{\theta}) = \ln(s_{0t}). \quad (38)$$

IPDL は Nested Logit 型の BLP モデルをその特殊ケースとして包含する (製品のグルーピング $\mathcal{G}_d(j)$ が階層構造によってのみなされる場合に相当) 需要モデルである。しかしながら IPDL は、製品どうしの補完性や代替性を柔軟に表すことが可能なモデル構造となっており、その意味で NL よりも広義のモデルと言える。Fosgerau et al.⁹⁸⁾ では、需要シェア s_t とネストパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の間

の大小関係により、IPGL により財の間の代替・補完の多様なパターンが表現可能であることを確認している。

実際のパラメータ推定は、BLP と同様に価格変数 p_{jt} 及び相対マーケットシェア $\ln \left(\frac{s_{jt}}{\sum_{k \in \mathcal{G}_d(j)} s_{kt}} \right)$ と観察不可能な属性 ξ_{jt} との間内生性を考慮し、操作変数法が適用される。推定のための回帰式は以下のとおりである。

$$\ln \left(\frac{s_{jt}}{s_{0t}} \right) = \mathbf{x}_{jt} \boldsymbol{\beta} - \alpha p_{jt} + \sum_{d=1}^D \mu_d \ln \left(\frac{s_{jt}}{\sum_{k \in \mathcal{G}_d(j)} s_{kt}} \right) + \xi_{jt} \quad (39)$$

これが外部財以外の全ての製品 $j = 1, \dots, J$ 及び分析対象となるマーケット $t = 1, \dots, T$ に対して成り立つ。式(39)からも明らかなように、これは、全ての未知パラメータに関して線形回帰式となっている。すなわち MXL を対象とした BLP¹⁰⁶⁾ とは異なり、パラメータ推定では複雑な構造推定の計算を必要としない。

さらに Nielsen et al.⁸⁷⁾ では、上述の例のように逆需要関数が陽に求まるような構造の PUM を対象に、BLP のような複雑な構造推定の数値計算を必要としない、繰り返し重み再調整最小二乗法による計算効率性の高いパラメータ推定手法を開発している。

(5) 交通行動分析への適用

以上概説したように、摂動効用に基づく離散選択モデルは、ランダム効用モデルを包含するより広いクラスのモデルであり、財の間の代替性や補完性の構造を柔軟に考慮すると共に、バラエティ嗜好や意思決定の様々な限定合理性の側面を統一的な枠組で記述可能な理論体系である。まだ数は少ないが交通行動分析への適用事例も見られており、それらを紹介する。

a) 経路選択モデルのパラメータ推定

Fosgerau et al.¹⁰⁹⁾ では、ネットワーク上の旅行者の移動効用を式(21)の摂動効用の形でモデル化した経路選

³⁰ BLP アプローチの実務者向け解説として Nevo¹⁰⁷⁾ がある。また、和文の解説書として楠田¹⁰⁸⁾ がある。

択モデルを構築している。PUM の第一項は移動そのものに起因する不効用に基いて特定化しており、走行距離に比例して不効用が増大していく状況を線形関数で表している。他方、第二項の摂動関数は次のような凸関数により特定化している。

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{L}' \{(\mathbf{1} + \mathbf{x}) \circ \ln(\mathbf{1} + \mathbf{x}) - \mathbf{x}\} \quad (40)$$

ここで \mathbf{x} はリンクフローベクトル、 \mathbf{L} は各リンク長のベクトル、 $\mathbf{1}$ は全要素が 1 のベクトル、演算 $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ はベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} の要素毎の積から成るベクトルを表す。

このモデルは、(1) プローブ等の経路選択観測データを用いて最小二乗法による効率的な推定が可能、(2) 確率的な経路交通量配分が可能であるにも関わらず、一部の経路におけるゼロ・フローも考慮可能、(3) リンクフロー表現とパスフロー表現の等価性、(4) 選択枝列挙が不要といった好ましい性質を兼ね備えている。

b) First-Best 混雑課金

Kaneko et al.¹¹⁰⁾ では、リンクベースの経路選択交通行動モデルとして適用事例が増えつつある Recursive Logit (RL) モデル¹¹¹⁾ を経路長の相違に伴うランダム項の異分散性を考慮可能な形に拡張した上で、混雑した交通ネットワーク上におけるマルコフ交通均衡 (Markovian Traffic Equilibrium)¹¹²⁾ の状況における最適混雑課金を導出している。ネットワーク全体における旅行者全体の総効用をリンクベースの PUM タイプの関数で示し、その最大化問題の解が、リンクベースの経路選択モデルにおける旅行時間の項に各リンク交通量の社会的限界費用を加算して新たに構成したコスト関数のもとでのマルコフ交通均衡状態に等価であることを示すとともに、動的計画法の価値観数をベースとした効率的な均衡計算方法を提示している。

c) 旅行時間信頼性評価

Fosgerau and Jiang¹¹³⁾ は、先述の合理的不注意 (RI) モデルに基づき、旅行時間が確率的に変動する状況下における旅行者の情報獲得戦略を明示的に考慮した出発時刻選択モデルを構築し、従来型の期待効用最大化タイプの行動モデル^{57),114),115)} と比べて時間信頼性価値がどのように変化しうるのかの理論分析を行っている。(2) f) で示した MNL 型の RI モデル⁹⁴⁾ に基づいた解析より、旅行時間変動の限界費用は常に正となることや、情報獲得の単位費用が増加するに伴って旅行者の利得が低下することなどを明らかにしている。

また Jiang et al.¹¹⁶⁾ では、道路容量が確率的に変動する状況下において旅行者の経路選択行動が RI モデルに従うことを仮定した確率的利用者均衡配分モデルを構築している。その結果、幾つかの特定の状況下においては、より多くの情報を獲得することで社会的厚生が低下する場合もあることを示唆している。

4. おわりに

以上概説してきたように、本論文では、特に異質性と摂動性の観点から、近年の離散選択モデルの開発動向を体系的に整理し、現在の State-of-Art を明らかにすることを試みた。無論、離散選択モデルひいてはそれを援用した交通行動分析、交通ネットワーク分析、空間選択分析等の応用分野においては、異質性や摂動性以外のさまざまな研究課題が残されている。本節では、レビューの総括を行うとともに、筆者らが重要と考える今後の関連研究の展望について論じる。

(1) レビューの総括

a) 異質性に関して

個人間・個人内の異質性に関しては、MXL を基軸とする様々な Mixture 型モデル、あるいは、よりデータオリエンテッドなセミ・ノンパラメトリック計量経済モデルの活用により、交通時間節約価値をはじめとする交通や環境に対する限界価値の母集団分布を非常にきめ細かく推計することができることが確認された。特に、SP 調査を適切に設計することにより、標準的な Preference Space での推計ではなく、より直接的な WTP Space での価値推計が可能となっており、交通プロジェクト評価の費用便益分析の実務でも、北欧諸国を中心にそうした最新の推計手法に基づいて得られた原単位が利用されている^{24),62)}。

城間ら³⁸⁾ でも指摘したように、筆者らは、そうした個人単位での緻密な分析がなされることの主な意義は二つあると考えている。第一は、プロジェクト評価の上で最終的に便益という形で一元化がなされるとしても、“個人間の同質性を予め仮定して推計した単一の時間価値”と“個人間の異質性を前提として推計した時間価値分布から得られた(平均値等の)代表値”との間には、無視できない有意な乖離が存在し得るという、推計精度上の理由である。第二は、貨幣価値原単位等の個人間異質性を明示的に考慮することで、より差別化された交通政策(混雑課金等)における主体間の公平性や所得逆進性の検討、時間価値の差異を考慮したより効率性の高い個別マーケティング的な交通政策の検討など、より発展的な交通需要マネジメント政策の評価へと展開することが期待されるからである。

その一方で、個人内異質性に関して見ると、その適用事例自体が少なく、予測性能においても(計算コストの割に)その影響度が小さいという指摘も一部には見られる。例えば、Krueger et al.¹¹⁷⁾ では、個人内異質性を考慮する場合としない場合で予測性能はさほど変わらず、計算負荷が大幅に増加するコストの方が大きいことを示唆している。また、Hess and Train¹¹⁸⁾ では、

個人間・個人内の異質性を考慮したモデルでは、信頼性の高い推定値を得るためにはかなりのサンプル数が必要であることが示唆されている。しかしながら、いずれの示唆も仮想データに基づく指摘である。一人十色とも言うべき嗜好の多様性が広がる今日、同一個人から長期で観測される実行データの利用を念頭に置いたオンライン型のレコメンダーシステム^{119),120)}等における行動モデルの適用可能性は高いと期待され、実証分析を積み重ねることが望まれる。

b) 摂動性に関して

レビューでも詳述したとおり、摂動効用モデル(PUM)はその特殊ケースとして加法型ランダム効用モデル(ARUM)を包含している。PUMの応用場面としては、(1) 応用都市経済(CUE)モデル等における代表的消費者の選択特性のより柔軟な記述、(2) 不確実性下での人間の意思決定行動の直接的記述、(3) 大規模な交通行動モデリングにおけるパラメータ推定や均衡計算の効率化などが考えられる。

まず(1)に関して、標準的なCUEモデル(例えばUeda et al.¹²¹⁾)では、立地空間を離散選択肢とみなし、シャノン・エントロピー型のPUMによって代表的世帯の立地選択効用を特定化しMNL型の立地選択確率を導出するという手順が採られている。但しMNLであることから、立地空間どうしの空間相関等は考慮されない。先述の通り、GILの枠組はMNLやNLを包含したより広義の離散選択モデルを導出できることから、空間選択肢間の相互依存性を柔軟に考慮可能なモデルへの展開などが期待される。

次に(2)に関して、PUMはRIをはじめとする人間行動のさまざまな限定合理的な側面を直接的に記述することができる。確かにARUMも「確率的」な選択モデルであるが、その背後にある大前提は(新古典派経済学の意味での)意思決定主体の合理性である³¹。これに対し、RIなどの限定合理的な行動モデルは、「消費者が全ての情報を把握できるわけではないこと」や「意思決定者“自身”が確率的な選択行動を“取っている”こと」を前提としたモデルである。特に摂動関数としてよく用いられる(相対)エントロピー型の関数を用いると、相互情報量という観点から、情報獲得の影響を考慮した不確実性下での離散選択モデルの理論的基礎を与え

ることができると考えられる。これは、旅行時間信頼性や交通情報提供など、不確実性を伴う交通行動分析への適用が期待される。

最後に(3)に関して、IPDLモデルのように逆需要関数が陽に求められ、推定を簡単な線形回帰に帰着させることができるという特徴は、一部の摂動効用モデルが持つ優れた性質であると考えられる。その場合、個人の非集計的な選択行動ではなくマーケット全体のシェアを直接推計することになるが、今日では様々な交通ビッグデータが何らかの集計された形で提供されることが多く、そうした大量集計データに基づく交通需要関数の推定において摂動効用モデル型のアプローチが有効活用できる可能性が考えられる。また、Fosgerau et al.¹⁰⁹⁾の例で紹介したように、選択肢列挙を必要とせず、かつ、RLモデル¹¹¹⁾のような複雑な構造推定計算を必要としない動的離散選択モデルのパラメータ推定手法の進展は、実務における活用可能性も高いと考えられる。

(2) 今後の展望

最後に、異質性や摂動性の観点に限定せず、これからの行動モデルの展望や活用可能性についての筆者らの見解を俯瞰的に示して、本論文を結びたい。

a) 因果推論への活用

交通インフラ整備の事後評価における統計的因果推論¹²²⁾の適用事例が徐々に増えつつある。しかしながら、その多くは、連続量のアウトカム変数を対象とした線形回帰ベースの因果推論が中心のように思われる。これに対し、分布交通量や経路交通量のパターンの変化のような“シェア”変数に着目した事後評価の事例は少ない。MXLモデルはパネルデータに対しても個体固有の効果をランダム効果として考慮できるため、よりエビデンスレベルの高い因果推論を行うことが可能である(例えば城間・福田¹²³⁾)。そのような研究事例のさらなる蓄積が望まれる。

b) 機械学習分野との連携・融合

これまでの個人間・個人間異質性を考慮した離散選択モデルは、主に選好指標の母集団分布を推計するために用いられてきた。そうした個人レベルの離散選択モデルがレコメンダーシステムに適している可能性については既に言及したが、交通需要マネジメントを対象として同一個人の選好が動的に変わりうる状況を考慮した協調フィルタリングタイプの行動モデル¹²⁴⁾も開発されつつある。機械学習分野で進む個人単位での交通行動予測や個人とその個人が置かれた状況に依存した行動推奨システムとの連携・融合の機会が高まることが期待される。

³¹ ARUM型の離散選択モデルの代表的な和書教科書である交通工学研究会²⁾や土木学会³⁾では、ARUMにおける誤差項の意味解釈についての詳しい説明は見られない。一方、離散選択モデルによる交通需要分析の世界的教科書であるBen-Akiva and Lerman¹⁾では、ARUMにおける誤差項がもたらすランダムネスの源泉を、(1) Unobserved attributes, (2) Unobserved taste variations, (3) Measurement errors and imperfect information, (4) Instrumental (or proxy) variablesの四つであるとしている。そして、(意思決定者本人にとってではなく)分析者にとってこれらの要因が未知であることから、意思決定者の行動が“分析者”側からは確率的な選択行動に“見える”という解釈を行っている。

c) 個人単位での詳細な政策評価

行動モデルのパラメータ推定結果から直接的に分かることは異質性の母集団分布（時間価値分布など）であり、さらにそこから個人単位での政策介入の経済便益等を同定するためには、どのようなデータセットや推定の条件が必要であるかを理論的に明らかにする必要がある。近年、個人単位での便益推計と便益の母集団分布の識別可能条件に関する研究^{125),126)}等も行われつつあり、さらなる展開が期待される。

d) 動的な行動モデルへの展開

Recursive Logit を特殊ケースとして包含する動的離散選択モデル¹²⁷⁾は、近年我が国でも交通行動分析の適用事例¹²⁸⁾⁻¹³⁰⁾が増えているが、先述のとおり構造推定の過程で複雑な価値関数の数値計算を含む場合が多い。この課題を回避するために、条件付き選択確率から価値関数を求めるための逆像を近似するアプローチ¹³¹⁾が1990年代から提唱されているが、摂動効用モデルの分析で用いた凸共役性の概念を援用することでこの計算を効率化する方法¹³²⁾も開発されており、応用分析の蓄積が待たれる。

e) 不確実性下での選択行動の実証分析

PUM は意思決定者の選択が本源的に限定合理的・確率的であることを記述できるモデルであるが、実証研究はまだ少ない。出発時刻選択や経路選択における旅行時間信頼性分析¹³³⁾や情報提供の影響分析¹³⁴⁾等を中心に、不確実性下での選択行動に関する実証的知見がさらに蓄積されることを期待したい。

謝辞: 招待講演という身に余る機会を与えて頂いた土木計画学研究委員会に、心よりお礼申し上げます。

本論文の内容を取りまとめるにあたり、特に Mogens Fosgerau 氏（コペンハーゲン大学経済学部教授）とは、第一著者が2007~2008年にデンマーク工科大学に在外研究員として滞在して以来今日に至るまで、共同研究等を通じて交通経済学、計量経済学、数理統計学に関する研究上の様々な意見交換を継続させて頂くと共に、氏の独創的かつ広範に及ぶ研究から多くの知的刺激を受けています。本当にありがとうございます。

本論文の 2. (4) c) で紹介した内容は、大山雄己氏（芝浦工業大学准教授）との進行中の共同研究の一部成果です。掲載をご快諾頂いたことに感謝の意を表します。

また、本論文の 3. の内容は、2018 年、2019 年の“行動モデル夏の学校”（東京大学）において第一著者が発表した“行動モデルと双対概念”が契機となっています。行動モデルに関する研究上の様々な意見交換を長年行ってきた羽藤英二氏（東京大学教授）、佐々木邦明氏（早稲田大学教授）、山本俊行氏（名古屋大学教授）、

倉内慎也氏（愛媛大学准教授）、力石真氏（広島大学准教授）、柳沼秀樹氏（東京理科大学准教授）をはじめとする皆様に、この場をお借りして感謝の意を表します。

付録

a) 確率密度関数推定のための Legendre 多項式の拡張

Fosgerau and Bierlaire⁵³⁾に基づき、Legendre 多項式の概要と確率密度関数（または分位点関数）の近似のための拡張手順を紹介する。

k 次の Legendre 多項式は次のように定義される。

$$\widehat{L}_0(x) = 1, \quad \widehat{L}_1(x) = x,$$

(if $k \geq 2$)

$$\widehat{L}_k(x) = \{(2k-1)x\widehat{L}_{k-1}(x) - (k-1)\widehat{L}_{k-2}(x)\}k^{-1}.$$

この Legendre 多項式は、次のような直交性を有する。

$$\int_{-1}^1 \widehat{L}_m(x)\widehat{L}_k(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq k \\ 1 & \text{if } m = k \end{cases}$$

直交性は、多項式近似において起こりうる多重共線性の問題を大きく緩和させるというメリットを持つ。

分位点関数の近似を行うためには区間 $[0, 1]$ で直交する必要があるため、多項式を以下のように変換する¹³⁵⁾。

$$L_k(x) = \sqrt{2k+1}\widehat{L}_k(2x-1)$$

変換後の修正 Legendre 多項式は次のように表される。

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = \sqrt{3}(2x-1),$$

(if $k \geq 2$)

$$L_k(x) = \frac{\sqrt{4k^2-1}}{k}(2x-1)L_{k-1}(x) - \frac{(k-1)\sqrt{2k+1}}{k\sqrt{2k-3}}L_{k-2}(x).$$

このとき、以下のように直交性がやはり成り立つ。

$$\int_0^1 L_m(x)L_k(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq k \\ 1 & \text{if } m = k \end{cases}$$

b) Nadaraya-Watson 推定量による Kernel 回帰

$y = P(x) + \eta$ の関数 $P(\cdot)$ をノンパラメトリックに推定する方法を概説する (η は残差)。ある特定のデータポイント x_0 及びその周辺で y の観測値が多数存在したとき、観測データセット $(x_n, y_n) \ n = 1, \dots, N$ と予め定めた Kernel 関数 $K(\cdot)$ 及びバンド幅 h に対し、 x_0 に対応する y を次式で推計するのが Nadaraya-Watson 推定量（局所定数回帰）である⁵⁶⁾。

$$\widehat{P}(x_0) = \frac{\sum_{n=1}^N y_n K_h(x_n - x_0)}{\sum_{n=1}^N K_h(x_n - x_0)}$$

c) 凸共役関数の概要

拡大実数空間で値をとる関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に対する凸共役 (Convex Conjugate) 関数 $f^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ は、次のように定義される。

$$f^*(\mathbf{p}) = \sup\{\mathbf{p}'\mathbf{x} - f(\mathbf{x})\}$$

一次元の問題の場合、これは、傾き p の直線で $f(x)$ と交わるものの中で一番下側にあるもの（すなわち接線）の切片（を -1 倍したもの）と解釈することができる。

こうした変換は Fenchel 変換（または Legendre 変換）と呼ばれる。なお、そうしたグラフの接線 (f^*) を全て集めることができれば元のグラフ (f) を復元することができることから、凸共役関数の凸共役関数は元の関数 f になる（すなわち $f^{**} = f$ ）ことも分かる。

参考文献

- 1) Ben-Akiva, M. and Lerman, S. R.: *Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand*, MIT Press, Massachusetts, 1985.
- 2) 交通工学研究会（編）：やさしい非集計分析，丸善出版，1993.
- 3) 土木学会（編）：非集計行動モデルの理論と実際，土木学会，1995.
- 4) 屋井鉄雄：非集計行動モデルとその実用性，土木計画学研究・論文集，Vol. 3，pp. 23–39，1986.
- 5) 原田昇：Nested Logit モデルの理論と適用に関する研究のレビュー，土木学会論文集，Vol. 1985，No. 353，pp. 33–42，1985.
- 6) 原田昇：非集計行動モデルによる多次元選択行動の分析，土木計画学研究・論文集，Vol. 4，pp. 15–27，1986.
- 7) 原田昇，森川高行，屋井鉄雄：交通行動分析の展開と課題，土木学会論文集，Vol. 1993，No. 470，pp. 97–104，1993.
- 8) 森川高行：個人選択モデルの新展開と再構築，土木計画学研究・論文集，Vol. 12，pp. 15–27，1995.
- 9) 北村隆一：交通需要予測の課題：次世代手法の構築に向けて，土木学会論文集，Vol. 1996，No. 530，pp. 17–30，1996.
- 10) 羽藤英二：ネットワーク上の交通行動，土木計画学研究・論文集，Vol. 19，pp. 13–27，2002.
- 11) 兵藤哲朗，室町康徳：個人選択行動モデルの最近の開発動向に関するレビュー，土木計画学研究・論文集，Vol. 18，pp. 517–522，2001.
- 12) 福田大輔：交通行動分析の展開，土木学会日本土木史編集特別委員会（編）日本土木史（平成 3 年～平成 22 年），土木学会，pp. 1476–1477，2017.
- 13) 福田大輔，力石真：離散-連続モデルの研究動向に関するレビュー，土木学会論文集 D3（土木計画学），Vol. 69，No. 5，pp. I.497–I.510，2013.
- 14) 力石真，瀬谷創，福田大輔：社会的相互作用に着目したエビデンスベース研究の展開と土木計画への応用可能性，土木学会論文集 D3（土木計画学），Vol. 74，No. 5，pp. I.715–I.734，2018.
- 15) 福山祥代，羽藤英二：ネットワーク上の空間計画に向けた観測と行動モデルの展開，土木学会論文集 D3（土木計画学），Vol. 71，No. 5，pp. I.1–I.19，2015.
- 16) 張峻屹，杉恵頼寧，藤原章正：横断的及び縦断的異質性を考慮した交通選択行動ダイナミクスの表現，土木学会論文集，No. 765，pp. 3–15，2004.
- 17) McFadden, D.: Disaggregate behavioral travel demands RUM side: A 30-year retrospective, D. A., Hensher ed. *Travel Behaviour Research: The Leading Edge*, Pergamon, pp. 17–63, 2001.
- 18) Quandt, R.: *The Demand for Travel: Theory and Measurement*, Heath, Lexington, 1970.
- 19) McFadden, D. and Train, K.: Mixed MNL models for discrete response, *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 15, No. 5, pp. 447–470, 2000.
- 20) Train, K. E.: *Discrete Choice Methods with Simulation*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- 21) Small, K. A.: Valuation of travel time, *Economics of Transportation*, Vol. 1, No. 1, pp. 2–14, 2012.
- 22) Small, K. A., Winston, C. and Yan, J.: Uncovering the distribution of motorists' preferences for travel time and reliability, *Econometrica*, Vol. 73, No. 4, pp. 1367–1382, 2005.
- 23) Fosgerau, M.: Investigating the distribution of the value of travel time savings, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 40, No. 8, pp. 688–707, 2006.
- 24) Börjesson, M. and Eliasson, J.: Experiences from the Swedish value of time study, *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, Vol. 59, pp. 144–158, 2014.
- 25) de Jong, G., Kouwenhoven, M., Bates, J., Koster, P., Verhoef, E., Tavasszy, L. and Warffemius, P.: New SP-values of time and reliability for freight transport in the Netherlands, *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, Vol. 64, pp. 71–87, 2014.
- 26) Hess, S., Daly, A., Dekker, T., Cabral, M. O. and Batley, R.: A framework for capturing heterogeneity, heteroskedasticity, non-linearity, reference dependence and design artefacts in value of time research, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 96, pp. 126–149, 2017.
- 27) Samek, W., Montavon, G., Vedaldi, A., Hansen, L. K. and Müller, K.-R.: *Explainable AI: Interpreting, Explaining and Visualizing Deep Learning*, Springer Nature, 2019.
- 28) Strogatz, S. H.: ストロガッツ - 非線形ダイナミクスとカオス，丸善出版，2015.
- 29) Fudenberg, D., Iijima, R. and Strzalecki, T.: Stochastic choice and revealed perturbed utility, *Econometrica*, Vol. 83, No. 6, pp. 2371–2409, 2015.
- 30) Allen, R. and Rehbeck, J.: Identification with additively separable heterogeneity, *Econometrica*, Vol. 87, No. 3, pp. 1021–1054, 2019.
- 31) 宮城俊彦，小川俊幸：共役性概念に基づくロジットモデルのパラメータ推定法とその統計的検定について，土木計画学研究・論文集，Vol. 3，pp. 185–192，1986.
- 32) Miyagi, T.: On the formulation of a stochastic user equilibrium model consistent with the random utility theory – A conjugate dual approach, *Selectcd Proceedings of the Fourth World Conference on Transport Research*, Vol. 2, pp. 1619–1635, 1986.
- 33) Anderson, S. P., de Palma, A. and Thisse, J.-F.: A representative consumer theory of the logit model, *International Economic Review*, Vol. 29, No. 3, pp. 461–466, 1988.
- 34) McFadden, D.: Conditional logit analysis of qualitative choice behavior, P., Zarembka ed. *Frontiers in Econometrics*, New York, Academic Press, pp. 105–142, 1974.
- 35) Johnson, N. L.: Systems of frequency curves generated by methods of translation, *Biometrika*, Vol. 36, No. 1/2, pp. 149–176, 1949.
- 36) Hess, S., Bierlaire, M. and Polak, J. W.: Estimation of value of travel-time savings using mixed logit models, *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, Vol. 39, No. 2-3, pp. 221–236, 2005.
- 37) Train, K. and Sonnier, G.: Mixed logit with bounded distributions of correlated partworths, R., Scarpa and Alberini, A. eds. *Applications of Simulation Methods in Environmental and Resource Economics*, Dordrecht, Springer Netherlands, pp. 117–134, 2005.
- 38) 城間洋也，福田大輔，岡英紀，和泉範之：複数データを用いた時間価値分布推計：首都圏高速道路利用者を対象とした実証分析，土木学会論文集 D3（土木計画学），Vol. 75，No. 6，pp. I.405–I.414，2020.
- 39) Ferguson, T. S.: A Bayesian analysis of some nonparamet-

- ric problems, *The Annals of Statistics*, Vol. 1, No. 2, pp. 209–230, 1973.
- 40) Greene, W. H. and Hensher, D. A.: Revealing additional dimensions of preference heterogeneity in a latent class mixed multinomial logit model, *Applied Economics*, Vol. 45, No. 14, pp. 1897–1902, 2013.
 - 41) Fosgerau, M. and Hess, S.: A comparison of methods for representing random taste heterogeneity in discrete choice models, *European Transport-Transporti Europei*, Vol. 42, pp. 1–25, 2009.
 - 42) Keane, M. and Wasi, N.: Comparing alternative models of heterogeneity in consumer choice behavior, *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 28, No. 6, pp. 1018–1045, 2013.
 - 43) Daziano, R. A., Sarrias, M. and Leard, B.: Are consumers willing to pay to let cars drive for them? Analyzing response to autonomous vehicles, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol. 78, pp. 150–164, 2017.
 - 44) Train, K. E.: EM Algorithms for nonparametric estimation of mixing distributions, *Journal of Choice Modelling*, Vol. 1, No. 1, pp. 40–69, 2008.
 - 45) Train, K.: Mixed logit with a flexible mixing distribution, *Journal of Choice Modelling*, Vol. 19, pp. 40–53, 2016.
 - 46) Manski, C. F.: The structure of random utility models, *Theory and Decision*, Vol. 8, No. 3, pp. 229–254, 1977.
 - 47) 杉恵頼寧, 張峻屹, 藤原章正: 個人の異質性による交通機関選択モデルの構造分析, 土木計画学研究・論文集, Vol. 12, pp. 425–434, 1995.
 - 48) 西井和夫, 北村隆一, 近藤勝直, 弦間重彦: 観測されていない異質性を考慮した繰り返しデータに関するパラメータ推定法, 土木学会論文集, Vol. 1995, No. 506, pp. 25–33, 1995.
 - 49) Bansal, P., Daziano, R. A. and Achtnicht, M.: Extending the logit-mixed logit model for a combination of random and fixed parameters, *Journal of Choice Modelling*, Vol. 27, pp. 88–96, 2018.
 - 50) Chen, X.: Large sample sieve estimation of semiparametric models, J. J., Heckman and Leamer, E. E. eds. *Handbook of Econometrics*, Vol. 6A, Elsevier, pp. 5549–5632, 2007.
 - 51) Abe, M.: A generalized additive model for discrete-choice data, *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 17, No. 3, pp. 271–284, 1999.
 - 52) Fukuda, D. and Yai, T.: Semiparametric specification of the utility function in a travel mode choice model, *Transportation*, Vol. 37, No. 2, pp. 221–238, 2010.
 - 53) Fosgerau, M. and Bierlaire, M.: A practical test for the choice of mixing distribution in discrete choice models, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 41, No. 7, pp. 784–794, 2007.
 - 54) Fosgerau, M. and Mabit, S. L.: Easy and flexible mixture distributions, *Economics Letters*, Vol. 120, No. 2, pp. 206–210, 2013.
 - 55) Fleishman, A. I.: A method for simulating non-normal distributions, *Psychometrika*, Vol. 43, No. 4, pp. 521–532, 1978.
 - 56) Li, Q. and Racine, J. S.: *Nonparametric Econometrics*, Princeton University Press, Princeton, 2007.
 - 57) Fosgerau, M. and Fukuda, D.: Valuing travel time variability: Characteristics of the travel time distribution on an urban road, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol. 24, pp. 83–101, 2012.
 - 58) Train, K. and Weeks, M.: Discrete choice models in preference space and willingness-to-pay space, R., Scarpa and Alberini, A. eds. *Applications of Simulation Methods in Environmental and Resource Economics*, Dordrecht, Springer Netherlands, pp. 1–16, 2005.
 - 59) Daly, A., Hess, S. and Train, K.: Assuring finite moments for willingness to pay in random coefficient models, *Transportation*, Vol. 39, No. 1, pp. 19–31, 2012.
 - 60) Scarpa, R., Thiene, M. and Train, K.: Utility in willingness to pay space: A tool to address confounding random scale effects in destination choice to the Alps, *American Journal of Agricultural Economics*, Vol. 90, No. 4, pp. 994–1010, 2008.
 - 61) Ojeda-Cabral, M., Batley, R. and Hess, S.: The value of travel time: Random utility versus random valuation, *Transportmetrica A: Transport Science*, Vol. 12, No. 3, pp. 230–248, 2016.
 - 62) Fosgerau, M.: Using nonparametrics to specify a model to measure the value of travel time, *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, Vol. 41, No. 9, pp. 842–856, 2007.
 - 63) Klein, R. W. and Spady, R. H.: An efficient semiparametric estimator for binary response models, *Econometrica*, Vol. 61, No. 2, pp. 387–421, 1993.
 - 64) Fan, J., Heckman, N. E. and Wand, M. P.: Local polynomial kernel regression for generalized linear models and quasi-likelihood functions, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 90, No. 429, pp. 141–150, 1995.
 - 65) Fosgerau, M.: Specification testing of discrete choice models: A note on the use of a nonparametric test, *Journal of Choice Modelling*, Vol. 1, No. 1, pp. 26–39, 2008.
 - 66) 森川高行: ステイティッド・プリファレンス・データの交通需要予測モデルへの適用に関する整理と展望, 土木学会論文集, Vol. 1990, No. 413, pp. 9–18, 1990.
 - 67) Krueger, R., Rashidi, T. H. and Rose, J. M.: Preferences for shared autonomous vehicles, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol. 69, pp. 343–355, 2016.
 - 68) Abe, R., Kita, Y. and Fukuda, D.: An experimental approach to understanding the impacts of monitoring methods on use intentions for autonomous vehicle services: Survey evidence from Japan, *Sustainability*, Vol. 12, No. 6, p. 2157, 2020.
 - 69) Steck, F., Kolarova, V., Bahamonde-Birke, F., Trommer, S. and Lenz, B.: How autonomous driving may affect the value of travel time savings for commuting, *Transportation Research Record*, Vol. 2672, No. 46, pp. 11–20, 2018.
 - 70) Kolarova, V., Steck, F. and Bahamonde-Birke, F. J.: Assessing the effect of autonomous driving on value of travel time savings: A comparison between current and future preferences, *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, Vol. 129, pp. 155–169, 2019.
 - 71) Krueger, R., Rashidi, T. H. and Dixit, V. V.: Autonomous driving and residential location preferences: Evidence from a stated choice survey, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol. 108, pp. 255–268, 2019.
 - 72) Zhong, H., Li, W., Burris, M. W., Talebpour, A. and Sinha, K. C.: Will autonomous vehicles change auto commuters' value of travel time? *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, Vol. 83, p. 102303, 2020.
 - 73) Krueger, R., Rashidi, T. H. and Vij, A.: Semi-parametric hierarchical Bayes estimates of New Yorkers' willingness to pay for features of shared automated vehicle services, *arXiv:1907.09639*, 2019.
 - 74) Guidon, S., Wicki, M., Bernauer, T. and Axhausen, K.: Transportation service bundling – For whose benefit? Consumer valuation of pure bundling in the passenger transportation market, *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, Vol. 131, pp. 91–106, 2020.

- 75) Ho, C. Q., Hensher, D. A., Mulley, C. and Wong, Y. Z.: Potential uptake and willingness-to-pay for mobility as a service (MaaS): A stated choice study, *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, Vol. 117, pp. 302–318, 2018.
- 76) Ho, C. Q., Mulley, C. and Hensher, D. A.: Public preferences for mobility as a service: Insights from stated preference surveys, *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, Vol. 131, pp. 70–90, 2020.
- 77) Oyama, Y., Fukuda, D., Imura, N. and Nishinari, K.: Estimation of e-commerce users' preferences for delivery options, 2021.
- 78) Becker, F., Danaf, M., Song, X., Atasoy, B. and Ben-Akiva, M.: Bayesian estimator for logit mixtures with inter- and intra-consumer heterogeneity, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 117, pp. 1–17, 2018.
- 79) Krueger, R., Bansal, P., Bierlaire, M., Daziano, R. A. and Rashidi, T. H.: Variational Bayesian inference for mixed logit models with unobserved inter- and intra-individual heterogeneity, *arXiv:1905.00419*, 2020.
- 80) Bansal, P., Daziano, R. A. and Guerra, E.: Minorization-maximization (MM) algorithms for semiparametric logit models: Bottlenecks, extensions, and comparisons, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 115, pp. 17–40, 2018.
- 81) Miyagi, T.: Dual approach to the modal equilibrium problem, Working Paper 83-TE-MT2-5, Gifu University, 1983.
- 82) 宮城俊彦: ネスティッド・エントロピーモデルとその応用, *土木計画学研究・講演集*, Vol. 18, No. 2, pp. 163–166, 1995.
- 83) Verboven, F.: The nested logit model and representative consumer theory, *Economics Letters*, Vol. 50, No. 1, pp. 57–63, 1996.
- 84) Hofbauer, J. and Sandholm, W. H.: On the global convergence of stochastic fictitious play, *Econometrica*, Vol. 70, No. 6, pp. 2265–2294, 2002.
- 85) McFadden, D. L. and Fosgerau, M.: A theory of the perturbed consumer with general budgets, Working Paper 17953, National Bureau of Economic Research, 2012.
- 86) Shannon, C. E.: A mathematical theory of communication, *Bell System Technical Journal*, Vol. 27, No. 3, pp. 379–423, 1948.
- 87) Nielsen, N., Fosgerau, M. and Kristensen, D.: Estimation of perturbed utility models using demand inversion, 2021.
- 88) Rockafellar, R. T.: *Convex Analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 1970.
- 89) Gentzkow, M.: Valuing new goods in a model with complementarity: Online newspapers, *American Economic Review*, Vol. 97, No. 3, pp. 713–844, 2007.
- 90) 福田大輔, 森地茂: 選択行動間の相互依存性に着目した観光交通行動分析, *土木計画学研究・論文集*, Vol. 18, No. 3, pp. 553–561, 2001.
- 91) Fox, J. T., Yang, C. and Hsu, D. H.: Unobserved heterogeneity in matching games, *Journal of Political Economy*, Vol. 126, No. 4, pp. 1339–1373, 2018.
- 92) Allen, R. and Rehbeck, J.: Hicksian complementarity and perturbed utility models, *Economic Theory Bulletin*, Vol. 8, No. 2, pp. 245–261, 2020.
- 93) Sims, C. A.: Implications of rational inattention, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 50, No. 3, pp. 665–690, 2003.
- 94) Matějka, F. and McKay, A.: Rational inattention to discrete choices: A new foundation for the multinomial logit model, *American Economic Review*, Vol. 105, No. 1, pp. 272–298, 2015.
- 95) Fosgerau, M., Melo, E., de Palma, A. and Shum, M.: Discrete choice and rational inattention: A general equivalence result, *International Economic Review*, Vol. 61, No. 4, pp. 1569–1589, 2020.
- 96) Debreu, G.: Review of individual choice behavior by R. D. Luce, *American Economic Review*, Vol. 50, No. 1, pp. 186–188, 1960.
- 97) Nikhil, A. and Paulo, S.: Demand analysis using strategic reports: An application to a school choice mechanism, *Econometrica*, Vol. 86, No. 2, pp. 391–444, 2018.
- 98) Fosgerau, M., Monardo, J. and de Palma, A.: The inverse product differentiation logit model, Working Paper 3141041, Social Science Research Network, 2020.
- 99) Fosgerau, M., McFadden, D. and Bierlaire, M.: Choice probability generating functions, *Journal of Choice Modelling*, Vol. 8, pp. 1–18, 2013.
- 100) Ben-Akiva, M. E.: Structure of passenger travel demand models, Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 1973.
- 101) McFadden, D.: Modelling the choice of residential location, A., Karlquist, Snickars, F. and Weibull, J. eds. *Spatial Interaction Theory and Planning Models*, North Holland Amsterdam, pp. 75–96, 1978.
- 102) Small, K. A. and Rosen, H. S.: Applied welfare economics with discrete choice models, *Econometrica*, Vol. 49, No. 1, pp. 105–130, 1981.
- 103) Williams, H.: On the formation of travel demand models and economic evaluation measures of user benefit, *Environment and Planning A*, Vol. 9, No. 3, pp. 285–344, 1977.
- 104) Daly, A. and Zachary, S.: Improved multiple choice models, D., Hensher and Dalvi, Q. eds. *Determinants of Travel Choice*, Sussex, Saxon House, pp. 335–357, 1978.
- 105) Fosgerau, M., de Palma, A. and Monardo, J.: Demand models for differentiated products with complementarity and substitutability, Discussion Paper 18-02, Copenhagen University, 2018.
- 106) Berry, S., Levinsohn, J. and Pakes, A.: Automobile prices in market equilibrium, *Econometrica*, Vol. 63, No. 4, pp. 841–890, 1995.
- 107) Nevo, A.: A practitioner's guide to estimation of random-coefficients logit models of demand, *Journal of Economics and Management Strategy*, Vol. 9, No. 4, pp. 513–548, 2000.
- 108) 楠田康之: 経済分析のための構造推定アルゴリズム, 三恵社, 2019.
- 109) Fosgerau, M., Paulsen, M. and Rasmussen, T. K.: A perturbed utility route choice model, *arXiv:2103.13784*, 2021.
- 110) Kaneko, N., Fukuda, D. and Ge, Q.: Optimal congestion tolling problem under the Markovian traffic equilibrium, *International Symposium on Transportation Data and Modelling*, Michigan, 2021.
- 111) Fosgerau, M., Frejinger, E. and Karlström, A.: A link based network route choice model with unrestricted choice set, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 56, pp. 70–80, 2013.
- 112) Baillon, J.-B. and Cominetti, R.: Markovian traffic equilibrium, *Mathematical Programming Series B*, Vol. 111, No. 1-2, pp. 33–56, 2008.
- 113) Fosgerau, M. and Jiang, G.: Travel time variability and rational inattention, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 120, pp. 1–14, 2019.
- 114) Fosgerau, M. and Karlström, A.: The value of reliability, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 44, No. 1, pp. 38–49, 2010.
- 115) Fosgerau, M. and Engelson, L.: The value of travel time

- variance, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 45, No. 1, pp. 1–8, 2011.
- 116) Jiang, G., Fosgerau, M. and Lo, H. K.: Route choice, travel time variability, and rational inattention, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 132, pp. 188–207, 2020.
- 117) Krueger, R., Bierlaire, M., Daziano, R. A., Rashidi, T. H. and Bansal, P.: Evaluating the predictive abilities of mixed logit models with unobserved inter- and intra-individual heterogeneity, *Journal of Choice Modelling*, Vol. 41, p. 100323, 2021.
- 118) Hess, S. and Train, K. E.: Recovery of inter- and intra-personal heterogeneity using mixed logit models, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 45, No. 7, pp. 973–990, 2011.
- 119) Danaf, M., Becker, F., Song, X., Atasoy, B. and Ben-Akiva, M.: Online discrete choice models: Applications in personalized recommendations, *Decision Support Systems*, Vol. 119, pp. 35–45, 2019.
- 120) Xie, Y., Zhang, Y., Akkinipally, A. P. and Ben-Akiva, M.: Personalized choice model for managed lane travel behavior, *Transportation Research Record*, Vol. 2674, No. 7, pp. 442–455, 2020.
- 121) Ueda, T., Tsutsumi, M., Muto, S. and Yamasaki, K.: Unified computable urban economic model, *The Annals of Regional Science*, Vol. 50, No. 1, pp. 341–362, 2013.
- 122) 織田澤利守, 大平悠季: 交通インフラ整備効果の因果推論: 論点整理と展望, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol. 75, No. 5, pp. I.1–I.15, 2019.
- 123) 城間洋也, 福田大輔: 2016 年首都圏高速道路料金体系改定が交通需要に与えた影響, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol. 76, No. 2, pp. 180–195, 2020.
- 124) Zhu, X., Feng, J., Huang, S. and Chen, C.: An online updating method for time-varying preference learning, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol. 121, p. 102849, 2020.
- 125) Bhattacharya, D.: Nonparametric welfare analysis for discrete choice, *Econometrica*, Vol. 83, No. 2, pp. 617–649, 2015.
- 126) Hausman, J. A. and Newey, W. K.: Individual heterogeneity and average welfare, *Econometrica*, Vol. 84, No. 3, pp. 1225–1248, 2016.
- 127) Aguirregabiria, V. and Mira, P.: Dynamic discrete choice structural models: A survey, *Journal of Econometrics*, Vol. 156, No. 1, pp. 38–67, 2010.
- 128) 大山雄己, 羽藤英二: 観測誤差分散のリンク固有性に着目した経路選択モデルの構造推定, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol. 73, No. 5, pp. I.597–I.608, 2017.
- 129) 岡英紀, 力石真, 田名部淳, 福田大輔, 大口敬: 車種及び距離帯を考慮した貨物車経路選択行動のモデル分析, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol. 74, No. 5, pp. I.657–I.666, 2018.
- 130) 田淵景子, 福田大輔: 再帰ロジック型交通行動モデルを用いたサブスクリプション型 MaaS の評価に関する基礎的研究, 都市計画論文集, Vol. 55, No. 3, pp. 666–673, 2020.
- 131) Hotz, V. J. and Miller, R. A.: Conditional choice probabilities and the estimation of dynamic models, *Review of Economic Studies*, Vol. 60, No. 3, pp. 497–529, 1993.
- 132) Chiong, K. X., Galichon, A. and Shum, M.: Duality in dynamic discrete-choice models, *Quantitative Economics*, Vol. 7, No. 1, pp. 83–115, 2016.
- 133) 福田大輔: 旅行時間変動の価値付けに関する研究展望とプロジェクト評価への適用に向けた課題の整理, 土木計画学研究・論文集, Vol. 27, pp. 437–448, 2010.
- 134) Iwase, T., Tadokoro, Y. and Fukuda, D.: Self-fulfilling signal of an endogenous state in network congestion games, *Networks and Spatial Economics*, Vol. 17, No. 3, pp. 889–909, 2017.
- 135) Bierens, H. J.: Semi-nonparametric interval-censored mixed proportional hazard models: Identification and consistency results, *Econometric Theory*, Vol. 24, No. 3, pp. 749–794, 2008.

RECENT METHODOLOGICAL DEVELOPMENTS IN DISCRETE CHOICE ANALYSIS: A SURVEY ON HETEROGENEITY AND PERTURBED UTILITIES

Daisuke FUKUDA and Hiroya SHIROMA

This paper reviews recent methodological developments in discrete choice analysis and discusses related issues for their application to transport modeling and infrastructure planning. We especially focus on two development directions: (1) user heterogeneity, and (2) concepts of perturbed utility. For heterogeneity, we summarize some mixture models derived from mixed multinomial logit models and semi-nonparametric structures especially for empirical applications of estimating the distributions of users' marginal valuation of attributes. Regarding perturbed utility, the generalized entropy, convex conjugate and demand inversion would be the key concepts for comprehensively understanding the various aspects of discrete choices including bounded rationality. Finally we argue possible future research directions of choice modeling.