

点検間隔の不均一性を考慮した マルコフ推移確率の集計的推定手法の提案

山岸拓歩¹・貝戸清之²・稲垣博信³

¹学生会員 大阪大学大学院 工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: t.yamagishi@civil.eng.osaka-u.ac.jp

²正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp (Corresponding Author)

³正会員 デジタルブラスト株式会社 (〒 100-0004 千代田区大手町 1-6-1)

E-mail: h-inagaki@digitalblast.co.jp

マルコフ劣化ハザードモデルの開発以降、統計的劣化予測の非集計的手法の発展が著しい。非集計的手法は点検間隔が不均一である目視点検データに対する適用が容易であり、実務への適用事例は多く存在する。しかし、推計にあたる処理が複雑であり、実務者による活用には技術的な障壁があった。一方、点検データの数え上げを基本とする集計的手法は概念的に理解が容易であるが、点検間隔が不均一である点検データへの適用が課題とされてきた。本研究では各データが単位時間の劣化を複数回経験した一連の記録であると捉えることにより、点検間隔が均一である場合の集計的手法への帰着を図る。提案手法の有用性を実橋梁の点検データを用いて検証する。その上で、提案手法と従来の非集計的手法の関連や、実務への適用可能性について論じる。

Key Words : *aggregative estimation method, markov chain model, markov transition probability*

1. はじめに

津田等¹⁾によるマルコフ劣化ハザードモデルの開発を契機として、社会基盤施設(以下、施設)の維持管理手法は著しい高度化を遂げている。実務的、学術的な課題への対応のため、マルコフ劣化ハザードモデルを基幹技術として様々な応用的なモデルが提案されてきた。実務的な課題への対応としては小濱等²⁾による混合マルコフ劣化ハザードモデルが、学術的な課題への対応としては水谷³⁾による Multi-destination 型マルコフ劣化ハザードモデルがそれぞれ一例としてあげられる。これらのモデルは施設の劣化過程を統計モデルで記述することにより構築されており、マルコフ推移確率の推定の非集計的手法として分類されている。非集計的手法は、点検間隔が不均一である目視点検データ(施設に対する目視点検の記録)に対する適用が容易であり、施設の劣化過程に影響を与えると考えられる特性を推定に反映できる点に優位性を持つ。道路構造物に対する定期点検の義務化⁴⁾や、橋梁の定期点検要領^{5),6)}の策定による目視点検データの蓄積の加速を受け、非集計的手法の実務への適用事例は増加傾向にある。

これに対し、目視点検データを集計することでマルコフ推移確率を推定する手法は集計的手法として分類されており、非集計的手法に比べて概念的に理解が容易である。目視点検データの点検間隔が均一である場合の集計的手法は、目視点検データを数え上げるだけ

であるため簡便で、実用性も高い。しかし、実際の目視点検データの点検間隔は不均一であることが一般である。点検間隔が不均一である場合の集計的手法は杉崎等⁷⁾によるものがあげられるが、推定手法が数え上げによるものではなく、マルコフ推移確率の推定にあたっては難解な処理が必要となる。非集計的手法の推定に際する処理も同様に複雑であり、実務者によるこれらの手法の活用には技術的な障壁があった。

以上の問題意識の下、本研究では目視点検データの数え上げを基本とするマルコフ推移確率の推定の集計的手法を構築する。まず、目視点検データとして記録される個々のデータ(以下、個別データ)は、単位となる時間長(以下、単位時間)における劣化を複数回経験した一連の記録であると考えられる。その上で、個別データを単位時間に生じた劣化を表す複数のデータに分割することにより、点検間隔が不均一である目視点検データを点検間隔が均一である目視点検データに再構成する。点検間隔が均一である目視点検データに対する集計的手法は簡便であるため、以上に基づいてマルコフ推移確率の推定を試みる。個別データの分割の過程と従来の非集計的手法のモデル化の過程に類似点がみられることから、提案手法と非集計的手法の対応について議論し、統計的劣化予測手法の体系の精緻化について言及する。また、提案手法は数え上げを基本としており、推計が容易であるため、実務者による適用が期待できる。

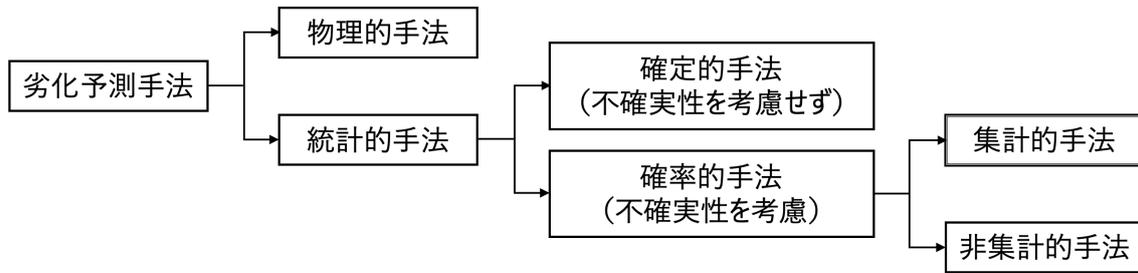


図-1 統計的劣化予測手法の体系

以下、2. で本研究の基本的な考え方を述べる。続いて、3. で従来のマルコフ推移確率の推定の非集計的手法を概説し、4. でマルコフ推移確率の推定の集計的手法を構築する。

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 従来の統計的劣化予測手法

本研究では、施設の状態を離散的な健全度として評価した目視点検データを扱う。そのような目視点検データに基づく統計的劣化予測手法はこれまでに数多く提案されており、体系化すると図-1 の通り分類することができる。つまり、劣化過程の不確実性の考慮の有無で確定的手法と確率的手法に分類できる。さらに、確率的手法のうち、推定方法に応じて集計的手法と非集計的手法に分類できる。集計的手法とは、管理下の施設のすべての目視点検データを集計して何らかの平均化操作によりマクロ的に劣化予測する手法を指す。一方、非集計的手法とは、個別の施設に対する目視点検データからミクロ的に劣化予測する手法を指す。

集計的手法のうち健全度の推移を単純に集計する手法は実用性が高く、かつ概念的に理解しやすい。しかし、点検間隔（データのサンプリング間隔）が異なるデータが混在する場合は、集計的手法の適用が困難とされてきた。杉崎等⁷⁾は施設の劣化過程がマルコフ過程で記述できると仮定し、健全度間の推移確率を直接推定することで、点検間隔の不均一性を考慮した集計的手法を提案した。マルコフ過程を仮定する利点は、基準となる時間長の自然数倍の時間長における推移確率はチャップマン・コルモゴロフ方程式により容易に記述できる点にある。この性質を用いることで、点検間隔が不均一である課題を克服した。

一方、非集計的手法は点検間隔の不均一性の考慮が比較的容易であり、施設の劣化に影響を与えると考えられる特性を考慮しやすいため、数多くの研究事例が蓄積されている。代表的な手法としては、津田等¹⁾が提案した健全度が1段階推移するために要する時間が指数分布に従うと仮定したマルコフ劣化ハザードモデル

があげられる。このモデルを基幹技術として、実務的、学術的な課題に対応するための様々な応用的なモデルが提案されている。実務的な課題への対応の例として、小濱等²⁾が提案した標準的な劣化過程をベンチマーキング劣化曲線として表現するとともに、個々の施設やその部材の劣化過程を相対評価する混合マルコフ劣化ハザードモデルがあげられる。また、学術的な課題への対応の例として、水谷³⁾が提案した Multi-destination 型マルコフ劣化ハザードモデルがあげられる。マルコフ劣化ハザードモデルでは隣接しない健全度への直接の推移が認められておらず、1段階ずつの推移を経て多段階の推移を表現している点を指摘し、2段階以上の直接の健全度推移を認めるモデルを開発した。これにより、マルコフ劣化ハザードモデルに基づくマルコフ推移確率の状態空間が、施設の劣化過程を記述するマルコフ過程一般のマルコフ推移確率の状態空間に一致しない問題が解消され、より多様な劣化過程を表現することが可能となった。

(2) 点検間隔の不均一性を考慮した集計的手法

従来、統計的劣化予測の目的の一つは、対象とする施設の劣化過程を記述するマルコフ推移確率の推定であった。本研究の目的も同様である。推移後の健全度が推移前の健全度と推移に要する時間のみに応じて確率的に与えられるマルコフ過程は、概念的に理解しやすく実用性が高いため、施設の維持管理の研究に広く用いられてきた。非集計的手法は点検データからマルコフ推移確率を推定する手法の一つであるが、いずれもその理解に高度な知識が要求されるため、実務的な適用にあたっては研究機関への依頼が主に求められてきた。

一方、集計的手法は換言すれば目視点検データの数え上げにすぎず、特筆した高度な知識は要求されないことから実用に足る手法が開発されれば、実務への適用の促進に寄与すると考えられる。目視点検データの点検間隔が均一であれば、推移前の健全度が同一のデータを対象とし、推移後の健全度を集計することで、その点検間隔における推移確率を容易に算出できる。し

かし、一般の目視点検データは点検間隔が不均一であるため、点検間隔が異なるデータの処理が課題となり、集計的手法の研究事例は未だ少ない。その中、杉崎等⁷⁾により点検間隔の不均一性を考慮した集計的手法が提案された。目視点検データが得られる尤度の算出は集計的ではあるが、それを踏まえて尤度を最大化することでマルコフ推移確率を推定する過程は統計学に関する専門的な知識が必要となり、また純粋な意味での目視点検データの数え上げとは言い難い。さらに、複数のパラメータを最尤法で推定するためには十分なデータ数が必要となるため、データの蓄積が不十分な施設に対する適用は容易ではない。

以上の点を踏まえ、本研究では目視点検データの数え上げを基本とする集計的手法を提案する。すべての個別データの点検間隔以下の単位となる時間（以下、単位時間）を設定し、単位時間に対応するマルコフ推移確率を推定することを考える。まず、点検間隔が均一である目視点検データに対する集計的手法は平易であることを指摘し、実際に手法を述べる。次に、点検間隔が不均一である目視点検データに対する集計的手法を検討するにあたり考慮すべき点をあげ、手法の構築する。すべての個別データの点検間隔は単位時間以上であるため、それぞれの個別データは単位時間の健全度推移を複数回経験した一連の記録であると考えられる。これを踏まえ、個別データを単位時間に生じた健全度の推移を表す複数のデータに分割することにより、点検間隔が不均一である目視点検データを点検間隔が均一である目視点検データに再構成し、点検間隔が均一である場合の集計的手法への帰着を図る。しかし、当該個別データが経験した可能性がある一連の健全度の組は複数通り存在するため、それぞれの一連の組が生起する確率をマルコフ推移確率を用いて表現する。これにより、点検間隔が均一である場合の集計的手法を、それぞれの推移に関する期待値を用いることにより拡張することを試みる。しかし、一連の組が生起する確率を表現するためのマルコフ推移確率は求めるべきものでもあるため、以上によりマルコフ推移確率が満たすべき条件が導かれるに留まる。この条件を考察することで、マルコフ推移確率を推定する。

(3) 非集計的手法との対応

マルコフ劣化ハザードモデルは、非集計的手法の基幹技術として施設の維持管理手法の高度化に寄与してきた。また、モデル化の仮定が素朴であるため、これまで様々な派生モデルの提案が行われてきた。水谷³⁾が提案した Multi-destination 型マルコフ劣化ハザードモデルは、マルコフ劣化ハザードモデルでは認められていない隣接しない健全度への直接の推移を認めた。こ

れにより、マルコフ劣化ハザードモデルに基づくマルコフ推移確率の状態空間が、施設の劣化過程を記述するマルコフ過程一般のマルコフ推移確率の状態空間に一致しない問題を克服した。2.(2)において、1つの個別データを単位時間に生じた健全度の推移を表す複数の個別データに分割することにより、点検間隔が不均一である目視点検データに対する集計的手法の概要を述べた。このとき、単位時間に生起する健全度の推移の段階数に制約を課すことにより、複数の集計的手法に派生させることができる。マルコフ劣化ハザードモデルを基幹技術とする非集計的手法は劣化過程を連続確率分布に基づいてモデル化されていることを踏まえると、例えば、単位時間に生起する健全度の推移の段階数を1段階に制限した集計的手法は、隣接しない健全度への推移を1段階ずつの推移の連続として表現しているマルコフ劣化ハザードモデルの離散化手法であると捉えることができる。さらに、2段階以上の推移を認めた集計的手法は、隣接しない健全度への直接の推移を認めている Multi-destination 型マルコフ劣化ハザードモデルの離散化手法であると捉えることができる。その上で、単位時間のとり方により、それぞれの集計的手法が対応する非集計的手法に十分近い概念となることが考えられる。以上の考察により、数え上げを基本として構築される集計的手法が従来から用いられている複数の非集計的と対応付けられ、図-1に示す確率的手法の体系をより精緻に理解することができる。本研究では健全度推移を1段階に制限した集計的手法と、2段階以上の任意の健全度推移を認めた集計的手法の検討を行う。

(4) マルコフ過程

施設の劣化過程は不確定であるため、将来生起する事象を確定的に予測することは不可能である。そこで、劣化過程にマルコフ過程を仮定して施設の劣化過程を表現することを考える。対象とする施設は、その状態が目視点検等を通じて離散的な $I \in \mathbb{N}$ 段階の健全度 $\{1, 2, \dots, I\}$ として評価されるとする。ただし、健全度はその値が大きくなるほど健全性が低い状態を表す。健全度1は新設状態、健全度 I は使用限界を意味する。時点 τ における健全度を $h(\tau)$ と表すとす。以下、 $z > 0$ に対して、2つの時点間 $\tau_A, \tau_B = \tau_A + z$ における健全度の推移確率について考える。 τ_A, τ_B は点検時点を表し、これらの時点においてのみ健全度が点検を通じて確認できる。 $(i, j) \in \{1, 2, \dots, I\}^2$ に対して、マルコフ推移確率 $\pi_{ij}(z)$ は $h(\tau_A) = i$ が生起し下で $h(\tau_B) = j$ が生起する条件付き確率として定義され、推移確率が τ_A 以前の劣化過程に依存しないという点においてマル

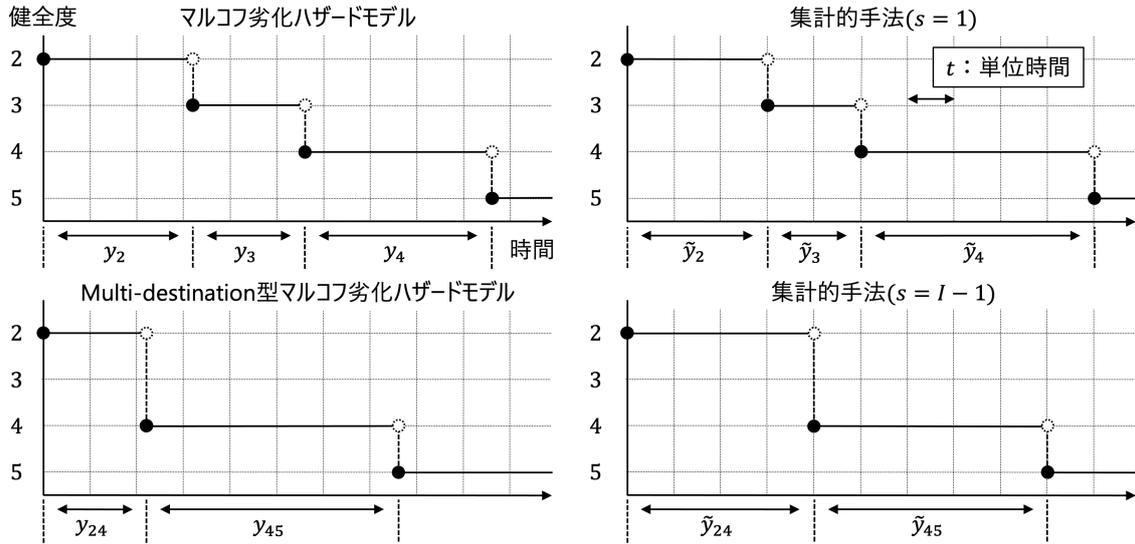


図-2 劣化過程のモデル化

コフ性を有し,

$$\pi_{ij}(z) = \text{Prob}[h(\tau_B) = j \mid h(\tau_A) = i] \quad (1)$$

と与えられる. $\pi_{ij}(z)$ を i 行 j 列成分に配置した I 次正方形行列 $\Pi(z)$ をマルコフ推移確率行列という. 施設の劣化過程を記述するマルコフ推移確率一般に対して以下の性質が成り立つ.

$$\begin{cases} 0 \leq \pi_{ij}(z) \leq 1 & \text{for } i \leq j \\ \pi_{ij}(z) = 0 & \text{for } i > j \\ \sum_{j=i}^I \pi_{ij}(z) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

式 (2) の第一式は確率であるから自明に要請される条件であり, 第二式および第三式は施設は経年により劣化が進行し, 修繕がなされない限り健全度は自然には回復しないことを表現している. また, 第三式の $i = I$ である場合, つまり $\pi_{II}(z) = 1$ は健全度 I がマルコフ過程における吸収状態であることを表現している.

(5) 劣化ルートとその要素列

本研究では, 隣接しない健全度への直接の推移を認めるモデルを検討するため, 劣化を通じて経験する一連の健全度の組が議論の中心的対象となる. 時間長 z を経て健全度が i から j へ推移するとき, 微小な時間長 t 毎に記録する健全度を考える. z がある $\eta \in \mathbb{N}$ を用いて $z = \eta t$ と表せるとしたとき, t 毎に記録する健全度は $h(0), h(t), \dots, h(\eta t)$ と表現でき,

$$i = h(0) \leq h(t) \leq \dots \leq h(\eta t) = j \quad (3)$$

が成立する. 以下, 一連の組 $(h(0), h(t), \dots, h(\eta t))$ を劣化ルートと称する. $h(t), h(2t), \dots, h((\eta - 1)t)$ は不可観測であるため, 式 (3) を満たす限り複数の劣化ルートが考えうる. 考えうるすべての劣化ルートを要素とす

る集合は i, j, z, t により一意に定まるため, その集合を $\mathcal{D}(i, j, z, t)$ と表す. また, $d = (h(0), h(t), \dots, h(\eta t)) \in \mathcal{D}(i, j, z, t)$ に対し, $h((\zeta - 1)t) < h(\zeta t)$ ($\zeta = 1, 2, \dots, \eta$) なる ζ が η' 個存在したとし, そのような ζ に対して昇順に $u = (h(0), h(\zeta_1 t), \dots, h(\zeta_{\eta'} t))$ と並べたものを劣化ルートの要素列と称するとする. 構成方法から明らかに

$$i = h(0) < h(\zeta_1 t) < \dots < h(\zeta_{\eta'} t) = j \quad (4)$$

が成立する. 劣化ルート d を要素列 u に対応させる写像を φ とすれば, 要素列全体からなる集合は $\mathcal{U}(i, j, z, t) = \varphi(\mathcal{D}(i, j, z, t))$ と表現できる. たとえば, $(2, 2, 4, 5, 5) \in \mathcal{D}(2, 5, 4, 1)$ に対して, $\varphi((2, 2, 4, 5, 5)) = (2, 4, 5) \in \mathcal{U}(2, 5, 4, 1)$ である. 十分に小さい実数 $\delta > 0$ を選べば, $\mathcal{U}(i, j, \delta, z)$ は健全度が i から j へするにあたり健全度を連続的に記録する場合の劣化ルートの要素列の集合と一致し, また z によらないため, 以下 $\hat{\mathcal{U}}(i, j) = \mathcal{U}(i, j, \delta, z)$ と表記する.

3. 非集計的手法

(1) モデル構築の前提条件

本研究では, 目視点検データに基づいて集計的に統計的劣化予測する方法論を提案する. 従来用いられてきた非集計的手法 (マルコフ劣化ハザードモデル¹⁾, Multi-destination 型マルコフ劣化ハザードモデル³⁾) と比較することで提案手法の妥当性を確認を行う. そのため, 詳細はそれぞれの文献に譲るが, 読者の便宜を図るために両モデルの概要を述べる.

マルコフ劣化ハザードモデルは隣接しない健全度への推移を 1 段階ずつの健全度の連続として表現する. そ

ここで、健全度 $i (i \leq I-1)$ の寿命 $y_i > 0$ の連続確率変数 Y_i を導入し、寿命を迎えたとき健全度が $i+1$ へ推移するとする。また、Multi-destination 型マルコフ劣化ハザードモデルでは隣接しない健全度への直接の推移を認めるモデルであるため、健全度 $i (i \leq I-1)$ から $j (i+1 \leq j \leq I)$ へ直接推移するまでの時間 $y_{ij} > 0$ の連続確率変数 Y_{ij} を導入し、健全度は $\operatorname{argmin}_j \{Y_{ij}\}$ へ推移するとする。

図-2 の左上図と左下図にマルコフ劣化ハザードモデルと Multi-destination 型マルコフ劣化ハザードモデルのモデル化の概念図をそれぞれ示す。いずれも健全度 2 を起点として劣化を経験した一例を示している。マルコフ劣化ハザードモデルの例では、健全度が $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ と推移した様子を示しており、健全度 2, 3, 4 の寿命はそれぞれ y_2, y_3, y_4 であり、いずれも確率変数 Y_2, Y_3, Y_4 の実現値である。また、Multi-destination 型マルコフ劣化ハザードモデルの例では、健全度が $2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ と推移した様子を示しており、健全度は 3 を経験せず 2 から 4 へ直接推移した。健全度 2, 4 の寿命はそれぞれ y_{24}, y_{45} であり、いずれも確率変数 $\min\{Y_{23}, Y_{24}, \dots, Y_{2I}\}, \min\{Y_{45}, Y_{46}, \dots, Y_{4I}\}$ の実現値である。いずれのモデルにおいても寿命は正の実数値であり、任意の時点で健全度推移が生起することが認められていることが図-2 から読み取れる。

(2) マルコフ劣化ハザードモデル

$\theta_i > 0$ として、 $Y_i \sim \operatorname{EX}[\theta_i]$ を仮定することで、マルコフ劣化ハザードモデルは構築される。なお、指数分布 $\operatorname{EX}[\theta]$ には複数の定義が存在するが、本研究では $Y \sim \operatorname{EX}[\theta]$ の確率密度関数が $f(y) = \theta \exp(-\theta y)$ と表現される定義を採用した。指数分布は無記憶性を示すため、劣化過程が過去の履歴に依存しないマルコフ性を表現できる。 Y_i の生存関数は $\tilde{F}_i(y_i) = \exp(-\theta_i y_i)$ であるため、 $h(\tau_A) = i$ の下、 τ_A から $\tau_B = \tau_A + z$ にわたって健全度 i が継続する条件付き確率は

$$\begin{aligned} \operatorname{Prob}[h(\tau_B) = i \mid h(\tau_A) = i] &= \frac{\tilde{F}_i(\tau_B)}{\tilde{F}_i(\tau_A)} \\ &= \exp(-\theta_i z) \end{aligned} \quad (5)$$

となり、 τ_A によらないことがわかる。この確率は $\pi_{ii}(z)$ にはかならず、 $Y_i \sim \operatorname{EX}[\theta_i]$ を仮定したことで、 $\pi_{ii}(z)$ は θ_i と z のみに依存し、 τ_A, τ_B に関する情報を用いなくとも推移確率を定義できる。隣接しない健全度へは 1 段階ずつの推移を経て推移すると仮定されているため、健全度が i となってから $j (i \leq j \leq I)$ へ推移ために要する時間の確率変数は独立な $Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_{j-1}$ の和 $Y_i + Y_{i+1} + \dots + Y_{j-1}$ として記述できる。このことから、マルコフ劣化ハザードモデルはアーラン分布の拡張である。このとき、 τ_A と τ_B の間で健全度が i か

ら j に推移する確率 $\pi_{ij}(z)$ は

$$\pi_{ij}(z) = \sum_{l=i}^j \prod_{m=i}^{l-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_l} \prod_{m=l}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_l} \exp(-\theta_l z) \quad (6)$$

と表現できる。ただし、表記上の規則として

$$\begin{cases} \prod_{m=i}^{l-1} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_l} = 1 & \text{for } l = i \\ \prod_{m=l}^{j-1} \frac{\theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_l} = 1 & \text{for } l = j \end{cases} \quad (7)$$

が成立すると考える。

(3) Multi-destination 型マルコフ劣化ハザードモデル

$\theta_{ij} > 0$ として、 $Y_{ij} \sim \operatorname{EX}[\theta_{ij}]$ を仮定することで、Multi-destination 型マルコフ劣化ハザードモデルは構築される。健全度 i からいずれかの健全度へ推移するまでの時間 y_i の確率変数 Y_i は $\min_j \{Y_{ij}\}$ である。 Y_{ij} の累積分布関数は $F_{ij}(y_{ij}) = 1 - \exp(-\theta_{ij} y_{ij})$ であるため、 Y_i の累積分布関数 $F_i(y_i)$ は

$$\begin{aligned} F_i(y_i) &= \operatorname{Prob} \left[\min_j \{Y_{ij}\} \leq y_i \right] \\ &= 1 - \prod_{j=i+1}^I \{1 - F_{ij}(y_i)\} \\ &= 1 - \exp \left\{ - \sum_{j=i+1}^I \theta_{ij} y_i \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

表現できる。これは、 $Y_i \sim \operatorname{EX}[\sum_{j=i+1}^I \theta_{ij}]$ であることを示している。 $\hat{u} \in \hat{U}(i, j)$ が $\hat{u} = (i_1, i_2, \dots, i_{N_{\hat{u}}})$ と表示できるとき、 $i_1 (= i), i_2, \dots, i_{N_{\hat{u}}} (= j)$ を経る健全度推移が生じる確率 $q_{\hat{u}}(z)$ は

$$\begin{aligned} q_{\hat{u}}(z) &= \prod_{l=1}^{N_{\hat{u}}-1} \theta_{i_l i_{l+1}} \cdot \left[\sum_{l=1}^{N_{\hat{u}}} \prod_{m=1, \neq l}^{N_{\hat{u}}} \frac{1}{\theta_{i_l} - \theta_{i_m}} \exp(-\theta_{i_m} z) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

であり、推移確率 $\pi_{ij}(z)$ は

$$\pi_{ij}(z) = \sum_{\hat{u} \in \hat{U}(i, j)} q_{\hat{u}} \quad (10)$$

と表現できる。なお、式 (6) で表されるマルコフ劣化ハザードモデルの推移確率は、 $(i, i+1, \dots, j) \in \hat{U}(i, j)$ を用いて、 $q_{(i, i+1, \dots, j)}(z)$ と表現できる。

4. 集計的手法の構築

(1) 手法構築の前提

劣化過程は 2.(4) に従うとする。集計的手法を議論する下では、ある時間長 $t > 0$ を定めた上で、健全度の推移は t を最小単位の時間間隔として生起するものと仮定し、 t を単位時間と称するとする。なお、後述の式 (13) で表される条件を満足する限り、 t の定め方には任

意性がある。また、本研究では単位時間に認められる健全度推移の段階数に制限を設けることがある。設けられる制限に応じて、マルコフ推移確率は式 (2) で要請される条件より強い条件が課される。単位時間に高々 $s(1 \leq s \leq I-1)$ 段階の健全度推移が認められる場合、 $j(i+s \leq j \leq I)$ に対して $\pi_{ij}(t) = 0$ となる。

$s = 1$ の場合は隣接しない健全度への推移を 1 段階ずつの健全度の連続として表現する。そこで、健全度 $i(i \leq I-1)$ の寿命 $\tilde{y}_i > 0$ の離散確率変数 \tilde{Y}_i を導入し、寿命を迎えたとき健全度が $i+1$ へ推移するとする。また、 $s = I-1$ の場合は隣接しない健全度への直接の推移を認めるため、健全度 $i(i \leq I-1)$ から $j(i+1 \leq j \leq I)$ へ推移するまでの時間 \tilde{y}_{ij} の離散確率変数 \tilde{Y}_{ij} を導入し、健全度は $\operatorname{argmin}_j \{\tilde{Y}_{ij}\}$ へ推移するとする。なお、 $\tilde{Y}_i, \tilde{Y}_{ij}$ の台は $\eta \in \mathbb{N}$ を用いて ηt と表現される実数全体である。

図-2 の右上図と右下図に集計的手法の $s = 1$ の場合と $s = I-1$ の場合の概念図をそれぞれ示す。いずれも健全度 2 を起点として劣化を経験した一例を示している。 $s = 1$ の場合の例では、健全度が $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ と推移した様子を示しており、健全度 2, 3, 4 の寿命はそれぞれ $\tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \tilde{y}_4$ であり、いずれも $\tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3, \tilde{Y}_4$ の実現値である。また、 $s = I-1$ の場合は健全度が $2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ と推移した様子を示しており、健全度は 3 を経験せず 2 から 4 へ直接推移した。健全度 2, 4 の寿命はそれぞれ $\tilde{y}_{24}, \tilde{y}_{45}$ であり、いずれも $\min\{\tilde{Y}_{23}, \tilde{Y}_{24}, \dots, \tilde{Y}_{2I}\}, \min\{\tilde{Y}_{45}, \tilde{Y}_{46}, \dots, \tilde{Y}_{4I}\}$ の実現値である。いずれの場合においても寿命は離散的な値であり、健全度の推移は起点より t の自然数倍の時点でのみ生じていることが図-2 から読み取れる。

(2) 目視点検データ

まず、本研究で与件とする目視点検データの構造について述べる。対象とする施設の劣化過程は 2.(4) に準じるとし、施設に対する点検を通じて収集された目視点検データは K 個の個別データから構成されているとする。それぞれの個別データは時期の異なる 2 回の点検に関するものであり、 $k(k = 1, 2, \dots, K)$ 番目の個別データに関して、1 回目の点検が実施された時点を τ_A^k 、2 回目の点検が実施された時点を $\tau_B^k (> \tau_A^k)$ とする。また、それぞれの点検において、健全度 $h(\tau_A^k), h(\tau_B^k)$ が観測されたとする。さらに、 $z^k = \tau_B^k - \tau_A^k$ とし、 z^k は t の自然数倍として表されるとし、ある $\zeta^k \in \mathbb{N}$ が存在して、 $z^k = \zeta^k t$ と表現できるとする。以上を踏まえ、 k 番目の個別データを $\xi^k = (h(\tau_A^k), h(\tau_B^k), z^k)$ と表し、また目視点検データを $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^K)$ と表すとする。

(3) 点検間隔が均一である場合の集計的手法

はじめに、 ξ の点検間隔が均一である場合の集計的手法について考察する。つまり、任意の k に対して、 $\zeta^k = 1$ として $z^k = t$ と表現できるような t を選ぶことができる。このとき、マルコフ推移確率 $\pi_{ij}(t)(1 \leq i \leq j \leq I)$ を推定することを考える。 $\pi_{ij}(t)$ は式 (1) より、健全度 i が時間 t を経て j へ推移する確率であるため、

$$\pi_{ij}(t) = \frac{\#\{h(\tau_A^k) = i, h(\tau_B^k) = j \mid k \leq K\}}{\#\{h(\tau_A^k) = i \mid k \leq K\}} \quad (11)$$

と定義できる。ここで、記号「#」は、引数を要素とする集合の要素の個数を返す。 ξ の点検間隔はすべて t であるため、式 (11) の分子、分母ともに ξ を数え上げることにより求めることができる。

(4) 点検間隔が不均一である場合の集計的手法

つぎに、 ξ の点検間隔が不均一である場合の集計的手法について考察する。つまり、任意の k に対してある $\zeta^k \in \mathbb{N}$ が存在して $z^k = \zeta^k t$ と表現できるような t を選ぶことができるが、必ずしも $\zeta^k = 1$ ではなく、 $\zeta^k > 1$ なる k が少なくとも 1 つ存在する。4.(3) と同様にマルコフ推移確率 $\pi_{ij}(t)(1 \leq i \leq j \leq I)$ を推定することを考える。 $\zeta^k > 1$ である場合、点検間隔 z^k と単位時間 t が一致しないため、 $\pi_{ij}(t)$ を式 (11) と同様に定義できない。

以上の問題の解決のため、2.(5) で導入した劣化ルート概念を用いる。以下、 k 番目の個別データ ξ^k に着目し、 $h(\tau_A^k) = i^k, h(\tau_B^k) = j^k$ とし、 ξ^k をもとに劣化ルート集合 $\mathcal{D}(i^k, j^k, z^k, t)$ を構成する。 $\mathcal{D}(i^k, j^k, z^k, t)$ の部分集合 \mathcal{D}_s^k を

$$\mathcal{D}_s^k = \{d = (i_0, i_1, \dots, i_{\zeta^k}) \mid \forall \zeta, i_{\zeta} - i_{\zeta-1} \leq s\} \quad (12)$$

と定める。 \mathcal{D}_s^k に含まれる任意の劣化ルートにおいては、単位時間に s 段階を超える健全度推移は生じていない。なお、 $\mathcal{D}_{I-1}^k = \mathcal{D}(i^k, j^k, z^k, t)$ である。1 つの劣化ルート $d^k \in \mathcal{D}_s^k$ に着目し、 $d^k = (i_0^k, i_1^k, \dots, i_{\zeta^k}^k)$ と表示できるとする。 ξ^k は時間長 $z^k = \zeta^k t$ を経て、健全度が i^k から j^k へ推移した記録である。単位時間は t であるため、 ζ^k 回の健全度推移を経験したと考えることができる。ここで、 $\zeta(\zeta = 1, 2, \dots, \zeta^k)$ 回目の健全度推移を d^k を参照して $i_{\zeta-1}^k$ から i_{ζ}^k への推移と対応させれば、 ξ^k は ζ^k 回の健全度推移 $i_0^k (= i^k) \rightarrow i_1^k \rightarrow \dots \rightarrow i_{\zeta^k}^k (= j^k)$ の一連の記録と考えることができる。なお、 $\zeta^k t$ の間に推移できる健全度の段階数は高々 $\zeta^k s$ であるため、 $j^k - i^k > \zeta^k s$ なる ξ^k に対しては、 \mathcal{D}_s^k が定義できない。よって、任意の k に対して $j^k - i^k \leq \zeta^k s$ が成立する必要がある、 $\zeta^k = z^k/t$ であるため、 t は

$$t \leq \min_k \left\{ \frac{z^k s}{j^k - i^k} \right\} = T_s \quad (13)$$

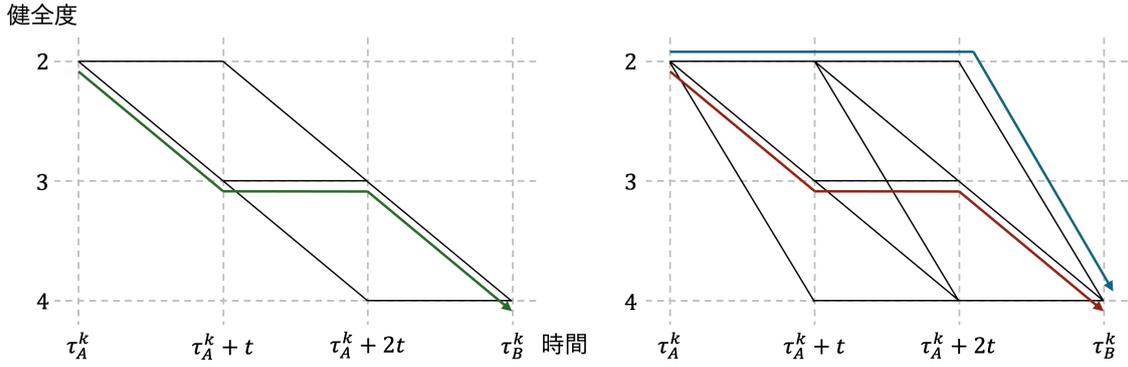


図-3 劣化ルート集合の例 (左図: $D_1^k = D_1(2, 4, 3t, t)$, 右図: $D_4^k = D_4(2, 4, 3t, t)$)

の範囲で任意性がある. なお, この一連の健全度推移は劣化ルート d^k の D_s^k からの選び方により異なる. また, $|D_s^k|$ は式 (3), 式 (12) を満たす劣化ルートの個数であり, 簡単な計算から

$$|D_s^k| = \begin{cases} s + \zeta^k - 1 C_{j^k - i^k} & \text{for } s < j^k - i^k \\ j^k - i^k + \zeta^k - 1 C_{j^k - i^k} & \text{others} \end{cases} \quad (14)$$

であり, 以下 $R_s^k = |D_s^k|$ とおく.

例えば, 状態が $I = 5$ 段階の健全度で評価される施設に対して収集された個別データ $\xi^k = (i^k, j^k, z^k) = (2, 4, 3t)$ に対する劣化ルートの集合 $D_s^k = D_s(2, 4, 3t, t)$ を考える. 単位時間に認められる健全度推移が高々1段階である場合, つまり $s = 1$ のときの D_1^k は図-3の左図で表され, $R_1^k = 1+3-1C_{4-2} = 3$ 通りの劣化ルートが考えられる. $h(\tau_A^k) = 2$ を表現する左上の点から $h(\tau_B^k) = 4$ を表現する右下の点へ向けて単位時間毎に健全度が推移しているが, 単位時間毎に高々1段階ずつ推移していることが確認できる. 緑色の矢印は D_1^k に含まれる劣化ルートの1つを例示したものであり, 劣化ルート $(i_0^k, i_1^k, i_2^k, i_3^k) = (2, 3, 3, 4)$ に対応している. 一方, 単位時間に任意の段階数の健全度推移が認められる場合, つまり $s = I - 1 = 4$ のときの D_4^k は図-3の右図で表され, $R_4^k = 2+3-1C_{4-2} = 6$ 通りの劣化ルートが考えられる. $s = 1$ の場合と異なり, 単位時間毎に任意の段階数の健全度推移が認められていることが確認できる. 赤色と青色の矢印は D_4^k に含まれる劣化ルートの2つを例示したものであり, それぞれは劣化ルート $(i_0^k, i_1^k, i_2^k, i_3^k) = (2, 3, 3, 4)$, $(i_0^k, i_1^k, i_2^k, i_3^k) = (2, 2, 2, 4)$ に対応している. 青色の劣化ルートのように単位時間に健全度が2段階以上推移する劣化ルートは D_1^k に含まれないことに留意されたい.

以上の劣化ルートの概念の導入により, 個別データ ξ^k を点検間隔が t である ζ^k 個の個別データ $\xi_\zeta^k (\zeta = 1, 2, \dots, \zeta^k)$ に分離することができる. 分離後の ζ 番目の個別データ ξ_ζ^k は, 時点 $\tau_A^k + (\zeta - 1)t$ から $\tau_A^k + \zeta t$ の健全度推移に対応し, それぞれの時点における健全度

は $h(\tau_A^k + (\zeta - 1)t) = i_{\zeta-1}^k, h(\tau_A^k + \zeta t) = i_\zeta^k$ であるため, $\xi_\zeta^k = (i_{\zeta-1}^k, i_\zeta^k, t)$ と表現できる. ξ_ζ^k の点検間隔は k, ζ によらず t であることに留意されたい. これにより, 点検間隔が不均一である K 個の個別データから構成されていた目視点検データ ξ は, 点検間隔が t が均一である $\sum_k \zeta^k$ 個の個別データから構成される目視点検データ $\tilde{\xi}$ に再構成できる. なお, \sum_k は $k = 1, 2, \dots, K$ にわたる和を表す. ここで, 式 (11) を拡張すれば, $\tilde{\xi}$ に基づいて $\pi_{ij}(t)$ は

$$\pi_{ij}(t) = \frac{\sum_k \#\{i_{\zeta-1}^k = i, i_\zeta^k = j \mid \zeta \leq \zeta^k\}}{\sum_k \#\{i_{\zeta-1}^k = i \mid \zeta \leq \zeta^k\}} \quad (15)$$

と表現できる. $\zeta^k = 1$ なる k に対しては,

$$\#\{i_{\zeta-1}^k = i, i_\zeta^k = j \mid \zeta \leq \zeta^k\} = \#\{i^k = i, j^k = j\} \quad (16)$$

$$\#\{i_{\zeta-1}^k = i \mid \zeta \leq \zeta^k\} = \#\{i^k = i\} \quad (17)$$

が成立するため, 式 (15) の分母と分子の各項は, $\#$ の引数を要素とする集合の要素数に応じて1もしくは0の確定値をとる. 一方, $\zeta^k > 1$ なる k に対しては, $i_0^k, i_1^k, \dots, i_{\zeta^k}^k$ の各値は, その組に対応する劣化ルートの D_s^k からの選び方に依存するため, 各項も同様に劣化ルートの選び方に依存する. そこで, 劣化ルート $d_r^k = (i_{r,0}^k, i_{r,1}^k, \dots, i_{r,\zeta^k}^k) \in D_s^k, (r = 1, 2, \dots, R_s^k)$ が D_s^k から確率的に選ばれると考えると, 各項を d_r^k に関する期待値 $E_{d_r^k}[\#\{i_{r,\zeta-1}^k = i, i_{r,\zeta}^k = j \mid \zeta \leq \zeta^k\}]$, $E_{d_r^k}[\#\{i_{r,\zeta-1}^k = i \mid \zeta \leq \zeta^k\}]$ として与えることを考える. d_r^k が D_s^k から選ばれる確率 $\text{Prob}(d_r^k \mid D_s^k)$ は, D_s^k の要素は互いに背反であることに留意して

$$\begin{aligned} \text{Prob}(d_r^k \mid D_s^k) &= \frac{\text{Prob}(d_r^k)}{\text{Prob}(D_s^k)} \\ &= \frac{\text{Prob}(d_r^k)}{\sum_{r=1}^{R_s^k} \text{Prob}(d_r^k)} \\ &= \frac{1}{\pi_{i^k j^k}(\zeta^k t)} \prod_{\zeta=1}^{\zeta^k} \pi_{i_{r,\zeta-1}^k i_{r,\zeta}^k}(t) \quad (18) \end{aligned}$$

と条件付き確率として与えられるため, 式 (15) の分母

と分子の各項はそれぞれ

$$\begin{aligned} & E_{d_r^k}[\#\{i_{r,\zeta-1}^k = i, i_{r,\zeta}^k = j \mid \zeta \leq \zeta^k\}] \\ &= \sum_{r=1}^{R_s^k} \text{Prob}(d_r^k \mid \mathcal{D}_s^k) \#\{i_{r,\zeta-1}^k = i, i_{r,\zeta}^k = j \mid \zeta \leq \zeta^k\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & E_{d_r^k}[\#\{i_{r,\zeta-1}^k = i \mid \zeta \leq \zeta^k\}] \\ &= \sum_{r=1}^{R_s^k} \text{Prob}(d_r^k \mid \mathcal{D}_s^k) \#\{i_{r,\zeta-1}^k = i \mid \zeta \leq \zeta^k\} \end{aligned} \quad (20)$$

となる。式 (19), 式 (20) は $\zeta^k = 1$ である場合も含むため, 式 (15) は ζ^k によらず

$$\pi_{ij}(t) = \frac{\sum_k E_{d_r^k}[\#\{i_{r,\zeta-1}^k = i, i_{r,\zeta}^k = j \mid \zeta \leq \zeta^k\}]}{\sum_k E_{d_r^k}[\#\{i_{r,\zeta-1}^k = i \mid \zeta \leq \zeta^k\}]} \quad (1 \leq i \leq j \leq I) \quad (21)$$

と表現できる。式 (21) は $I(I+1)/2$ 個の方程式からなる連立方程式である。チャップマン・コルモゴロフ方程式より $\pi_{ij}(\zeta t)$ は $\pi_{i'j'}(t) (i \leq i' \leq j' \leq j)$ の ζ 次式で表現できることと式 (18)~式 (20) より, 式 (21) の右辺は $\pi_{i'j'}(t) (i \leq i' \leq j' \leq j)$ の有理式で表される。つまり, 式 (21) で表される $I(I+1)/2$ 個の方程式からなる連立方程式は, $I(I+1)/2$ 個の変数 $\pi_{ij}(t)$ が満たすべき条件であり, これを解くことで $\pi_{ij}(t)$ を求めることができる。なお, $j > i + s$ に対して $\pi_{ij}(t) = 0$ となり, 簡単な計算により式 (21) は式 (2) を満足することを確認できるため, 式 (21) は $(s+1)(2I-2-s)/2$ 個の独立な方程式で構成される。

(5) マルコフ推移確率の状態空間

水谷³⁾が指摘するように, マルコフ劣化ハザードモデルのマルコフ推移確率の状態空間と, 式 (2) を満足する施設の劣化過程を記述するマルコフ過程一般のマルコフ推移確率の状態空間は一致しない。マルコフ劣化ハザードモデルにおいては, $t > 0$ に対して $\theta_1 = -\log(\pi_{11}(t))/t, \theta_2 = -\log(\pi_{22}(t))/t$ および

$$\pi_{12}(t) = \frac{\theta_1}{\theta_2 - \theta_1} \{\exp(-\theta_1 t) - \exp(-\theta_2 t)\} \quad (22)$$

が成立するため, $\pi_{12}(t)$ は $\pi_{11}(t), \pi_{22}(t)$ を用いて表現できる。マルコフ過程一般のマルコフ推移確率であれば, $\pi_{11}(t)$ と $\pi_{22}(t)$ を与件としたとき, $\pi_{12}(t)$ がとりうる値の範囲は, $\pi_{13}(t) + \pi_{14}(t) + \dots + \pi_{1I}(t) = 1 - \pi_{11}(t)$ が成立するときにとる $\pi_{12}(t) = 0$ を下限, $\pi_{13}(t) + \pi_{14}(t) + \dots + \pi_{1I}(t) = 0$ が成立するときにとる $\pi_{12}(t) = 1 - \pi_{11}(t)$ を上限として, $0 \leq \pi_{12}(t) \leq 1 - \pi_{11}(t)$ である。しかし, マルコフ劣化ハザードモデルであれば $\pi_{12}(t)$ の値は一意に定まる。このように, マルコフ劣化ハザードモデルのマルコフ推移確率の状態空間は, マルコフ

過程一般のマルコフ推移確率の状態空間より限られる。同様に, 集計的手法においてもマルコフ推移確率の状態空間が限られる問題は生じる。 $s < I-1$ のとき, 任意の i に対して $\pi_{ij}(t) = 0 (j \leq i+s)$ であるため, 明らかにマルコフ過程一般のマルコフ推移確率の状態空間に一致しない。また一般に $s' < s''$ のとき, $s = s'$ の場合のマルコフ推移確率の状態空間は, $s = s''$ の場合の状態空間に含まれる。マルコフ推移確率は劣化過程を代表して記述されるものであるため, マルコフ推移確率の状態空間が広いモデルの方がより多様な劣化過程を記述できる。

5. おわりに

本研究では, 劣化ルート概念の導入により, 点検間隔が不均一である目視点検データを点検間隔が均一である目視点検データに再構成し, マルコフ推移確率を集計的に推定する方法論を提案した。劣化ルートに設ける制限により異なる集計的手法を考慮することが可能となり, それらの手法の一部は非集計的手法のマルコフ劣化ハザードモデルと Multi-destination 型マルコフ劣化ハザードモデルの離散化手法として対応することを指摘した。一方, 今後の課題として, 提案手法の様々な実務場面への適用事例を今後蓄積することがあげられる。さらに, 提案手法は施設の劣化過程に影響を与えると考えられる特性を推定に反映できない点の解消が求められるが, 提案手法の構築の動機の 1 つが手法の簡便さの実現であったことを踏まえると, 特性の考慮のための拡張のために手法が著しく煩雑になることは避けられなければならない。

また, 提案した方法論に基づいた実証分析結果は, 研究発表会当日に提示する予定である。

参考文献

- 1) 津田尚胤, 貝戸清之, 青木一也, 小林潔司: 橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定, 土木学会論文集, No.801/I-73, pp.68-82, 2005.
- 2) 小濱健吾, 岡田真一, 貝戸清之, 小林潔司: 劣化ハザード率評価とベンチマーキング, 土木学会論文集 A, Vol.64, No.4, pp.857-874, 2008.
- 3) 水谷大二郎: 健全度推移の不連続性を考慮したマルコフ推移確率の非集計的手法, 土木学会論文集, Vol.74, No.2, pp.125-139, 2018.
- 4) 道路法施行規則第四条の五の五, 平成 26 年 3 月 31 日公布, 7 月 1 日施行.
- 5) 国土交通省: 橋梁定期点検要領, 2014.
- 6) 国土交通省: 道路橋定期点検要領, 2014.
- 7) 杉崎光一, 貝戸清之, 小林潔司: 目視検査周期の不均一性を考慮した統計的劣化予測手法の構築, 構造工学論文集, Vol.52A, pp.781-790, 2006.