動的利用者均衡配分の効率的数値解法

涌井 優尚 [1]・酒井 高良 [2]・赤松 隆 [3]

[1]非会員 東北大学 工学部建築・社会環境工学科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408）
E-mail: masanao.wakui.r4@dc.tohoku.ac.jp
[2]学生会員 東北大学 大学院情報科学研究科・JSPS 特別研究員 DC（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408）
E-mail: takara.sakai.t1@dc.tohoku.ac.jp
[3]正会員 東北大学教授 大学院情報科学研究科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408）
E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

動的利用者均衡 (DUE) 配分はネットワーク上の渋滞を明示的に表現できるため，時間依存の渋滞緩和施策を設計や評価する上で重要なベンチマークとなる．本研究では一起点多終点ネットワークにおける経路選択 DUE 配分の効率的な数値解法を提案する．具体的にはまず，経路選択 DUE 配分を数理構造が明快な混合線形相補性問題 [DUE-LCP] として定式化する．次に [DUE-LCP] が起点出発時刻別に分解できることを活用した 3 種類のアルゴリズムを提案する：(i) 等価二次計画問題に対する Frank-Wolfe 法，(ii) 同問題に対する修正 Frank-Wolfe 法，(iii) メリット関数を用いた等価最適化問題に対する加速射影勾配法．そしてこれら提案手法が，既存手法と比較して効率的に解が得られることを数値実験により示す．さらに，３つの提案手法間の優位性は，ネットワーク規模や需要パターンによることを明らかにする．

Key Words: *dynamic user equilibrium, route choice, linear complementarity problem, Frank-Wolfe algorithm, accelerated gradient method*

1. はじめに

動的交通量配分 (Dynamic Traffic Assignment, DTA) とは，ネットワーク形状と交通需要を与件として，何らかの配分原則に基づいて実現する動的な交通状態を求めるモデルである．DTA は，静的交通量配分では表現できない渋滞の発生・進展・解消過程を明示的に記述できる．そのため，時間依存の渋滞緩和施策を設計・評価する理論基盤として有用性が高い．DTA の中でも，配分原則として利用者個人の費用最小化原則を採用した動的利用者均衡 (Dynamic User Equilibrium, DUE) 配分は，ベンチマークモデルとして特に重要である．

利用者の選択行動に着目すると，DUE 配分は 2 種類のモデルに分類できる．一つは利用者が経路の選択のみを行い，自身の旅行費用を最小化する “ 経路選択 DUE 配分 ” である．もう一つは利用者が経路選択に加え出発時刻の選択も行う “ 同時選択 DUE 配分 ” である．両者について，一般ネットワークに適用可能な数値解法がこれまでに数多く提案されてきた．例えば，経路選択 DUE 配分については Lo and Szeto[1), Long et al.[2)], Gentile[3)] など，同時選択 DUE 配分については Han et al.[4)], Thong et al.[5)] などが挙げられる． しかしながら，これら既存研究の多くには，アルゴリズムの効率性および均衡解の信頼性の観点からいくつかの問題点が存在する．具体的には，まず，経路変数を陽に用いて問題を定式化しているため，変数の次元が膨大となり，アルゴリズムの空間計算コストが極めて大きくなっている点が挙げられる．このことは，ネットワーク規模に対して変数の次元が指数関数的に増加し，スケーラブルな解法となっていないことを意味している．さらに，渋滞待ち行列の physical queue 表現や多起点多終点ネットワークを採用しているため，アルゴリズムにおいて，リンク内の交通密度計算や多起点多終点 OD ペアの配分計算など，複数の形式の異なる計算を繰り返し行う必要がある．そのため，既存研究の解法の多くは，ヒューリスティックな不動点アルゴリズムであり，多大な反復計算を要し時間計算コストが大きい．また，均衡解への理論的な収束保証もなされておらず，解の信頼性にも乏しい．以上を踏まえると，効率性および信頼性を備えた DUE 配分の数値解法が必要と言える．

本研究の目的は，経路選択 DUE 配分の，効率性・正確性・スケーラビリティを全て備えた数値解法の開発である．経路選択 DUE 配分の解法は，同時選択 DUE 配分に対する求解アルゴリズムの部分モジュールとなることが期待される．したがって本研究は，同時選択 DUE 配分の効率的解法開発に際しても意義がある．

前述の目的を達成するため，本研究では以下のアプローチをとる．まず，モデルの本質を記述できる最低限の条件のみを，その枠組みとして採用する．具体的には研究の対象を一起点・多終点ネットワークに限定し，待ち行列の表現には point-queue モデルを採用す

る[1]．これらにより経路選択 DUE 配分は，経路変数を用いることなく，問題構造を簡明に表現する線形相補性問題として定式化できる．次に Akamatsu[6)] 同様，定式化した問題が起点出発時刻別に時間分解できることを活用し，数値計算の効率を改善する．加えて，解の信頼性を保証するため，定式化した均衡問題を等価な最適化問題に変換し，収束が保証されたアルゴリズムを活用する．最後に，DUE 特有の問題構造 (係数行列の対称性とスパース性) を活用し，アルゴリズムにおける各反復での演算回数を，ネットワーク規模に対して線形に近い増加に抑える．これにより，既存研究では損なわれていたスケーラビリティが確保される．

本研究では DUE 配分を解くアルゴリズムとして次の 3 種類を提案する：(i)Frank-Wolfe 法，(ii) 修正 Frank-Wolfe 法，(iii) 加速射影勾配法．(i), (ii) は非線形最適化問題を線形計画問題の繰り返しとして解く方法である．線形計画問題の求解は比較的容易であり，計算コストを低く抑えられる．(iii) は一次法の中で最も良い収束性を持ち，サイズの大きな問題に対して特に有用な手法である．

本稿の構成を次に示す．まず **2.** で本研究のモデルの枠組みをネットワーク・利用者について述べる．次に **3.** では，DUE 配分を定式化し，時間帯別のサブ問題を提示する．続いて，定式化した問題を解くアルゴリズムを **4.** で提示する．最後に **5.** では本稿のまとめを示す．なお，数値実験の結果については発表時に示す予定である．

2. モデル

(1) ネットワーク

本研究で対象とするネットワークは，唯一の起点ノードと複数の通過･終点ノード，およびそれらを結ぶ有向リンクからなる一起点多終点ネットワークとする．ネットワークに含まれるノードの集合を $\mathcal{N}$，リンクの集合を $\mathcal{L}$ とそれぞれ定義し，それぞれの要素は $i \in \mathcal{N}, (i,j) \in \mathcal{L}$ と表す．集合 $\mathcal{N}, \mathcal{L}$ の要素数は N, L とする．$\mathcal{N}$ の要素のうち，唯一の起点ノードを特に o と表す．また，あるノード $k \in \mathcal{N}$ について，それを終点とする全てのリンクの起点ノード集合を $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{N}$，$k$ を起点とする全てのリンクの終点ノード集合を $\mathcal{O}_k \subset \mathcal{N}$ とそれぞれ表す．

ネットワーク上のリンクは全て，終端部に一つ存在するボトルネックと，それ以外の自由走行区間からなる．各ボトルネックでは流入交通量がその容量を超えると待ち行列が発生する．リンク (i,j) の自由流旅行時間を $\hat{c}_{ij}$，ボトルネック容量を μ_{ij} とする．

各リンクでは first-in-first-out(FIFO) が成立するものとし，待ち行列は point-queue モデルで表現する．なお，待ち行列の進展に関わる条件は **3.** で示す．

(2) 利用者

各利用者は起点ノードを，時間区間 $\mathcal{S} = [0, S]$ に含まれる時刻 s に出発する．本研究では，従来の研究[7)6)]に倣い，全ての変数をこの起点出発時刻 s をベースに定義する Lagrange 的座標系を用いる．

時刻 s までに起点 o を出発する，終点が k である利用者の累積交通量を $Q_k(s)$，ある時刻における起点からの出発交通流率を $q_k(s) \equiv \frac{\mathrm{d}Q_k(s)}{\mathrm{d}s}$ とする．経路選択 DUE 配分において $Q_k(s), q_k(s)$ は与件である．また，時刻 s に起点を出発した利用者がリンク (i,j) を通過する際に経験する所要時間 $c_{ij}(s)$ は，リンクの自由流走行時間と待ち行列による遅れ時間 $w_{ij}(s)$ との和で下式のように表す．

$$c_{ij}(s) = \hat{c}_{ij} + w_{ij}(s) \tag{1}$$

続いて，各ノード k への最早到着時刻 $\tau_k(s)$(ただし $\tau_o(s) = s$) と，起点 o から各ノード k への最短所要時間 $\pi_k(s)$ を，導入する．ここで

$$\tau_k(s) = \pi_k(s) + s \qquad \forall k \in \mathcal{N} \tag{2}$$

である．ただし $\pi_o(s)$ は起点から起点への最短所要時間を表すので，$\pi_o(s) = 0, \forall s \in \mathcal{S}$ である．

各リンクにおけるフロー変数について述べる．ある時刻 s に起点を出発した利用者がリンク (i,j) に到着した時点での，そのリンクの累積流入・流出交通量をそれぞれ $A_{ij}(\tau_i(s)), D_{ij}(\tau_i(s))$ と表す．さらにこれを用いると，s に紐づけられる各リンク (i,j) への流入流率は $y_{ij}(s) \equiv \frac{\mathrm{d}A(\tau_i(s))}{\mathrm{d}s}$ と定義できる．

3. 定式化

(1) 均衡条件

DUE 状態において，各変数は次に示す 4 つの均衡条件を満足する．

a) 待ち行列進展条件

待ち行列進展条件は，リンク旅行時間の変化率に着目して導出される条件である．待ち行列の変化によるリンク旅行時間 $c_{ij}(s)$ の変化率は以下の式により表現できる[8)]．

$$\frac{\mathrm{d}c_{ij}(s)}{\mathrm{d}s} = \begin{cases} \dfrac{y_{ij}(s)}{\mu_{ij}} - \dfrac{\mathrm{d}\tau_i}{\mathrm{d}s} & (c_{ij}(s) > \hat{c}_{ij}) \\ \max\left[\dfrac{y_{ij}(s)}{\mu_{ij}} - \dfrac{\mathrm{d}\tau_i}{\mathrm{d}s}, 0\right] & (c_{ij}(s) = \hat{c}_{ij}) \end{cases}$$
$$\forall (i,j) \in \mathcal{L}, \forall s \in \mathcal{S} \tag{3}$$

[1] 既存研究で考慮されている，リンク内交通密度の計算や多起点多終点への拡張は，本研究での提案手法の解を用いて事後的に，もしくは提案手法を繰り返すことにより実現すると考えられる．

ここで式 (1)，(2) と，$\frac{\mathrm{d}c_{ij}(s)}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}w_{ij}(s)}{\mathrm{d}s}$ を考慮すると，式 (3) は以下の相補性条件に帰着する．

$$\begin{cases} w_{ij}(s)\cdot\left\{\dfrac{\mathrm{d}w_{ij}(s)}{\mathrm{d}s}-\dfrac{y_{ij}(s)}{\mu_{ij}}+\left(\dfrac{\mathrm{d}\pi_i(s)}{\mathrm{d}s}+1\right)\right\}=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}w_{ij}(s)}{\mathrm{d}s}-\dfrac{y_{ij}(s)}{\mu_{ij}}+\left(\dfrac{\mathrm{d}\pi_i(s)}{\mathrm{d}s}+1\right)\geq 0, w_{ij}(s)\geq 0 \end{cases}$$
$$\forall(i,j)\in\mathcal{L},\forall s\in\mathcal{S} \qquad (4)$$

b) 最短経路選択条件

DUE 状態では，その時々における最短経路上にある $(c_{ij}(s)-\pi_j(s)+\pi_i(s)=0)$ リンクにのみフローが存在する $(y_{ij}(s)>0)$．このことより以下の相補性条件が成り立つ．

$$\begin{cases} y_{ij}(s)\cdot\{c_{ij}(s)-\pi_j(s)+\pi_i(s)\}=0 \\ c_{ij}(s)-\pi_j(s)+\pi_i(s)\geq 0, y_{ij}(s)\geq 0 \end{cases}$$
$$\forall(i,j)\in\mathcal{L},\forall s\in\mathcal{S} \qquad (5)$$

c) フロー保存条件

起点を除く各ノード k について，以下の等式で表されるフロー保存条件が成り立つ．

$$\sum_{j\in O_k} y_{kj}(s)-\sum_{i\in I_k} y_{ik}(s)+q_k(s)=0$$
$$\forall k\in\mathcal{N}\backslash o,\forall s\in\mathcal{S} \qquad (6)$$

これは相補性条件の形式では，次のように記述できる．

$$\begin{cases} \pi_k(s)\cdot\left\{-\displaystyle\sum_{j\in O_k} y_{kj}(s)+\sum_{i\in I_k} y_{ik}(s)-q_k(s)\right\}=0 \\ -\displaystyle\sum_{j\in O_k} y_{kj}(s)+\sum_{i\in I_k} y_{ik}(s)-q_k(s)\geq 0, \pi_k(s)\geq 0 \end{cases}$$
$$\forall k\in\mathcal{N}\backslash o,\forall s\in\mathcal{S} \qquad (7)$$

d) ノード境界条件

DUE 状態では全利用者は各自の最短経路を選択している．このことから，ある時刻 s に出発した利用者は，それ以前の時刻に出発したどの利用者よりもあらゆるノードに早くついてはならない．この制約は以下の不等式で表される．

$$\frac{\mathrm{d}\pi_k(s)}{\mathrm{d}s}\geq -1 \qquad \forall k\in\mathcal{N}\backslash o,\forall s\in\mathcal{S} \qquad (8)$$

また π_k はその物理的意味から，自由流走行時間 $\hat{c}_{ij}$ から計算される各ノードへの最短所要時間 $\hat{\pi}_k$ を最小値とする．すなわち次の不等式も同時に満たされる必要がある．

$$\pi_k(s)\geq\hat{\pi}_k \qquad \forall k\in\mathcal{N}\backslash o,\forall s\in\mathcal{S} \qquad (9)$$

(2) 出発時刻の離散化

ここからは，数値計算を行う準備として出発時刻集合 $\mathcal{S}=[0,S]$ を一定の微小時間幅 ds で離散化する．これに伴い本節では，ここまでで提示した各均衡条件も同様に離散化する．

離散時刻の総数は $K+1$ 個とし，そのそれぞれに $\kappa=0,1,2,\ldots,K$ とインデックスを振る．ここで離散時間インデックスの集合を $\mathcal{K}$ とする．このようにすると，$\kappa+1$ 個目の離散時刻 s^κ は $\kappa\cdot ds$ と表せる．以降では出発時刻 s^κ に対応する変数を，$w_{ij}(s^\kappa)=w_{ij}^\kappa$ のように表す．ただし $\kappa=0$ は初期時刻とし，$q_k^0=0$, $w_{ij}^0=y_{ij}^0=0$ と定める．このことより，$c_{ij}^0=\hat{c}_{ij}$, $\pi_k^0=\hat{\pi}_k$ である．連続変数の時間微分については全て，以下のように近似する．

$$\frac{\mathrm{d}w_{ij}(s)}{\mathrm{d}s}\simeq\frac{w_{ij}^\kappa-w_{ij}^{\kappa-1}}{ds} \qquad (10)$$

なお，以降の再定式化は全てベクトル・行列形式で行う．その際に用いる，$\boldsymbol{w}^\kappa,\boldsymbol{y}^\kappa,\boldsymbol{c}^\kappa,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\alpha}$ は L 次元の，$\boldsymbol{\pi}^\kappa,\boldsymbol{q}^\kappa$ は $N-1$ 次元の，対応する要素を全て並べたベクトルを指す．また $\boldsymbol{A}$ はノード・リンク接続行列を，$\boldsymbol{A}_+$ は $\boldsymbol{A}$ の要素のうち負の値を全て 0 に置換した行列を表す．

a) 待ち行列進展条件 (離散)

定数 $\alpha_{ij}=\frac{\mu_{ij}}{ds}$ を導入すると次のように書ける[2]．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0}\leq\boldsymbol{w}^\kappa\perp\big\{&\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{w}^\kappa-\boldsymbol{w}^{\kappa-1})-\boldsymbol{y}^\kappa \\ &+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}_+^\top\left(\boldsymbol{\pi}^\kappa-\boldsymbol{\pi}^{\kappa-1}\right)+\boldsymbol{\mu}\big\}\geq\boldsymbol{0}\end{aligned}$$
$$\forall\kappa\in\mathcal{K}\backslash 0 \qquad (11)$$

b) 最短経路選択条件 (離散)

$$\boldsymbol{0}\leq\boldsymbol{y}^\kappa\perp\{\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{w}^\kappa+\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{\pi}^\kappa\}\geq\boldsymbol{0}$$
$$\forall\kappa\in\mathcal{K}\backslash 0 \qquad (12)$$

c) フロー保存条件 (離散)

$$\boldsymbol{0}\leq\boldsymbol{\pi}^\kappa\perp\{-\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^\kappa-\boldsymbol{q}^\kappa\}\geq\boldsymbol{0}$$
$$\forall\kappa\in\mathcal{K}\backslash 0 \qquad (13)$$

d) ノード境界条件 (離散)

$$\boldsymbol{\pi}^\kappa\geq\max\left[\boldsymbol{\pi}^{\kappa-1}-\boldsymbol{1}ds,\boldsymbol{\pi}^0\right]$$
$$\forall\kappa\in\mathcal{K}\backslash 0 \qquad (14)$$

以上をまとめると，経路選択 DUE 配分は混合線形相補性問題として定式化できる．各時刻の変数・定数を縦に並べた，以下のベクトルを定義する．

$$\boldsymbol{w}\equiv\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}^1\\ \vdots\\ \boldsymbol{w}^K\end{bmatrix},\boldsymbol{y}\equiv\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}^1\\ \vdots\\ \boldsymbol{y}^K\end{bmatrix},\boldsymbol{\pi}\equiv\begin{bmatrix}\boldsymbol{\pi}^1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\pi}^K\end{bmatrix},\boldsymbol{q}\equiv\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}^1\\ \vdots\\ \boldsymbol{q}^K\end{bmatrix}$$

さらに，このうち $\boldsymbol{w},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\pi}$ を縦に並べた未知変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を用意する：$\boldsymbol{x}\equiv\{\boldsymbol{w},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\pi}\}\in\mathbb{R}_+^{(2L+N-1)K}$．これらを使って，混合線形相補性問題 [DUE-LCP] は以下のように表せる．

[2] 以降で現れる単位行列 $\boldsymbol{I}$，零行列 (ベクトル)$\boldsymbol{0}$，1 行列 (ベクトル)$\boldsymbol{1}$，その他定数行列 (ベクトル) は原則として，その演算に対して適切な次元であるとする．ただし，特に注意が必要な場合には，行列 (ベクトル) の次元を下付き添え字で表す．

[DUE-LCP]

$$\begin{array}{ll}
\text{Find} & \boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}_+^{(2L+N-1)K} \\
\text{such that} & \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{x}^* \perp \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) \geq 0 \\
\text{and} & \boldsymbol{\pi}^{\kappa *} \geq \max\ [\boldsymbol{\pi}^{\kappa-1*} - \boldsymbol{1}ds, \boldsymbol{\pi}^0] \\
& \qquad\qquad \forall \kappa \in \mathcal{K} \backslash 0 \\
\text{where} & \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{M}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}
\end{array}$$

ここで，係数行列 $\boldsymbol{M}$ は次のような，歪対称に近く，また疎な構造を持つ．

$$\boldsymbol{M} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_K \otimes \boldsymbol{\alpha} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{\Delta}_K \otimes \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}_+^\top \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_K \otimes \boldsymbol{A}^\top \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I}_K \otimes \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

なお，他の定数ベクトル・行列は以下のように定義される．

$$\boldsymbol{b} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_K \otimes \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{e}_K \otimes \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{w}^0 + \boldsymbol{A}_+^\top \boldsymbol{\pi}^0) \\ \boldsymbol{1}_K \otimes \boldsymbol{c}^0 \\ -\boldsymbol{q} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{e} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Delta} \equiv \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 起点出発時刻別の時間分解

[DUE-LCP] の未知数の個数は $(2L+N-1)K$ と膨大である．そのためこれを直接解くことは非効率である．このことを踏まえて，本研究では時間別分解手法[7]を採用する．具体的には [DUE-LCP] を起点出発時刻 κ について分解し，時間の進行方向に向かって逐次的に解いていく．ここでは，離散化した問題 [DUE-LCP] を起点出発時刻別に分解することを考える．

起点出発時刻 κ についての均衡条件 (11)-(14) はいずれも，時刻 $\kappa, \kappa-1$ についての情報のみからなる．そのため，時刻 $\kappa-1$ における均衡解を与件とすれば，時刻 κ についての問題は独立に解くことができる．すなわち，問題を分解して逐次的に解くことで [DUE-LCP] の解が得られる．このことから，新たな与件の定数 $\boldsymbol{\beta}^\kappa = \boldsymbol{w}^{\kappa-1} + \boldsymbol{A}_+^\top \boldsymbol{\pi}^{\kappa-1} - \boldsymbol{1}ds$ を導入することで，式 (11) は以下のように書き換わる．

$$\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{w}^\kappa \perp \left\{ \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{w}^\kappa - \boldsymbol{y}^\kappa + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}_+^\top \boldsymbol{\pi}^\kappa - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\kappa \right\} \geq \boldsymbol{0} \qquad \forall \kappa \in \mathcal{K} \backslash 0 \tag{15}$$

よって，ある一つの離散時刻 $\forall \kappa \in \mathcal{K} \backslash 0$ に関するサブ問題は，式 (12), (13), (14), (15) より，混合線形相補性問題 [DUE-LCP-sub(κ)] として表せる．ただし $\boldsymbol{x}^\kappa \equiv \{\boldsymbol{w}^\kappa, \boldsymbol{y}^\kappa, \boldsymbol{\pi}^\kappa\} \in \mathbb{R}_+^{2L+N-1}$ である．

[DUE-LCP-sub(κ)]

$$\begin{array}{ll}
\text{Find} & \boldsymbol{x}^{\kappa *} \in \mathbb{R}_+^{2L+N-1} \\
\text{such that} & \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{x}^{\kappa *} \perp \boldsymbol{F}^\kappa(\boldsymbol{x}^{\kappa *}) \geq 0 \\
\text{and} & \boldsymbol{\pi}^{\kappa *} \geq \max\ [\boldsymbol{\pi}^{\kappa-1} - \boldsymbol{1}ds, \boldsymbol{\pi}^0] \\
\text{where} & \boldsymbol{F}^\kappa(\boldsymbol{x}^\kappa) \equiv \boldsymbol{M}_{\text{sub}}\boldsymbol{x}^\kappa + \boldsymbol{b}^\kappa
\end{array}$$

ここで，係数行列およびベクトルは以下の構造を持つ．

$$\boldsymbol{M}_{\text{sub}} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}_+^\top \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^\top \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}^\kappa \equiv \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\kappa \\ \boldsymbol{c}^0 \\ -\boldsymbol{q}^\kappa \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{M}_{\text{sub}}$ は $\boldsymbol{M}$ 同様に，歪対称に近く，また疎である．

(4) サブ問題の等価変換

[DUE-LCP-sub(κ)] を 2 種類の最適化問題へ等価変換する．2 種類の最適化問題の目的関数は，ともに最適解 (均衡解) において 0 となる．そのため，これらの問題に対する最適化アルゴリズムの収束判定は容易であり，かつその解の信頼性も保証できる．

a) 二次計画問題への変換

線形相補性問題は一般に二次計画問題に等価変換できることより，[DUE-LCP-sub(κ)] も以下の [DUE-QP(κ)] に等価変換できる．

[DUE-QP(κ)]

$$\min_{\boldsymbol{x}^\kappa} \quad z(\boldsymbol{x}^\kappa) \equiv \boldsymbol{x}^{\kappa\top}(\boldsymbol{M}_{\text{sub}}\boldsymbol{x}^\kappa + \boldsymbol{b}^\kappa) \tag{16}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{M}_{\text{sub}}\boldsymbol{x}^\kappa + \boldsymbol{b}^\kappa \geq \boldsymbol{0}, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{x}^\kappa \geq \boldsymbol{0}, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{\pi}^\kappa \geq \max\ [\boldsymbol{\pi}^{\kappa-1} - \boldsymbol{1}ds, \boldsymbol{\pi}^0] \tag{19}$$

なお [DUE-QP(κ)] の目的関数は，$\boldsymbol{M}_{\text{sub}}$ の歪対称性から

$$z(\boldsymbol{x}^\kappa) = \boldsymbol{w}^{\kappa\top}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{w}^\kappa + \boldsymbol{A}_+^\top \boldsymbol{\pi}^\kappa) + \boldsymbol{x}^{\kappa\top}\boldsymbol{b}^\kappa \tag{20}$$

と簡略化できる．

b) メリット関数最適化問題への変換

相補性問題はメリット関数を目的関数とする最適化問題にも等価に変換できる．[DUE-LCP-sub(κ)] と等価な最適化問題 [DUE-merit-MP(κ)] を以下に示す．

[DUE-merit-MP(κ)]

$$\min_{\boldsymbol{x}^\kappa} \quad \Psi(\boldsymbol{x}^\kappa) \equiv \sum_{l=1}^{2L+N-1} \phi(x_l^\kappa, F_l^\kappa(\boldsymbol{x}))^2 \tag{21}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{\pi}^\kappa \geq \max\ [\boldsymbol{\pi}^{\kappa-1} - \boldsymbol{1}ds, \boldsymbol{\pi}^0] \tag{22}$$

ここで ϕ は以下の関数である．

$$\phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - (x + y) \tag{23}$$

なお，式 (21) では一例として Fisher[9] により提案されたメリット関数を示したが，本研究ではこの他にも Fukushima 型メリット関数[10]，Mangasarian 型メリット関数[11] などを数値実験の対象とする．

4. アルゴリズム

(1) アルゴリズムの概要

本研究では，前章で述べた問題の変換を活用し [DUE-LCP-sub(κ)] を解くアルゴリズムを次の 3 種類提案する：

- Frank-Wolfe 法：[Alg-FW]
- 修正 Frank-Wolfe 法：[Alg-FW-modified]
- 加速射影勾配法：[Alg-FISTA]

[Alg-FW] は Frank-Wolfe 法[12] を本研究で扱う問題に適用する手法である．Frank-Wolfe 法は，目的関数の線形近似をもとに次点解を逐次探索するアルゴリズムである．すなわち，非線形の複雑な最適化問題を，線形計画問題の繰り返しとして解けることが，本アルゴリズムの強みである．線形計画問題の効率的解法は数理計画の分野で広く研究されており，これを用いることで今回の問題も高速に解けることが見込める．

[Alg-FW-modified] は Frank-Wolfe 法の収束性をさらに改善できるとして提案された[13] 手法である．Frank-Wolfe 法において次点解を決める際に，現在解のみでなくその直前の解も考慮することで，演算回数は増加するが，最適解付近での振動を抑えられることが期待できる．

[Alg-FISTA] は，加速射影勾配法の一種である FISTA[14] をベースとする手法である．加速射影勾配法は，解を更新する際に，その直前までに探索していた方向への慣性力 (momentum 項) を考慮し，収束時に生じる振動を減らすことを意図したアルゴリズムである．計算過程に目的関数とその勾配のみの評価を必要とする一次法であり，サイズの大きな問題に対しては優位性がある．加速射影勾配法は一次法の中で最も良い最悪収束率であり[15]，主に機械学習の分野で利用されてきた[16][17]．交通分野における近年の研究でもその効率性は示されており[18][19]，今回の問題も効率よく解けることが期待できる．

続く **(2)**, **(3)**, **(4)** では，提案アルゴリズムの詳細を述べる．

(2) Frank-Wolfe 法

本研究では Frank-Wolfe 法を [DUE-QP(κ)] に適用する．Frank-Wolfe 法のアルゴリズムを以下 [Alg-FW] に示す：

[Alg-FW]

Step 0：初期実行可能解の設定 後述の [DUE-FW-init] を解き $\boldsymbol{x}^{(1)}$ を定め，$n := 1$.

Step 1：サブ-LP の求解 後述の [DUE-FW-LP] を解き，$\hat{\boldsymbol{x}}^{(n)}$ を決定.

Step 2：ステップサイズ決定 以下の一次元探索問題の解 α_n を決定.

$$\min_{0 \le \alpha \le 1} z(\boldsymbol{x}^{(n)} + \alpha(\hat{\boldsymbol{x}}^{(n)} - \boldsymbol{x}^{(n)}))$$

Step 3：解の更新 暫定解を更新.

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} := (1 - \alpha_n)\boldsymbol{x}^{(n)} + \alpha_n \hat{\boldsymbol{x}}^{(n)}$$

Step 4：収束判定 $z(\boldsymbol{x}^{(n+1)}) \simeq 0$ なら $\boldsymbol{x}^{(n+1)}$ を解として確定し終了．そうでなければ $n := n + 1$ として Step 2-1 へ.

a) Step 0 における初期実行可能解の計算方法

[Alg-FW] において，初期解 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ は制約条件を満たしている必要がある．この実行可能な初期解のうち一つは，次の線形計画問題 [DUE-FW-init] の解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ として得られる[20]．ここで $\bar{\boldsymbol{x}}$ は x^κ と同次元のベクトルであり，その要素には $\boldsymbol{w}^\kappa, \boldsymbol{y}^\kappa, \boldsymbol{\pi}^\kappa$ と同次元の $\bar{\boldsymbol{w}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{\pi}}$ を持つ.

[DUE-FW-init]

$$\min_{\bar{\boldsymbol{x}}, x_a} \quad x_a \tag{24}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{M}_{\text{sub}}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}^\kappa \ge \boldsymbol{0}, \tag{25}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}} \ge \boldsymbol{0}, \quad x_a \ge 0, \tag{26}$$

$$\bar{\boldsymbol{\pi}} \ge \max\,[\boldsymbol{\pi}^{\kappa-1} - \boldsymbol{1}ds, \boldsymbol{\pi}^0] \tag{27}$$

b) Step 1 で解く線形計画問題

Step 1 では以下の線形計画問題 [DUE-FW-LP] を解く．なおここで $\hat{\boldsymbol{x}}$ は x^κ と同次元のベクトルであり，その要素には $\boldsymbol{w}^\kappa, \boldsymbol{y}^\kappa, \boldsymbol{\pi}^\kappa$ と同次元の $\hat{\boldsymbol{w}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{\pi}}$ を持つ．[DUE-FW-LP] から得られた $\hat{\boldsymbol{x}}^{(n)}$ を用いて，ベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}^{(n)} - \boldsymbol{x}^{(n)}$ が，n 回目の繰り返し計算における解の降下方向となる.

[DUE-FW-LP]

$$\min_{\hat{\boldsymbol{x}}} \quad \nabla z(\boldsymbol{x}^{(n)}) \cdot \hat{\boldsymbol{x}} \tag{28}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{\alpha}\hat{\boldsymbol{w}} - \hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}_+^\mathsf{T}\hat{\boldsymbol{\pi}} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\kappa \geq \boldsymbol{0}, \tag{29}$$

$$\boldsymbol{c}^0 + \hat{\boldsymbol{w}} + \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\hat{\boldsymbol{\pi}} \geq \boldsymbol{0}, \tag{30}$$

$$-\boldsymbol{q} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0}, \tag{31}$$

$$\hat{\boldsymbol{w}} \geq \boldsymbol{0}, \quad \hat{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0}, \tag{32}$$

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} \geq \max\left[\boldsymbol{\pi}^{\kappa-1} - \boldsymbol{1}ds, \boldsymbol{\pi}^0\right] \tag{33}$$

ここで，[DUE-FW-LP] の制約条件に現れる接続行列 $\boldsymbol{A}$ はグラフ理論的な意味を持つ非常に疎な構造であり，このことを活用した計算の効率化が可能である．また [DUE-FW-LP] の目的関数に現れる，関数 z の勾配は解析的に書き下すことができ，これも効率化への足掛かりになる．

(3) 修正 Frank-Wolfe 法

本手法は [Alg-FW] 同様に，[DUE-QP(κ)] に対し適用する．[Alg-FW-modified] は，[Alg-FW] での Step 3 の操作のみを以下のように修正したものである：

[Alg-FW-modified]

Step 3-1：仮解の作成 仮解 $\boldsymbol{v}$ を計算.

$$\boldsymbol{v}^{(n+1)} := (1-\alpha_n)\boldsymbol{x}^{(n)} + \alpha_n\hat{\boldsymbol{x}}^{(n)}$$

Step 3-2：PARTAN サーチによる解の更新
以下の場合分け処理で暫定解を更新.

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} := \begin{cases} \boldsymbol{v}^{(n+1)} & (n=1) \\ (1-\tau_n)\boldsymbol{v}^{(n+1)} & \\ \qquad +\tau_n\boldsymbol{x}^{(n-1)} & (n \geq 2) \end{cases}$$

where

$$\tau_n \equiv \mathop{\mathrm{argmin}}_{\tau_{\min}^{(n)} \leq \tau \leq 1} z((1-\tau)\boldsymbol{v}^{(n+1)} + \tau\boldsymbol{x}^{(n-1)})$$

a) Step 3-2 における $\tau_{\min}^{(n)}$ の計算方法

$\tau_{\min}^{(n)}$ は α と τ を用いて次のように決定する[21]．ただし $\bar{x}$ は $1-x$ を表し，$\tau_1 = 0$ である．

$$\tau_{\min}^{(n)} = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{\bar{\alpha}_{n-1}\bar{\alpha}_n\left(1 - \frac{\tau_{n-1}}{\tau_{\min}^{(n-1)}}\right) - 1} & (\tau_{n-1} < 0) \\ 1 + \dfrac{1}{\bar{\alpha}_{n-1}\bar{\alpha}_n\bar{\tau}_{n-1} - 1} & (\tau_{n-1} \geq 0) \end{cases}$$

(4) 加速射影勾配法

本手法では手順に射影 (projection) を含む性質上，対象とする問題の制約条件は単純かつ少ないことが望ましい．そのため本研究では [DUE-merit-MP(κ)] を本アルゴリズムに適用する．

加速射影勾配法アルゴリズムを以下 [Alg-FISTA] に示す：

[Alg-FISTA]

Step 0：初期設定 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(1)} := \boldsymbol{x}^{\kappa-1}$. $n, j, t_1 := 1$．s_0，ξ，$k_{\min}$ を設定 (ただし $0 < \xi < 1$).

Step 1：Backtracking i_n を決定.

Step 2：解の更新 $s_n := \xi^{i_n} s_{n-1}$ とし，次の式で暫定解を更新.

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = \mathrm{Proj}_C[\boldsymbol{y}^{(n)} - s_n\nabla\Psi(\boldsymbol{y}^{(n)})]$$

Step 3：収束判定 $\Psi(\boldsymbol{x}^{(n+1)}) \simeq 0$ なら $\boldsymbol{x}^{(n+1)}$ を解として確定し終了.

Step 4：Adaptive Restart j を更新.

Step 5：momentum 項の計算 $\boldsymbol{y}^{(n+1)}$ を確定.

$$t_{j+1} = \frac{1+\sqrt{1+4t_j^2}}{2}$$

$$\boldsymbol{y}^{(n+1)} = \boldsymbol{x}^{(n+1)} + \frac{t_j - 1}{t_{j+1}}(\boldsymbol{x}^{(n+1)} - \boldsymbol{x}^{(n)})$$

$n := n+1$ としステップ 1 へ.

a) Step 1：Backtracking の詳細

$s := \xi^i s_{n-1}$ と置き，下の不等式が成り立つ最小の非負整数 i を i_n として決定する．

$$\Psi(\boldsymbol{x}') \leq Q_s(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}^{(n)}) \tag{34}$$

ただし，

$$\boldsymbol{x}' \equiv \mathrm{Proj}_C[\boldsymbol{y}^{(n)} - s\nabla\Psi(\boldsymbol{y}^{(n)})] \tag{35}$$

$$Q_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv \Psi(\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^T\nabla\Psi(\boldsymbol{y}) + \frac{1}{2s}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 \tag{36}$$

である．この操作により各反復において，ステップサイズ s_n を定数で与えるよりも効率的な収束が期待できる．

b) Step 4：Adaptive Restart[22] の詳細

j の更新について，以下の条件を満たすなら $j := 1$，そうでなければ $j := j+1$ とする．

$$j \geq k_{\min} \quad \text{and} \quad \Psi(\boldsymbol{x}^{(n+1)}) > \Psi(\boldsymbol{x}^{(n)}) \tag{37}$$

ここで $k_{\min}$ はあらかじめ設定したパラメータである．この操作は，momentum 項が目的関数を改善しないように影響する場合に，その影響をリセットする意味を

持つ．

5. おわりに

本研究では，一起点多終点ネットワークにおける経路選択 DUE 配分の効率的な計算方法を提案した．具体的には，まず，DUE 配分を離散時刻系における混合線形相補性問題 [DUE-LCP] として定式化した．続いてこの問題を起点出発時刻別に分解して解くために，離散化した一つの時刻に関する問題 [DUE-LCP-sub(κ)] を導いた．最後に，時間分解を有効活用して DUE 配分の解を求める 3 種類のアルゴリズムを提案した．提案アルゴリズムの計算性能 (効率性，正確性，スケーラビリティ) については，数値実験の結果とともに発表時に提示する予定である．

今後の課題として，本研究の成果を用いた同時選択 DUE 配分の効率的解法の開発がある．同時選択 DUE 配分に対し，経路選択 DUE 配分がその子問題となるような分解を施せれば，本研究の成果を活用して新たな解法を構築できることが期待される．

謝辞： 本研究は JSPS 科研費 (JP20J21744, JP21H01448) の助成を受けた研究の一部です．ここに記し,感謝を表します.

参考文献

1) Lo, H. K. and Szeto, W. Y.: A cell-based variational inequality formulation of the dynamic user optimal assignment problem, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.36, No.5, pp.421–443, 2002.
2) Long, J., Huang, H.-J., Gao, Z., and Szeto, W. Y.: An intersection-movement-based dynamic user optimal route choice problem, *Operations Research*, Vol.61, No.5, pp.1134–1147, 2013.
3) Gentile, G.: Solving a dynamic user equilibrium model based on splitting rates with gradient projection algorithms, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.92, pp.120–147, 2016, Within-day Dynamics in Transportation Networks.
4) Han, K., Eve, G., and Friesz, T. L.: Computing dynamic user equilibria on large-scale networks with software implementation, *Networks and Spatial Economics*, Vol.19, No.3, pp.869–902, 2019.
5) Thong, D. V., Gibali, A., Staudigl, M., and Vuong, P. T.: Computing dynamic user equilibrium on large-scale networks without knowing global parameters, *Networks and Spatial Economics*, pp. 1–34, 2021.
6) Akamatsu, T.: An efficient algorithm for dynamic traffic equilibrium assignment with queues, *Transportation Science*, Vol.35, No.4, pp.389–404, 2001.
7) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Dynamic equilibrium assignment with queues for a one-to-many od pattern, *Transportation and Traffic Theory*, Vol.12, pp.185–204, 1993.
8) 和田健太郎: 動的交通均衡配分理論の近年の進展, 土木学会論文集 *D3 (*土木計画学*)*, Vol.76, No.5, pp.I_21–I_39, 2021.
9) Fischer, A.: A special newton-type optimization method, *Optimization*, Vol.24, No.3-4, pp.269–284, 1992.
10) Fukushima, M.: Optimization approaches to variational inequality problems, 数理解析研究所講究録, Vol.987, pp.245–262, 1997.
11) Mangasarian, O. L. and Solodov, M. V.: Nonlinear complementarity as unconstrained and constrained minimization, *Mathematical Programming*, Vol.62, No.1, pp.277–297, 1993.
12) Frank, M., Wolfe, P., et al.: An algorithm for quadratic programming, *Naval research logistics quarterly*, Vol.3, No.1-2, pp.95–110, 1956.
13) LeBlanc, L. J., Helgason, R. V., and Boyce, D. E.: Improved efficiency of the frank-wolfe algorithm for convex network programs, *Transportation Science*, Vol.19, No.4, pp.445–462, 1985.
14) Beck, A. and Teboulle, M.: A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems, *SIAM journal on imaging sciences*, Vol.2, No.1, pp.183–202, 2009.
15) Nesterov, Y.: A method for unconstrained convex minimization problem with the rate of convergence o (1/kˆ 2), *Doklady an ussr*, Vol. 269, pp. 543–547, 1983.
16) Fan, J., Han, F., and Liu, H.: Challenges of big data analysis, *National science review*, Vol.1, No.2, pp.293–314, 2014.
17) Bottou, L., Curtis, F. E., and Nocedal, J.: Optimization methods for large-scale machine learning, *Siam Review*, Vol.60, No.2, pp.223–311, 2018.
18) Oyama, Y., Hara, Y., and Akamatsu, T.: Markovian traffic equilibrium assignment based on network generalized extreme value model, *arXiv preprint arXiv:2009.02033*, 2020.
19) 渡邊大樹, 赤松隆: クラウド・ソーシング配送システムにおける効率的マッチング・アルゴリズム, 土木学会論文集 *D3 (*土木計画学*)*, Vol.77, No.2, pp.83–96, 2021.
20) 長江剛志, 赤松隆, 清水廉, 符皓然: 経路・出発時刻同時選択型の動的利用者均衡配分の求解法: 二次計画問題アプローチ, 土木学会論文集 *D3 (*土木計画学*)*, Vol.76, No.3, pp.264–281, 2020.
21) Arezki, Y. and Van Vliet, D.: A full analytical implementation of the partan/frank–wolfe algorithm for equilibrium assignment, *Transportation Science*, Vol.24, No.1, pp.58–62, 1990.
22) O’donoghue, B. and Candes, E.: Adaptive restart for accelerated gradient schemes, *Foundations of computational mathematics*, Vol.15, No.3, pp.715–732, 2015.

(2021．10．1 受付)