

降下方向ベクトル計算へのランダム性の導入による利用者均衡配分の演算効率化

神谷 奏有¹・杉浦 聡志²

¹ 学生会員 北海道大学大学院 工学院北方圏環境政策工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8)

E-mail: kamy_hu@eis.hokudai.ac.jp

² 正会員 北海道大学大学院准教授 工学研究院 (〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8)

E-mail: sugiura@eng.hokudai.ac.jp

利用者均衡配分の大規模ネットワークへの応用においては、計算負荷の軽減が課題であり、効率的な求解手法に対する要請は小さくない。しかし、代表的解法である Frank-Wolfe 法 (以下, FW 法) は解の近傍で振動が生じることから解の収束が緩慢となり求解に時間を要する。本研究では、求解中の各反復において変数の一部についてのみ最適化を行う Coordinate Descent 法の着想に基づき、求解中に起点別リンク交通量を記憶し、勾配ベクトルの算出において一部の起点由来の OD 需要のみを最短経路に配分しなおし解を更新する。この更新する起点の選択について、求解中に得られる情報を利用して選択する確率を与える手法を提案し計算効率向上を図った。提案手法はパフォーマンスの確認のため、テストネットワークへ適用され、安定的かつ FW 法よりも効率的な求解が可能であることが確認された。

Key Words: *User Equilibrium, Origin based flow, Efficient algorithm, Frank-Wolfe method, Coordinate descent method*

1. はじめに

利用者均衡配分は、道路ネットワーク分析において実務上でも重要な役割を果たしている一方で、大規模ネットワークへの応用においては、計算負荷の軽減が課題となっている。ネットワークデザイン問題など利用者均衡配分を繰り返し解く必要がある問題への応用を踏まえれば、分析・政策立案の時間的なボトルネックを解消する、効率的に求解できる手法に対する要請は小さくない。

そこで本研究では、利用者均衡配分の演算効率化を目的として、従来の手法を改良したいくつかの手法を提案する。提案手法はテストネットワークに適用され、その効率性や性質の評価を行う。

利用者均衡配分の代表的な解法は Frank and Wolfe¹⁾, Leblanc et al.²⁾による Frank-Wolfe 法(以下, FW 法)がある。しかし, FW 法は解の近傍では振動が生じることから解の収束が緩慢となることが知られている。FW 法以外の解法では起点別の非巡回有向グラフ内でのフロー調整によって収束を目指す Class bush アルゴリズムとよばれる解法があり, Dial³⁾, Bar-gera⁴⁾が提案, Nie⁵⁾によって整理されている。この他にも Bar-gera⁶⁾による TAPAS など FW 法と比較して解の収束が高速な手法が提案されてきた。しかしながら, これらの手法はマルチクラス配分に対応していない。道路施策を分析する上で, 車種を考慮する必要がある場面は多く, マルチクラス配分が可能なアル

ゴリズムの効率化が望まれる。FW 法の効率化の既往研究では, Conjugate direction Frank-Wolfe Methods⁷⁾が提供されている。これは解の更新時に降下方向を最急勾配方向とするのではなく, 接ベクトルの情報を用いて降下方向を決定している。この手法は単一繰り返し内での質的な探索の向上を図る手法ととらえることができる。一方で, 単一繰り返し内における計算量の量的な削減により効率化を図る手法もある。鷹尾・朝倉⁸⁾は最短経路探索においてひとつ前の反復の最短ツリーを記憶することで探索時間を削減し高速化を実現している。杉浦⁹⁾は勾配ベクトルの算出において, ランダムに選択する起点のみ部分的に更新する方法を提案しており, 数値実験により効率向上が確認されている。この手法は, 求解中の各反復において変数の一部についてのみ最適化を行う Coordinate descent 法¹⁰⁾の利用者均衡配分問題への適用と捉えることができ, 解の降下方向ベクトルの修正により解の振動抑制に資すること, 最短経路探索の量的削減を同時に実現することを企図している。数値実験では計算時間を低減した一方で, 起点の選択において一様分布を用いており, この修正によりさらなる演算効率の向上が期待できる。

本研究では杉浦⁹⁾の着想に基づき, 一様分布に基づいた起点選択から, 求解中に得られる情報を利用して選択する確率を与える手法を考える。提案手法はテストネットワークに適用され, そのパフォーマンスを確認する。

2. FW 法と提案手法

FW 法はリンク交通量ベクトルを変数として、均衡状態のリンク交通量を求解するアルゴリズムである。まず、交通量の無い状態で各 OD ペアについて最短経路探索を行い、全ての交通量を最短経路に配分しリンク交通量の初期解を得る。次に、配分されたリンク交通量に基づき、BPR 関数によりリンクコストを更新する。更新されたリンクコストに基づいて最短経路探索を行い、全ての交通量を最短経路に配分しなおし補助解を得て降下方向を決定する。次に降下方向にどれだけ進むか(ステップサイズ)を決定し、解を更新する。解が収束しているならば終了し、そうでなければリンクコスト更新に戻り、同様に繰り返す。

提案手法では、FW 法の最短経路探索と降下方向の決定の部分の修正を行う。FW 法のように全ての OD ペアに対する最短経路探索による降下方向ベクトルの計算は行わず、確率的に選択された起点についてのみ部分的に最短経路探索を行い、解を更新する。この方法は杉浦⁹⁾の手法と同等である。提案手法は、杉浦⁹⁾が一様分布により降下方向ベクトルを計算する起点を選択するのに対して、繰り返し演算中に得られる情報によって与えた重みに基づいて確率的に選択する。この操作により、更新の必要性の高いと思われる起点を優先的に選択することで、均衡状態への効率的な収束を目指す。

3. 提案手法の定式化

(1) 記号の定義

本研究で用いる記号を以下のように定義する。

A	:	リンク a の集合
S	:	起点 s の集合
T	:	終点 t の集合
φ	:	起点集合 S の部分集合
K_{st}	:	OD ペア (s, t) における経路 k の集合
u_{st}	:	OD ペア (s, t) における最短経路コスト
d_{st}	:	OD ペア (s, t) における交通需要
$\delta_{st,a}$:	OD ペア (s, t) の最短経路がリンク a を含むとき 1, それ以外で 0 をとる変数
δ_s	:	φ が起点 s を含むとき 1, それ以外で 0 をとる変数
n	:	繰り返し回数
C_a	:	リンク a の交通容量
t_{a0}	:	リンク a のゼロフロー時のリンクコスト
$t_a^{(n)}$:	繰り返し回数 n のリンク a のリンクコスト
$x_a^{(n)}$:	繰り返し回数 n のリンク a のリンク交通量
$x_{ij}^{(n)}$:	繰り返し回数 n のノード ij 間のリンクのリンク交通量

$x_{a,s}^{(n)}$:	繰り返し回数 n のリンク a の起点 s 別のリンク交通量
$x_{ij,s}^{(n)}$:	繰り返し回数 n のノード ij 間のリンクの起点 s 別のリンク交通量
$p_a^{(n)}$:	繰り返し回数 n の降下方向ベクトルの要素
y_a	:	補助解ベクトルのリンク a についての要素
$C_{origin,s}$:	起点 s に与える重み
$P_{link,a}$:	リンク a が選択される確率
$P_{origin,s}$:	起点 s が選択される確率
λ	:	ステップサイズ
α_a, β_a	:	リンク a の BPR 関数のパラメータ
N	:	OD ペア (s, t) の総数

(2) 提案手法の定式化

提案手法でも杉浦⁹⁾の手法と同様に起点の部分的な更新を行う。しかし、一様分布は用いず、求解中に得られる情報を利用して起点に重みを与え、確率的に更新起点を選択する。この重みの与え方について 3 つの手法を提案する。すなわち、提案手法においても改良を行うのは FW 法の最短経路探索と降下方向の決定の部分である。

a) 提案手法 A の定式化

提案手法 A では、均衡が実現した時には混雑リンクにおける交通集中が繰り返し演算中の解と比べて緩和されることに着目した手法を考える。起点の選択は混雑リンクの選択と起点の選択の 2 段階の手順で構成される。まず各繰り返しにおいて交通量を減少させるべき混雑したリンクを選択する。次に、その選択されたリンクを利用している起点のいくつかを確率的に選択する。以下に手順の詳細を示す。

StepA-1. 混雑リンクの選択

まず、混雑したリンクを選択するためには、式(2)で表される BPR 関数の傾き、すなわち微分値を用いて評価する。リンク容量やゼロフロー時のリンクコストはリンクによって異なるため、これらは相対的な基準として利用しにくい。各繰り返し時点におけるリンク交通量に対応する BPR 関数の傾きが大きいほど交通量の減少に対しコストを効率的に減少させることが可能である。

リンクを選択する確率を以下のように設定する。

$$P_{link,c} = \frac{\frac{d}{dx_c^{(n)}} t_c(x_c^{(n)})}{\sum_{a \in A} \frac{d}{dx_a^{(n)}} t_a(x_a^{(n)})}, \quad \forall c \in A \quad (1)$$

where

$$\frac{d}{dx_a} t_a(x_a) = \alpha_a \cdot \beta_a \cdot \frac{t_{a0}}{C_a} \cdot \left(\frac{x_a}{C_a}\right)^{\beta_a - 1}, \quad \forall a \in A \quad (2)$$

$$t_a(x_a^{(n)}) = t_{a0} \left\{ 1 + \alpha_a \cdot \left(\frac{x_a^{(n)}}{C_a}\right)^{\beta_a} \right\}, \quad \forall a \in A \quad (3)$$

StepA-2. 起点の選択

選択されたリンク c のリンク交通量について、起点別のリンク交通量を用いて重み付けを行い、確率的に更新起点を選択する。

ある起点 o を選択する確率を以下のように設定する。

$$P_{origin,o} = \frac{C_{origin,o}}{\sum_{s \in S} C_{origin,s}}, \quad \forall o \in S \quad (4)$$

where

$$C_{origin,s} = x_{c,s}^{(n)}, \quad \forall s \in S \quad (5)$$

StepA-3. 選択起点の最短経路探索と降下方向の決定

選択された起点に関連する OD ペアについて最短経路探索を行い、その最短経路に更新した OD ペアの需要をすべて配分(all-or-nothing 配分)する。

選択した起点の部分集合を $\varphi \subseteq S$ とする。選択されなかった起点に関連する OD ペアの交通量は更新せず、選択された起点 $s \in \varphi$ に関連する OD ペアのみ更新する。

$$y_a = x_a^{(n)} + \sum_{s \in S} \left(\delta_s \cdot x_{a,s}^{(n)} + \sum_{s \in \varphi} \sum_{t \in T} \delta_{st,a} \cdot d_{st} \right), \quad \forall a \in A \quad (6)$$

これにより、降下方向ベクトル $\{p_a^{(n)}\}$ を得る。

$$p_a^{(n)} = y_a - x_a^{(n)} = \sum_{s \in S} \left(\delta_s \cdot x_{a,s}^{(n)} + \sum_{s \in \varphi} \sum_{t \in T} \delta_{st,a} \cdot d_{st} \right), \quad \forall a \in A \quad (7)$$

以降は FW 法の一次元探索と同様である。

b) 提案手法 B の定式化

提案手法 B では、均衡が実現した時には総走行時間が小さくなっていることに着目した手法を考える。この手法では所要時間や起点からの OD 需要が大きい起点を選びやすいため、より改善できる余地を持った起点を選択することが期待される。提案手法 A と異なり、起点の選択は 1 段階の手順で構成される。起点別の総走行時間によって起点に直接重み付けを行うため、手順の単純さと計算の容易さが特徴である。以下に手順を示す。

StepB-1. 起点の選択

各起点について、起点別の総走行時間を用いて重み付けを行い、確率的に更新起点を選択する。

ある起点 o を選択する確率を以下のように設定する。

$$P_{origin,o} = \frac{C_{origin,o}}{\sum_{s \in S} C_{origin,s}}, \quad \forall o \in S \quad (8)$$

where

$$C_{origin,s} = \sum_{a \in A} x_{a,s}^{(n)} \cdot t_a(x_a^{(n)}), \quad \forall s \in S \quad (9)$$

以降は **StepA-3. 選択起点の最短経路探索と降下方向の決定**と同様である。

c) 提案手法 C の定式化

提案手法 C では、均衡が実現した時には総リンクコストが小さくなっていることに着目した手法を考える。リンクコストは目的関数の微分値に等しいため、リンクコストによる重み付けは高速な収束が期待できる。ただし、提案手法 B と異なり、OD 需要については無配慮であるという側面がある。また、起点の選択は 1 段階の手順で構成される。起点別の総リンクコストによって起点に直接重み付けを行うため、手順の単純さと計算の容易さが特徴である。以下に手順を示す。

StepC-1. 起点の選択

各起点について、起点別の総リンクコストを用いて重み付けを行い、確率的に更新起点を選択する。

ある起点 o を選択する確率を以下のように設定する。

$$P_{origin,o} = \frac{C_{origin,o}}{\sum_{s \in S} C_{origin,s}}, \quad \forall o \in S \quad (10)$$

where

$$C_{origin,s} = \sum_{a \in A} \delta_{a,s} \cdot t_a(x_a^{(n)}), \quad \forall s \in S \quad (11)$$

以降は **StepA-3. 選択起点の最短経路探索と降下方向の決定**と同様である。

4. 提案手法の収束について

提案手法のアルゴリズムが収束することを証明する。本研究では手法を 3 種類提案しているが、違いは起点への重みの与え方であり、OD ペアの確率的な部分更新という点で共通である。よって起点別の OD ペア集合の確率的な部分更新という条件下で収束することを示せば十分である。

まず、非線形多品種ネットワークフロー問題(P)を、終点別リンク交通量を用いた Fukushima¹¹⁾と同様に次のように表現する。

$$\begin{cases} \text{Min } f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j} f_{ij} \left(\sum_s x_{ij,s} \right) = \sum_{i,j} f_{ij}(x_{ij}) \\ \mathbf{x} \in X \end{cases} \quad (12)$$

subject to

$$\sum_i x_{ij,s} - \sum_k x_{jk,s} = d_{sj}, \quad s \neq j \quad (13)$$

$$x_{ij,s} \geq 0 \quad (14)$$

ここで、 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は連続 2 階微分可能な凸関数であり、 $X \subset \mathbb{R}^n$ はコンパクトな凸多面体集合である。 f の連続性により、 f が狭義に凸であれば(P)は唯一の解(最適解)をもつ。

LP 補助問題については、次のように表現できる。

$$\text{Min } f(\mathbf{x}) = \sum_s \sum_{i,j} t_{ij}^k y_{ij,s} \quad (15)$$

subject to

$$\sum_i y_{ij,s} - \sum_k y_{jk,s} = d_{sj}, \quad s \neq j \quad (16)$$

$$y_{ij,s} \geq 0 \quad (17)$$

where

$$t_{ij}^k = \left. \frac{\partial f_{ij}(\mathbf{x}_{ij})}{\partial x_{ij}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} \quad (18)$$

式(12)の交通量配分問題は以下の線形制約付き非線形計画問題として表現される。

$$\text{Min } f(\mathbf{x}) \quad (19)$$

Subject to

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (20)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad (21)$$

ここで、 \mathbf{b} は式(13)の右辺を表す。

LP 補助問題も同様に以下のように表現される。

$$\text{Min } \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{y} \quad (22)$$

Subject to

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (23)$$

$$\mathbf{y} \geq 0 \quad (24)$$

収束の証明には以下の Zangwill の収束定理¹²⁾を用いる。ただし、後述する部分更新の特性により、証明のためこの定理の一部拡張を行う。

定理 1 Zangwill の収束定理

\mathbf{A} を X 上のアルゴリズム、 f を評価関数、 $\Omega \subset X$ を解集合とする。また、問題(P)を解くためのアルゴリズムにより点列 $\{\mathbf{x}^k\}_1^\infty$ が生成されるとする。

- i) すべての点 \mathbf{x}^k はコンパクトな集合 $S \subset X$ に含まれる。
- ii) X についてのある連続関数 Z が存在し、以下を満たす。
 - a) $\mathbf{x} \notin \Omega$ のとき、 $f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{y} \in \mathbf{A}(\mathbf{x})$
 - b) $\mathbf{x} \in \Omega$ のとき、 $f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{y} \in \mathbf{A}(\mathbf{x})$
- iii) 写像 \mathbf{A} は閉じている。

これらを満たすとき、 $\{\mathbf{x}^k\}_1^\infty$ の収束部分列の極限は解となる。

この定理 1 を利用して提案手法の収束性を証明しよう。まず、多くの FW 法に関する既往文献 (Mitradjieva and Lindberg⁷⁾, Fukushima¹¹⁾, Arrache and Ouafi¹³⁾) に示される通り、i) については本提案手法でも成立する。したがって本提案手法で示すべきは ii) と iii) についてであるが、以下

の補題 1, 補題 2 が成立することから、上記の収束性が成立する。

ii) に関連して、式(15-18)の LP 補助問題について考える。 t_{ij}^k は定数であるからこのリンクコストの条件の下ですべての OD 需要を最短経路に配分しなおすことで降下方向を決定している。利用者均衡配分の定義より、最適解でない限り、いずれかの OD ペアが最短経路に配分されていないため、必ず目的関数は現在よりも小さくなる。部分更新手法においても、選択した起点に関連する一部の OD 需要を最短経路に配分しなおすため、目的関数が大きくなることはない。しかし、反復回によっては更新起点に関連するすべての OD ペアが最短経路に配分されており、部分的な収束により、目的関数が等しくなる可能性がある。このような場合を考慮し、Zangwill の収束定理¹²⁾の ii) の a) を拡張する。従来定理の主張は解以外では目的関数は減少し続けるということである。この条件を緩和し、たとえ繰り返し 1 回ごとには ii) の a) を満たさないことがあったとしても、複数の繰り返し回でみれば ii) の a) を満たし、解以外ではいずれ目的関数が減少することを以下の補題 1 で示す。

補題 1

部分更新手法は、一時的に定理 1 の ii) の a) を満たさなかったとしても、繰り返しを経てやがてこれを満たす。すなわち、部分更新手法は、一時的に停留したとしても \mathbf{x}^k が最適解でない限り、いずれ目的関数は減少する。また、 \mathbf{x}^k が最適解である場合、ii) の b) を満たし、目的関数は変化しない。

証明

$\mathbf{x}^k \notin \Omega$ とする。このとき、利用者均衡配分の定義より、 \mathbf{x}^k の時点で最短経路に配分されていない OD ペアを含む起点 $s_r \in S$ が存在する。部分更新のために選択された起点集合を Φ とする。 $s_r \in \Phi$ のとき ii) の a) は満たされる。そうでないとき、更新起点に関連するすべての OD ペアが最短経路に配分されており、部分的な収束により、 $f(\mathbf{y}^k) = f(\mathbf{x}^k)$ となり、ii) の a) を満たさない。ここで、部分更新手法では起点は確率的に選択される点に着目する。それぞれの手法である重みが与えられているが、どの起点の選択確率も 0 とはならない。故に、たとえ一時的に目的関数が停留したとしても、繰り返しを経ていずれは目的関数を減少させる起点が選択される。

$\mathbf{x}^k \in \Omega$ である場合は、利用者均衡配分の定義より、いずれの OD ペアもこれ以上所要時間を短くする最短経路は存在せず、何回配分しなおしても目的関数を小さくすることは出来ず、ii) の b) を満たす。◇

表-1 目的関数の統計指標

	Uniform distribution	Proposed A	Proposed B	Proposed C	FW
Maximum [$\times 10^6$]	1.20563 (0.99997)	1.20564 (0.99998)	1.20568 (1.00001)	1.20563 (0.99997)	1.20567 (1.00000)
Minimum [$\times 10^6$]	1.20560 (0.99994)	1.20560 (0.99994)	1.20561 (0.99995)	1.20560 (0.99994)	
Average [$\times 10^6$]	1.20561 (0.99995)	1.20562 (0.99996)	1.20564 (0.99998)	1.20561 (0.99995)	
Medium [$\times 10^6$]	1.20561 (0.99995)	1.20562 (0.99996)	1.20564 (0.99998)	1.20561 (0.99995)	
Standard Deviation	5.29	6.74	15.3	5.25	
Coefficient of Variation [$\times 10^{-6}$]	4.38	5.59	12.7	4.35	

表-2 総走行時間の統計指標

	Uniform distribution	Proposed A	Proposed B	Proposed C	FW
Maximum [$\times 10^6$]	1.32267 (0.99742)	1.32265 (0.99741)	1.32304 (0.99770)	1.32269 (0.99744)	1.32609 (1.00000)
Minimum [$\times 10^6$]	1.32229 (0.99713)	1.32214 (0.99702)	1.32225 (0.99710)	1.32203 (0.99794)	
Average [$\times 10^6$]	1.32247 (0.99727)	1.32245 (0.99726)	1.32253 (0.99732)	1.32247 (0.99727)	
Medium [$\times 10^6$]	1.32247 (0.99727)	1.32245 (0.99726)	1.32253 (0.99732)	1.32247 (0.99727)	
Standard Deviation	81.4	99.4	104	83.5	
Coefficient of Variation [$\times 10^{-5}$]	6.16	7.52	7.88	6.31	

続いて, iii)に関連して以下の補題 2 が成立する.

補題 2

写像 A は閉じている.

証明

部分更新手法のアルゴリズムを表現する写像 A は 2 つの写像で構成される.

1 つ目は降下方向の決定に関する写像である.

$$\mathbb{D}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{2m} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} x^k &\rightarrow \mathbb{D}(x^k) \\ &= \{(x^k, p^k) / p^k = y^k - x^k\} \end{aligned} \quad (26)$$

ここで y^k は通常の FW 法であれば, 全 OD を配分しなおすことで得られる, 最急勾配法に基づく解である. 部分更新手法においては一部の起点由来の OD のみを式(6)のように配分しなおすことで得られる解であり, $y^k \subset X$ であることが保証される.

2 つ目は一次元探索に関する写像である.

$$\mathbb{L}: \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (27)$$

$$\begin{aligned} (x^k, p^k) &\rightarrow \mathbb{L}(x^k, p^k) \\ &= \{x^{k+1} / f(x^{k+1}) = \min_{0 \leq \lambda \leq 1} f(x^k + \lambda p^k)\} \end{aligned} \quad (28)$$

これらより写像 A は以下のように記述される.

$$\mathbb{A}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (29)$$

$$x^k \rightarrow \mathbb{A}(x^k) = x^{k+1} \quad (30)$$

$$\text{for } k \in \mathbb{N} \text{ with } \mathbb{A} = \mathbb{LD}$$

よって写像 A は閉じている. \diamond

5. テストネットワークへの適用

(1) 演算条件

テストネットワークとして, Anaheim ネットワーク¹⁴⁾を利用する. ノード数は 416, リンク数は 914, OD ペアは 1406, トリップ数は 104,694.40, 起点数は 38 である. FW 法と一様分布による手法, 提案手法 $A \cdot B \cdot C$

のいずれも一次元探索には黄金分割法を用いる. また, 収束条件には式(31)の relative gap⁵⁾を用い, その値が 10^{-4} に達した時の演算時間を記録する.

$$r = 1 - \frac{\sum_{s \in S, t \in T} u_{st} d_{st}}{\sum_{a \in A} x_a t_a} \quad (31)$$

一様分布による手法, 提案手法では各繰り返しにおいて選択する起点の数を設定する必要があるが, ここでは総起点数の 10%程度となる 4 起点を選択することとする. 演算は筆者の環境(CPU: AMD Ryzen 3400G, RAM: DDR4-2666, 8GB, OS: Windows10)で Python によるコーディングで実装した. なお, 最短経路探索には Python のライブラリ python-igraph を用いる.

(2) 演算結果

a) 演算の安定性について

一様分布による手法と提案手法 $A \cdot B \cdot C$ はランダム性を含むが, 演算の結果が試行によって異なり, ばらついてしまつては手法の利用が困難となる. そのため, 演算の安定性について確認する.

まず, 目的関数の安定性について確認する. 一様分布による手法, 提案手法 $A \cdot B \cdot C$ で 100 回繰り返し演算を行い, relative gap が 10^{-4} に達した時の目的関数の統計指標を表-1 に示す. 比較のため, FW 法で演算した 1 回の値を同時に示しており, 括弧内には FW 法での値を 1 とした際の比を表している. いずれの手法においても目的関数の平均値は FW 法のものとはほとんど差異がなく, ばらつきを示す変動係数も 10^{-6} から 10^{-5} のオーダーと十分に小さい.

次に, 総走行時間の安定性について確認する. 本研究の提案手法はネットワークデザイン問題に適用されることを想定し, その目的関数である総走行時間の値が安定的であるかどうかを確認する. 一様分布による手法, 提案手法 $A \cdot B \cdot C$ で 100 回繰り返し演算を行い, relative gap が 10^{-4} に達した時の総走行時間の統計指標を表-2

表-3 OD 経路コストの RMSPE の統計指標

		Uniform distribution	Proposed A	Proposed B	Proposed C
Maximum	$[\times 10^{-3}]$	4.88	5.77	4.62	4.96
Minimum	$[\times 10^{-3}]$	1.40	1.43	1.21	1.38
Average	$[\times 10^{-3}]$	2.71	2.93	2.58	2.78
Medium	$[\times 10^{-3}]$	2.71	2.93	2.58	2.78

表-4 演算時間の統計指標[sec]

	Uniform distribution	Proposed A	Proposed B	Proposed C	FW
Maximum	3.20 (1.07)	2.32 (0.77)	2.36 (0.79)	3.61 (1.20)	3.00 (1.00)
Minimum	1.67 (0.56)	0.97 (0.32)	0.88 (0.29)	1.47 (0.49)	
Average	2.44 (0.81)	1.53 (0.51)	1.55 (0.52)	2.26 (0.75)	
Medium	2.40 (0.80)	1.49 (0.50)	1.49 (0.50)	2.23 (0.74)	
Standard Deviation	0.36	0.25	0.32	0.39	

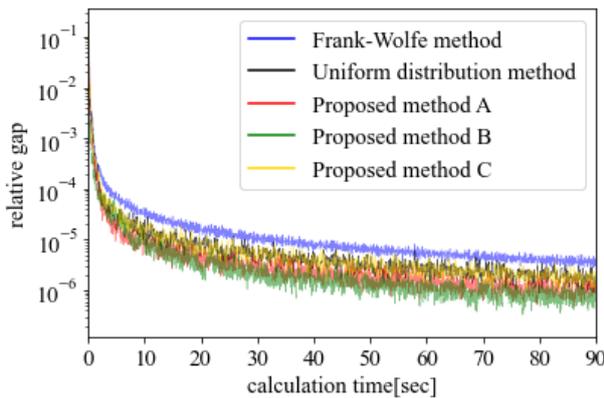


図-1 relative gap の推移の比較

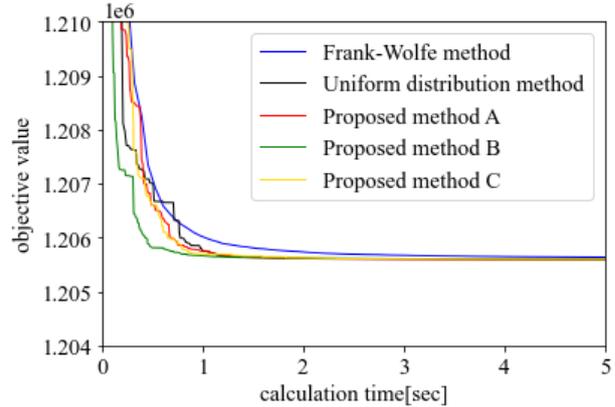


図-2 目的関数の推移の比較

に示す。比較のため、FW 法で演算した 1 回の値を同時に示しており、括弧内には FW 法での値を 1 とした際の比を表している。いずれの手法においても平均総走行時間は FW 法のものと同程度で、ばらつきを示す変動係数も 10^{-5} のオーダーであり十分に小さい。

OD 経路コストの安定性についても評価する。一様分布による手法、提案手法 A・B・C で 100 回繰り返し演算を行い、relative gap が 10^{-4} に達した時の OD 経路コストを真値として RMSPE(平均平方二乗誤差率)を算出し、その統計指標を表-3 に示す。ここで RMSPE は式(32)で表される。

$$RMSPE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{s \in S, t \in T} \left(\frac{u_{st} - u_{st}^{FW}}{u_{st}^{FW}} \right)^2} \quad (32)$$

いずれの手法でも、100 回の演算において生じた誤差率は 10^{-3} のオーダーと十分に小さく、OD 経路コストでも FW 法と同様な結果が安定的に得られている。

これらより、いずれの手法も FW 法と同様の演算の安定性が確保できている。

b) 演算時間について

続いて、各手法の演算時間について確認する。一様分布による手法、提案手法 A・B・C で 100 回繰り返し演算を行い、relative gap が 10^{-4} に達した時の演算時間の

統計指標を表-4 に示す。比較のため、FW 法で演算した 1 回の値を同時に示しており、括弧内には FW 法での値を 1 とした際の比を表している。提案手法 A・B・C において relative gap が 10^{-4} を下回った時の平均演算時間はそれぞれ 1.53 秒、1.55 秒、2.26 秒であり、提案した 3 手法すべてで、一様分布によるの手法の平均演算時間の 2.44 秒、FW 法の 3.00 秒の値を下回っている。特に提案手法 A・B が比較的速い結果を得られており、一様分布による手法の 1.6 倍程度、FW 法の 2.0 倍程度の演算速度を得ることができている。

次に、1 回の演算を取り出しその推移を確認する。それぞれの手法の時間ごとの relative gap の推移の比較を図-1 に示す。提案手法 A・B・C は一様分布による手法、FW 法と比較し、早い段階で relative gap の小さな値に到達している。また、部分的な更新手法である一様分布による手法と提案手法 A・B・C は relative gap が 10^{-5} 、 10^{-6} と減少するのに伴って FW 法との到達時間の差が増加しており、現実的な時間制約の中で FW 法が求解出来る解よりも高い水準の解を得ることができる。

それぞれの手法の時間ごとの目的関数の推移の比較を図-2 に示す。relative gap と同様に、提案手法 A・B・C は一様分布による手法、FW 法と比較し、早い段階で目的関数の小さな値に到達しており、特に提案手法 B は効率的に目的関数を小さくすることができていることが確認

表-5 繰り返し回数の統計指標

	Uniform distribution	Proposed A	Proposed B	Proposed C	FW
Maximum	381.0 (7.78)	237.0 (4.84)	266.0 (5.43)	414.0 (8.45)	49.0 (1.00)
Minimum	188.0 (3.84)	108.0 (2.20)	97.0 (1.98)	174.0 (3.55)	
Average	282.9 (5.77)	165.8 (3.38)	172.3 (3.52)	261.6 (5.34)	
Medium	280.0 (5.71)	164.0 (3.35)	164.0 (3.35)	254.0 (5.18)	
Standard Deviation	40.7	26.2	37.6	45.5	

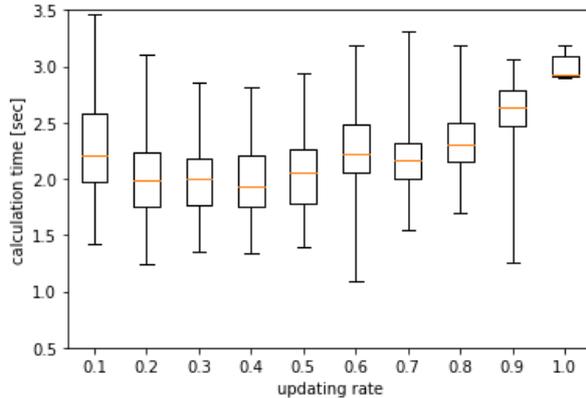


図-3 一様分布による手法の更新起点割合別演算時間

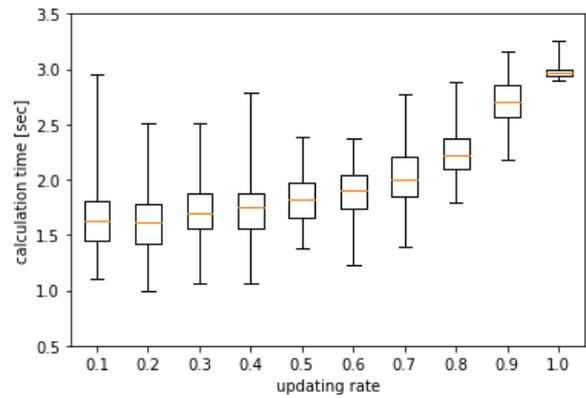


図-4 提案手法 A の更新起点割合別演算時間

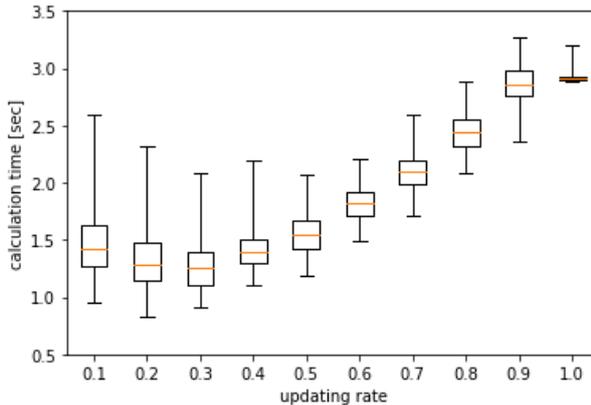


図-5 提案手法 B の更新起点割合別演算時間

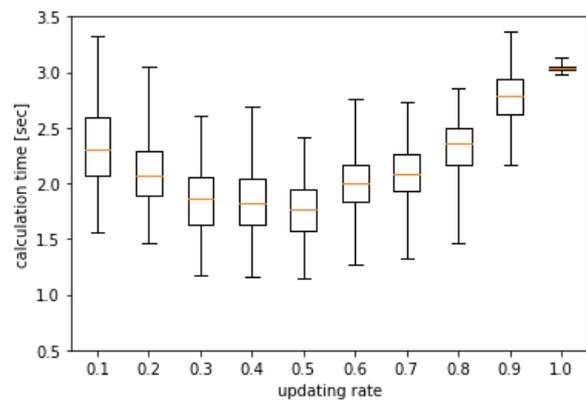


図-6 提案手法 C の更新起点割合別演算時間

できる。

これらより、提案手法 A・B・C は FW 法、一様分布による手法よりも効率的に求解が来ている。

c) 繰り返し回数について

各手法の繰り返し回数について確認する。一様分布による手法、提案手法 A・B・C で 100 回繰り返し演算を行い、relative gap が 10^{-4} に達した時の繰り返し回数の統計指標を表-5 に示す。比較のため、FW 法で演算した 1 回の値を同時に示しており、括弧内には FW 法での値を 1 とした際の比を表している。

提案手法 A・B・C において relative gap が 10^{-4} を下回った時の平均繰り返し回数はそれぞれ 165.8 回、172.3 回、261.6 回であり、提案した 3 手法すべてで、一様分布による手法の平均繰り返し回数の 282.9 回を下回っている。特に提案手法 A・B が比較的小さい結果を得られており、一様分布による手法の 0.6 倍程度に縮減されている。更新起点数が同じであるため、これは提案手法が繰り返し

1 回あたりの質を比較的向上させていることを意味する。また、一様分布による手法、提案手法 A・B・C での平均繰り返し回数は、FW 法の繰り返し回数よりも 3.0 倍から 6.0 倍程度増加しており、1 回あたりの繰り返し演算量を減少させる代わりに、繰り返し回数を増加させることで全体の演算効率化を実現している。

これらより、全体の演算効率化には、繰り返し 1 回あたりの演算量と繰り返し回数のバランスが重要であり、適切な演算削減量、すなわち起点の更新割合が存在するのではないかと考えられる。

d) 更新起点割合について

適切な起点の更新割合について確認する。一様分布による手法、提案手法 A・B・C において更新起点割合を 10% ずつ増加させ、それぞれ 100 回繰り返し演算を行い、relative gap が 10^{-4} に達した時の演算時間、繰り返し回数を記録する。

演算時間についての箱ひげ図を図 3 から図 6 に、繰り返し

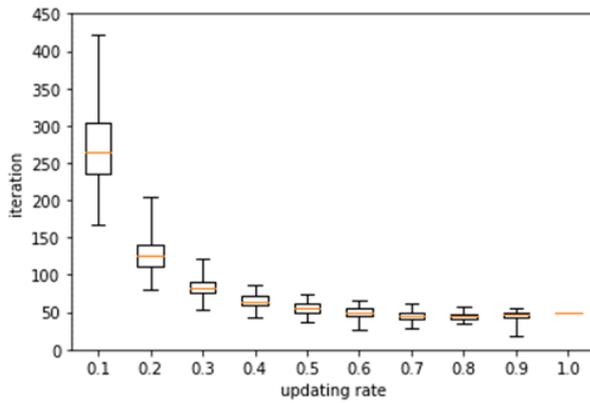


図-7 一様分布による手法の更新起点割合別繰り返し回数

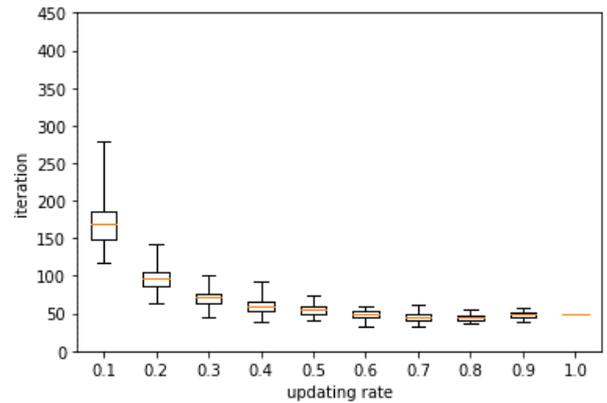


図-8 提案手法 A の更新起点割合別繰り返し回数

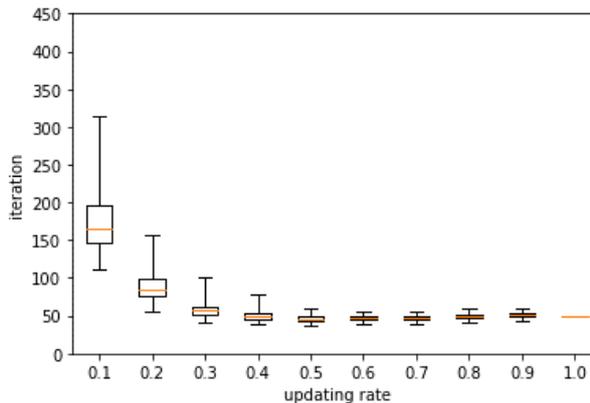


図-9 提案手法 B の更新起点割合別繰り返し回数

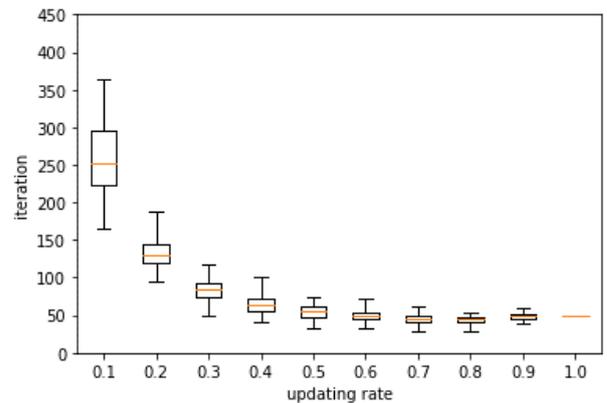


図-10 提案手法 C の更新起点割合別繰り返し回数

繰り返し回数についての箱ひげ図を図 7 から図 10 に示す。

まず、演算時間、繰り返し回数ごとに確認する。演算時間については、起点更新割合の変化に伴って変化しており、それぞれの手法で最適な更新割合が存在する。また、その割合はそれぞれの手法で異なる。繰り返し回数については、いずれの手法も、更新起点割合の増加に伴って減少傾向がみられ、全起点更新、すなわち FW 法と同様となる場合の繰り返し回数である 49 回へと収束する。また、一部の試行では FW 法の繰り返し回数を下回っているものがあり、部分更新であるにもかかわらず、全起点の更新よりも少ない繰り返し回数で求解が出来ている。これは不要な起点の更新を避けることで、FW 法の弱点である解の振動を抑制出来た結果であると考えられる。

次に手法ごとに確認する。一様分布による手法では、最適更新割合は 40% である。他の手法と比較し、同一の更新割合内でばらつきが大きくなっているが、これは一様分布に基づく起点更新のため、試行による起点選択のばらつきが大きくなることに起因する。また、更新割合の変化に対する演算時間の変化が他の手法に比べ小さく、特に更新割合が 20% から 50% にかけて演算時間にほとんど変化がみられず、一回当たりの演算量の増加と繰り返

し回数が変化しても総演算時間が変化しないことがわかる。これより、効率の良い演算には、単なる演算量の削減だけでなく更新する必要性の高い起点を選択する必要があることが確認できる。

提案手法 A では、最適な起点更新割合は 20% である。一様分布による手法と同様、同一の更新割合内ではばらつきが大きいが、これは提案手法 A が混雑リンクを確率的に選択し、更新起点を確率的に選択するという 2 段階のステップを要することに起因していると考えられる。

提案手法 B では、最適な起点更新割合は 30% であり、この時の演算時間の中央値 1.28 秒はすべての手法・すべての更新割合の中で最も短く FW 法の 2.3 倍程度の演算速度が得られている。一方で、最適更新割合における繰り返し回数は、FW 法と大きな差異はない。したがって、この割合に基づいたとき、提案手法 B における各繰り返しあたりにおける解の更新も優れた結果となっている。

提案手法 C では、最適な起点更新割合は 50% である。提案手法 B と同様に、最適更新割合における繰り返し回数は、FW 法と大きな差異はない。したがって、この割合に基づいたときは、提案手法 C における各繰り返しあたりにおける解の更新も優れた結果となっている。

これらのことから起点には更新の必要性の高いものと

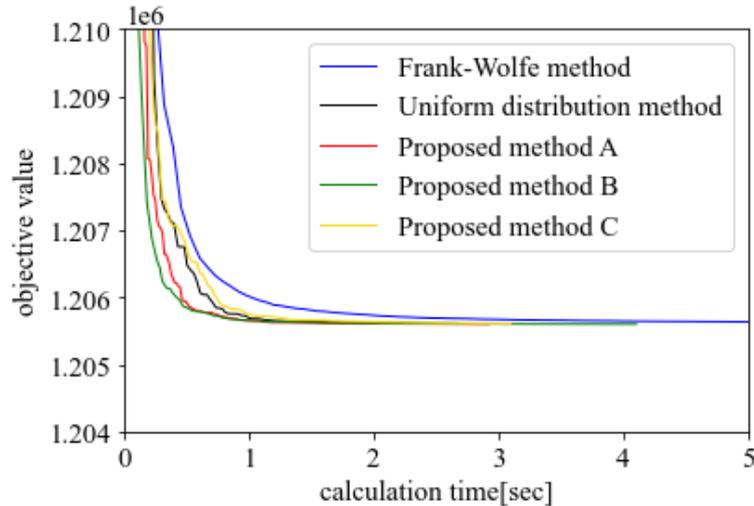


図-11 最適更新割合における目的関数の推移の比較

そうでないものが存在し、全起点を更新するFW法や一様分布に基づく部分更新手法では降下ベクトルに大きな影響を与えないものも含まれているとみられる。これらの更新にも計算負荷がかかるため、演算時間が大きくなるものと考えられる。したがって、更新起点割合と重みの与え方の組み合わせを適切に設定することで、更新の必要性の高い起点を効率的に更新することが可能である。

最後に、目的関数の推移についても確認する。それぞれの手法の最適更新割合における時間ごとの目的関数の推移の比較を図-11に示す。それぞれの手法の更新割合10%における時間ごとの目的関数の推移の比較を行った図-2と比較し、目的関数は急速に低下していることが確認でき、解の更新が停滞するような様子は生じていないことから、効率的に求解が出来ている。このことは、求解に必要な起点の選択・更新が効率的であることを意味しており、更新起点の数を増加させることによって、これを可能としている。また、演算時間の最も短くなった提案手法Bは総走行時間によって起点に重み付けしており、OD需要を判断基準に加えたことが、求解に必要な起点の効率的な選択・更新を可能としている。

6. おわりに

本研究では利用者均衡配分の解法であるFW法の演算効率化のための手法を提案した。提案手法は先行研究の起点の部分更新の着想に基づき、求解中に得られる情報を用いた起点への重み付けによって確率的に起点を選択し更新する3つの手法を提案し定式化を行った。提案手法ではそれぞれ、混雑リンクの起点別リンク交通量、起点別の総走行時間、起点別の総リンクコストによって起

点に重み付けし、起点を選択した。また、これらの部分更新の手法が収束することの証明も示した。

提案した手法、および先行研究の手法をAnaheimネットワークに適用し、パフォーマンスを比較した結果、起点の部分更新において重み付けを用いる提案手法は、安定的かつ従来の手法よりも効率的な求解が可能であることが明らかとなった。また、更新起点割合が演算時間に関係し、最も適切な条件下ではFW法の2.3倍程度の演算速度が得られた。起点には更新の必要性の高いものとして存在するとみられ、更新起点割合と重みの与え方の組み合わせにより更新の必要性の高い起点を効率的に更新することが可能である。

本研究では、OD需要を考慮した提案手法Bが最も速い演算速度を得られたが、この結果の解析的な意味合いは明らかに出来ていない。また、他のネットワークに適用した場合には、適切な手法や更新割合は異なる可能性がある。今後は、各手法の演算速度について解析的な解釈を得ることで、他のネットワークでも適用可能な理論づくりを行う。また、本研究では確率の与え方について、重みを単純に総和で割ることで算出したが、効率的な起点選択のため、多項ロジットモデルに基づく確率の与え方など他の手法も検討する。本研究の提案手法はFW法における解の更新の部分の最短経路探索と降下方向の決定の部分の改良であり、Conjugate direction Frank-Wolfe Methods⁷⁾など他の部分の改良手法と組み合わせが可能であるが、全起点更新のFW法への適用を前提としたものも少なくないだろう。これらの手法と組み合わせた場合の影響などについても確認する必要がある。

参考文献

- 1) Frank, M., and Wolfe, P.: An algorithm for quadratic programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, 3 (1-2), pp.95-110, 1956.
- 2) Leblanc, L.J., Morlok, E.K., and Pierskalla, W.P.: An efficient approach to solving the road network equilibrium traffic assignment problem. *Transportation Research* 9 (5), pp.309-318, 1975.
- 3) Dial, R.B.: A path-based user-equilibrium traffic assignment algorithm that obviates path storage and enumeration. *Transportation Research Part B*, 40 (10), pp.917-936, 2006.
- 4) Bar-Gera, H.: Origin-based algorithm for the traffic assignment problem. *Transportation Science*, 36 (4), pp.398-417, 2002.
- 5) Nie, Y.: A class of bush-based algorithms for the traffic assignment problem, *Transportation Research Part B*, 44 (1), pp.73-89, 2010.
- 6) Bar-Gera, H.: Traffic assignment by paired alternative segments, *Transportation Research Part B*, vol. 44 (8-9), pp.1022-1046, 2010.
- 7) Mitradjieva, M, and Lindberg, P.O.: The Stiff Is Moving—Conjugate Direction Frank-Wolfe Methods with Applications to Traffic Assignment, *Transportation Science*, 47 (2), pp.280-293, 2013.
- 8) 鷹尾和亭, 朝倉康夫: 最短ツリーの記憶による交通量配分の経路探索の効率化, *土木計画学研究・論文集*, 26 卷, pp.527-533, 2009.
- 9) 杉浦聡志: 起点別リンク交通量の部分的更新による利用者均衡配分の効率的求解アルゴリズムの提案, 第 62 回土木計画学研究発表会・講演集, 2020.
- 10) Luo, Z.Q., and Tseng, P.: On the Convergence of the Coordinate Descent Method for Convex Differentiable Minimization, *Journal of Optimization Theory and Applications.*, 72 (1), pp. 7-35, 1992.
- 11) Fukushima, M.: A modified Frank-Wolfe algorithm for solving the traffic assignment problem, *Transportation Research Part B*, 18(2), pp.169-177, 1984.
- 12) Zangwill, W.: *Nonlinear programming: a unified approach*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1969.
- 13) Arrache, S., and Ouafi, R.: Accelerating Convergence of the Frank-Wolfe Algorithm for Solving the Traffic Assignment Problem, *International Journal of Computer Science and Network Security*, 8(5), 2008.
- 14) Transportation Networks for Research Core Team. *Transportation Networks for Research*. <https://github.com/bstabler/TransportationNetworks>, Accessed Jan.,31, 2021.

(2021.???.?? 受付)

Acceleration of User Equilibrium Assignment
by Introduction of Randomness into Descending Vector Calculation

Kanau KAMIYA, Satoshi SUGIURA