

相乗り通勤行動を考慮した居住地選択モデル

鬼頭 尚志¹・高山 雄貴²

¹学生会員 金沢大学 大学院自然科学研究科 (〒 920-1192 石川県金沢市角間町)

E-mail: n.kito@stu.kanazawa-u.ac.jp

²正会員 金沢大学准教授 理工研究域 (〒 920-1192 石川県金沢市角間町)

E-mail: ytakayama@se.kanazawa-u.ac.jp

本研究では、相乗り通勤を考慮した居住地選択モデルを構築し、相乗り通勤が都市の空間構造に与える影響を明らかにする。そのために、Alonso¹⁾型の居住地選択モデルの通勤手段に相乗り通勤を追加する。さらに、規模の経済の影響により、相乗り通勤人口が多いほど相乗りをするための追加的なコストが低くなる状況を表現する。そして、ポテンシャルゲームの性質を利用した解析により安定均衡状態の特性を明らかにするとともに、HOV レーン設置による効用変化についての性質を示す。

Key Words : *HOV lanes, carpool, scale economy, residential location choice, traffic congestion, potential game*

1. はじめに

(1) 背景と目的

人口・経済集積は、都市を発展させる一方で、交通混雑等の不便益をもたらす。この交通混雑に対して、アメリカでは、High-Occupancy Vehicle (HOV) レーンの設置により、“相乗り通勤”を促進させる方策がとられている。この相乗り通勤は、利用者が多ければ多いほど効率化が進む (e.g., 同乗者を見つけやすい) といった形で“規模の経済”が働く。ただし、この効果の存在は、利用者が少ない状況下では、相乗り通勤が非効率になる (e.g., 同乗者を見つけるための負担が非常に大きくなる) ことを意味する。

相乗り通勤の規模の経済性は、上述した特徴から、HOV レーン設置の影響を決定づける要素になりうる。さらに、その影響は、交通混雑の緩和だけでなく、長期的には、都市内部の土地利用を変化させる (e.g., 都市の郊外化) ことにもつながる。しかし、相乗り通勤に働く規模の経済を明示的に考慮して HOV レーンの効果を検証した研究は存在しない。

そこで、本研究では、相乗りにおける規模の経済を考慮した上で、HOV レーンの設置が都市の空間構造に与える影響を明らかにする。そのために、Alonso¹⁾型の居住地選択モデルの通勤手段に、規模の経済を考慮した相乗り通勤を追加する。そして、そのモデルにポテンシャル関数が存在することを利用して、均衡状態の特性を示す。また、モデルの居住地を 2 地点にすることで、より詳細な均衡状態の特性を調べる。より具体的には、HOV レーン設置を想定し、設置前後の均衡

効用変化と、都市の空間的構造について調べる。

(2) 関連研究と本研究の位置づけ

社会問題である交通混雑対策として、HOV レーンは交通量を減少させることが期待されている。そのため、これまでに多くの HOV レーンに関する研究が行われてきた (e.g., Yang and Huang²⁾, Konishi and Mun³⁾)。しかし、これらの研究では、相乗り行動における規模の経済を無視している。

一方、都市内空間構造の規則性に関する理論 (e.g., Alonso¹⁾, Fujita⁴⁾, Arnott⁵⁾) が長年に渡り蓄積されている。しかし、これらの研究では、単純な交通モードしか扱っておらず、規模の経済を考慮した相乗り通勤を考慮したものはない。

これらの研究と比較すると、本研究には、複数の居住地・単独での通勤と、規模の経済を考慮した相乗り通勤者が利用する HOV レーンが存在する状況下で、相乗り通勤の空間構造へ与える影響を分析できるモデルを構築している点に特徴がある。さらにポテンシャル関数の存在を使用した手法により、その特性を理論的に解明している。そして、2 居住地モデルでの理論解析により、相乗りを導入しても、効用が改善されない、という知見を得ることに成功している。

2. モデル

(1) 設定

本研究では、1 箇所の CBD と A 箇所の居住地が結ばれている単一中心都市を考える。居住地は、CBD から近い

順にインデックスを付け、その集合を $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, A\}$ と表す。そして、居住地 $a \in \mathcal{A}$ の人口を N_a で表す。各居住地の面積はすべて同一で、 L であると仮定する。

企業はすべて都心に立地しており、労働者は居住地から CBD に通勤する。労働者は 1 人で通勤する単独通勤 (solo drive) か、複数人で相乗り通勤 (carpool) をするかを選択できる。これらの通勤手段の集合を $\mathcal{C} = \{s, p\}$ と表す。また、相乗り通勤者は、燃料費や駐車場代などの自動車を保有するために固定的にかかる自動車保有費用 c_F を折半できるが、追加的な費用 θ が生じると仮定する。この追加的な費用に想定されるものとしては、同じ目的地の相乗り通勤者とマッチングする待ち時間等の相乗り特有の不便さが挙げられる。相乗り通勤者が増加することでこの費用は小さくなることから、規模の経済を表現する項となっている。

労働者はすべて均質であり、総数は固定的に N である。各労働者は、居住地 $a \in \mathcal{A}$ 、通勤手段 $i \in \mathcal{C}$ を選択する。居住地・通勤手段別の労働者数 (以降、人口・通勤手段分布と呼ぶ) を $\mathbf{n} = (n_{a,i})_{a \in \mathcal{A}, i \in \mathcal{C}}$ と表す。

(2) 主体の行動

a) 労働者の通勤行動

まず、労働者の通勤行動について考えよう。各居住地を結ぶ道路はすべて均質であり、居住地 $a-1$ と a の間を“道路 a ”と呼ぶ。道路 a の総容量は μ_a であり、通勤手段毎にレーンが分けられていると仮定する。道路 a の単独自動車レーンのシェアは $\phi_a \in (0, 1)$ で表す。また、相乗り通勤者は、移項の議論を単純化するために、2 人で通勤すると仮定する (この仮定を緩和しても、移項の定性的な結果は変わらない)。このとき、道路 a の各レーンの交通量 $x_{a,i}$ は、レーンごとに以下のように表される:

$$\begin{cases} x_{a,s}(n_{a,s}) = \sum_{b=a}^A n_{b,s}, \\ x_{a,p}(n_{a,p}) = \sum_{b=a}^A \frac{n_{b,p}}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

そして、居住地 a に住む労働者の通勤手段 i 別の通勤費用 $c_{a,i}(n_{a,i})$ は、それぞれ以下で与えられる:

$$\begin{cases} c_{a,s}(n_{a,s}) = \sum_{b=1}^a c\left(\frac{x_{a,s}(n_{a,s})}{\phi_a \mu_a}\right) + c_F, \\ c_{a,p}(n_{a,p}) = \sum_{b=1}^a c\left(\frac{x_{a,p}(n_{a,p})}{(1-\phi_a)\mu_a}\right) + \frac{c_F}{2} + \frac{\theta}{N_p}. \end{cases} \quad (2)$$

ここで、右辺第 1 項は交通量 $x_{a,i}$ ・道路容量 $\mu_{a,i}$ に応じて定まる交通混雑の影響であり、 x の単調増加、かつ凸関数 $c\left(\frac{x_{a,i}}{\mu_{a,i}}\right)$ で表されると仮定する。また、 N_p は総相乗り通勤者数を表す。なお、 N_i は以下で与えられる:

$$N_i = \sum_{a \in \mathcal{A}} n_{a,i}. \quad (3)$$

b) 労働者の財の消費行動

この都市の労働者は均質であるため、同一の効用関数を有する。従って、この労働者は、居住地 a 、通勤手段 i により特徴づけられる。この労働者の効用関数は、合成財の消費量 $z_{a,i}$ 、住宅面積 y_a の準線形関数 $u(z_{a,i}, y_a)$ により与えられると仮定する:

$$u(z_{a,i}, y_a) = z_{a,i} + f(y_a). \quad (4)$$

ここで、 $f(x)$ は狭義単調増加、凹、かつ $x > 0$ の範囲で 2 階微分可能な関数である。さらに、 $f(x)$ の導関数 $f'(x) = df(x)/dx$ に関して、 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty$ が成立すると仮定する。合成財をニューメーラールとすると、予算制約は以下で与えられる:

$$w = z_{a,i} + r_a y_a + c_{a,i}. \quad (5)$$

ここで、 w は企業から支払われる賃金、 r_a は居住地 a の地代である。また、 $c_{a,i}$ は居住地 a 、通勤手段 i の労働者にかかる交通費用である。財消費に関する効用最大化問題の一階条件から、次の関係が得られる:

$$\begin{cases} f'(y_a) = r_a & \text{if } y_a > 0 \\ f'(y_a) \leq r_a & \text{if } y_a = 0 \end{cases} \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (6)$$

仮定より $y_a = 0$ のとき $f'(y_a)$ が無限大となることから、常に $y_a > 0$ が生じる。したがって、地代 r_a は住宅面積 y_a に応じて、以下のように定まる:

$$r_a = f'(y_a) > 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (7)$$

居住地 a の総労働者数を N_a で表すと、居住地 a の土地供給量が L 、需要量が L/N_a が得られる。なお、 N_a は以下の式で与えられる:

$$N_a = \sum_{i \in \mathcal{C}} n_{a,i}. \quad (8)$$

以上の関係を利用すれば、間接効用関数 $v_{a,i}$ が以下の与えられる:

$$v_{a,i} = w - c_{a,i} + h(N_a). \quad (9)$$

ここで、 $h(N_a) = f\left(\frac{L}{N_a}\right) - \frac{L}{N_a} f'\left(\frac{L}{N_a}\right)$ である。なお、 $h(N_a)$ は、 $f(y_a) - r_a y_a$ と書き換えられることからわかるように、住宅消費により得られる効用増分を表している。また、

$$h'(N_a) = \frac{L^2 f''\left(\frac{L}{N_a}\right)}{N_a^3} < 0 \quad (10)$$

より、 $h(N_a)$ は N_a の単調減少関数である。

(3) 均衡状態の定式化

本モデルにおいて、労働者は居住地・通勤手段を選択する。その結果、均衡状態における人口・通勤手段分布 \mathbf{n}^* が決まる。本節では、この均衡状態が満たす均衡条件を定式化する。

均衡状態が満たす均衡条件は、次の 2 条件で与えられる:

$$\begin{cases} v^* = v_{a,i}(\mathbf{n}) & \text{if } n_{a,i} > 0, \\ v^* \geq v_{a,i}(\mathbf{n}) & \text{if } n_{a,i} = 0, \end{cases} \quad (11a)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{i \in \mathcal{C}} n_{a,i} = N. \quad (11b)$$

ここで、 v^* は均衡効用、 $v_{a,i}(\mathbf{n})$ は居住地 a に居住し通勤手段 i で通勤する労働者の効用水準を表す:

$$v_{a,i}(\mathbf{n}) = w - c_{a,i}(n_{a,i}) + h(N_a). \quad (12)$$

条件 (11a) は、立地選択均衡状態であり、均衡状態では、単一の労働者の選択変更のみでは自らの効用を改善できないことを表している。また、条件 (11b) は労働者数の人口保存則である。

3. 均衡状態の特性分析

本章では、前章で示したモデルの均衡状態の特性を調べる。具体的には、構築したモデルにポテンシャル関数が存在することを示したうえで、その性質を利用して、均衡条件を利用して、均衡状態における居住地・通勤手段別の労働者分布の特性を示す。

(1) ポテンシャルゲーム

本節では、混交状態の特性を調べるために、均衡状態における人口・通勤手段分布 \mathbf{n} が (プレイヤーが労働者の) ポテンシャルゲームの Nash 均衡状態とみなすことができることを示しておこう。均衡状態は、均衡条件 (11) より、プレイヤーの集合が $\mathcal{S} \equiv [0, N]$ 、戦略集合が $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$ 、利得関数が $\mathbf{v}(\mathbf{n}) = (v_{a,i}(\mathbf{n}))_{a \in \mathcal{A}, i \in \mathcal{C}}$ の population game の Nash 均衡状態と一致する。なお、以降では、このゲームをゲーム $S = \{\mathcal{S}, \mathcal{A} \times \mathcal{C}, \mathbf{v}\}$ と表記する。

このゲーム S は、Sandholm⁶⁾ により示されているように、任意の $\mathbf{n} \in \Delta \equiv \{\mathbf{n} | \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{i \in \mathcal{C}} n_{a,i} = N, n_{a,i} \geq 0 \forall a \in \mathcal{A} \text{ and } i \in \mathcal{C}\}$ に対して、次の条件を満たすポテンシャル関数 $P(N)$ が存在すれば、ポテンシャルゲームである:

$$\frac{\partial P(\mathbf{n})}{\partial n_{a,i}} = v_{a,i}(\mathbf{n}) \quad \forall a \in \mathcal{A} \text{ and } i \in \mathcal{C}. \quad (13)$$

この条件 (13) は、Sandholm⁶⁾ により、“externality symmetry” と呼ばれる次の条件と等価であることが示されている:

$$\frac{\partial v_{a,i}(\mathbf{n})}{\partial n_{b,j}} = \frac{\partial v_{b,j}(\mathbf{n})}{\partial n_{a,i}} \quad \forall a, b \in \mathcal{A}, i, j \in \mathcal{C} \text{ and } \mathbf{n} \in \Delta. \quad (14)$$

本モデルの $\frac{\partial v_{a,i}(\mathbf{n})}{\partial n_{b,j}}$ は、(12) より、以下で表される:

$$\frac{\partial v_{a,s}(\mathbf{n})}{\partial n_{b,s}} = - \sum_{d=1}^{\min\{a,b\}} \frac{\partial c(\frac{x_{d,s}}{\phi_d \mu_d})}{\partial x_{d,s}} = \frac{\partial v_{b,s}(\mathbf{n})}{\partial n_{a,s}}, \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{a,p}(\mathbf{n})}{\partial n_{b,p}} &= - \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{\min\{a,b\}} \frac{\partial c(\frac{x_{d,p}}{(1-\phi_a)\mu_a})}{\partial x_{d,p}} + \frac{\theta}{N_p^2} \\ &= \frac{\partial v_{b,p}(\mathbf{n})}{\partial n_{a,p}}, \end{aligned} \quad (15b)$$

$$\frac{\partial v_{a,i}(\mathbf{n})}{\partial n_{a,j}} = h'(N_a) \frac{\partial N_a}{\partial n_{b,j}} = h'(N_a) \frac{\partial N_b}{\partial n_{a,i}} = \frac{\partial v_{a,j}(\mathbf{n})}{\partial n_{a,i}}, \quad (15c)$$

$$\frac{\partial v_{a,i}(\mathbf{n})}{\partial n_{b,j}} = 0 = \frac{\partial v_{b,j}(\mathbf{n})}{\partial n_{a,i}}. \quad (15d)$$

したがって、ゲーム S は (14) を満たすため、次のポテンシャル関数 $P(\mathbf{n})$ を持つポテンシャルゲームである:

$$P(\mathbf{n}) = wN - P_1(\mathbf{n}) + P_2(\mathbf{n}) - P_3(\mathbf{n}). \quad (16)$$

ここで、 $P_1(\mathbf{n}), P_2(\mathbf{n}), P_3(\mathbf{n})$ は、各々、交通混雑、相乗りの規模の経済、土地消費に関する影響を表す凸関数であり、次の関係を満たす:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1(\mathbf{n})}{\partial n_{a,s}} = \sum_{b=1}^a c(\frac{x_{a,s}}{\phi_a \mu_a}), \\ \frac{\partial P_1(\mathbf{n})}{\partial n_{a,p}} = \sum_{b=1}^a c(\frac{x_{a,p}}{(1-\phi_a)\mu_a}), \end{cases} \quad (17a)$$

$$P_2(\mathbf{n}) = -c_F \sum_{a \in \mathcal{A}} \left(n_{a,s} + \frac{n_{a,p}}{2} \right) - \theta \ln[N_p], \quad (17b)$$

$$P_3(\mathbf{n}) = - \sum_{a \in \mathcal{A}} N_a f\left(\frac{L}{N_a}\right). \quad (17c)$$

$P_1(\mathbf{n}), P_2(\mathbf{n}), P_3(\mathbf{n})$ が凸関数であることの証明は、付録付録 I を参照。

ゲーム S がポテンシャルゲームであることから、その均衡状態は、次の最適化問題の Karush-Kuhn-Tucker(KKT) 条件を満たす \mathbf{n}^* の集合と一致する:

$$\max_{\mathbf{n}} P(\mathbf{n}) = wN - P_1(\mathbf{n}) + P_2(\mathbf{n}) - P_3(\mathbf{n}) \quad (18a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{n} \in \Delta. \quad (18b)$$

この事実、上記の問題の KKT 条件が、均衡条件 (11) と一致することから容易に確認できる。

(2) 均衡状態の一意性と安定性

均衡状態の一意性は、(18) より、ポテンシャル関数 $P(\mathbf{n})$ の形状により確認できる。より具体的には、 $P(\mathbf{n})$ が単峰であればゲーム S の均衡状態は一意であり、そうでなければ一意とは言えない。この事実と、 $P_1(\mathbf{n}), P_2(\mathbf{n}), P_3(\mathbf{n})$ の凸性より、 $P(\mathbf{n})$ は必ずしも凹関数ではなく、凸関数にもなり得る。したがって、 $P(\mathbf{n})$ は必ずしも単峰ではなく、複数の均衡状態が存在し得る。

次に、均衡選択のために、ゲーム S の均衡状態の局所的な漸近安定性を調べる。この方法として、ポテンシャルのような静学的アプローチと安定性という動学的アプローチを一致させる必要がある。そこで、均衡状態への調整ダイナミクス $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{V}(\mathbf{n})$ を定義する。ここで、 $\dot{\mathbf{n}}$ は状態 \mathbf{n} の速度変化を表す。本稿では、そのダイナミクスとして、Nash Stationary(NS) と Positive Correlation(PC) の二つの条件を満たす admissible dynamics を考える。具体的に、NS は、調整ダイナミクスの定常状態が居住地選択の Nash 均衡と一致することを要求しており、PC は、調整ダイナミクスと効用関数が正の相関を持つことを要求している。

Sndholm⁶⁾ で示されているように、ポテンシャル関数が存在する場合、局所的な安定・不安定均衡状態は次の性質を有する：

ポテンシャル関数を局所的に最大化する均衡状態 \mathbf{n}^* は、admissible dynamics の下で局所的に安定であり、それ以外の均衡状態は不安定である。

したがって、ゲーム S の均衡状態の安定性は、ポテンシャル関数の形状のみから確認できることがわかる。

(18) で与えられるポテンシャル関数 $P(\mathbf{n})$ の形状は、通勤手段別の交通混雑による空間集積の不経済を表現した第 1 項 $P_1(\mathbf{n})$ 、相乗りによる規模の経済を表現した第 2 項 $P_2(\mathbf{n})$ 、土地消費に伴う空間集積の不経済を表現した第 3 項 $P_3(\mathbf{n})$ によって決まる。これは、安定均衡状態が、本モデルに含まれる空間集積の不経済、規模の経済・不経済のバランスに応じて決まることを意味している。実際、ポテンシャル関数 $P(\mathbf{n})$ のうち、第 2 項が卓越し凸関数となると、通勤手段が偏った状態が安定均衡状態となる。また、第 1, 3 項が卓越し $P(\mathbf{n})$ が凹関数となる場合は、人口・通勤手段分布が分散した状態が唯一均衡状態となる。

ポテンシャル関数が有する性質により、状態 \mathbf{n}^0 を初期状態とした際の実現する安定均衡状態は、ポテンシャル関数を局所的に最大化する \mathbf{n}^* を \mathbf{n}^0 から探索することにより得られる。すなわち、簡単な最適化問題を局所的に解くだけで、容易に安定均衡状態を得ることができる。

(3) 均衡状態における人口・通勤手段分布

これまでは均衡解の一意性・安定性に焦点を当てた議論をしてきた。そこで、次に、均衡状態における人口・通勤手段分布の特性について調べよう。居住地 a ・企業 i の労働者の効用関数は、(12) で与えられる。これを利用すると、次の関係が得られる：

$$v_{a,s}(\mathbf{n}) - v_{a,p}(\mathbf{n}) = -c_{a,s}(\mathbf{n}) + c_{a,p}(\mathbf{n}). \quad (19)$$

したがって、均衡状態 \mathbf{n}^* の台 $\text{supp}(\mathbf{n}^*) = \{(a, i) | n_{a,i} > 0, a \in \mathcal{A}, i \in \mathcal{C}\}$ を用いると、次の関係が得られる：

$$\begin{aligned} & -c_{a,s}(\mathbf{n}^*) + c_{a,p}(\mathbf{n}^*) \\ & \begin{cases} = 0 & \text{if } (a, s), (a, p) \in \text{supp}(\mathbf{n}^*), \\ \geq 0 & \text{if } (a, s) \in \text{supp}(\mathbf{n}^*), (a, p) \notin \text{supp}(\mathbf{n}^*), \\ \leq 0 & \text{if } (a, s) \notin \text{supp}(\mathbf{n}^*), (a, p) \in \text{supp}(\mathbf{n}^*). \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

この関係を利用すると、均衡状態 \mathbf{n}^* が次の性質を有することが示せる： $(a, s), (a, p) \in \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ であれば、 $c_{a,s}(\mathbf{n}^*) = c_{a,p}(\mathbf{n}^*)$ である。すなわち、労働者は、居住地ごとに、各々、通勤費用が等しくなるように分布する。

$(a, i), (a-1, i) \in \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ であれば、 $v_{a,i}(\mathbf{n}^*) = v_{a-1,i}(\mathbf{n}^*)$ となる。この条件から以下の関係が得られる：

$$h(N_a^*) - h(N_{a-1}^*) = c\left(\frac{x_{a,i}}{\mu_{a,i}}\right) > 0. \quad (21)$$

したがって、均衡状態において $N_a^* > 0$ かつ $N_{a-1}^* > 0$ であれば、 $N_a^* < N_{a-1}^*$ となる。すなわち、CBD から遠い居住地ほど人口が少ない。

4. 政策分析

本研究で構築したモデルの均衡状態は、外部性の存在により、一般的には効率的とは言えない。そこで、本章では、社会厚生関数を定義した上で、効率的な状態を達成するための政策とその効果を検証する。

(1) 社会厚生関数の定義

社会厚生関数は、生産者余剰・消費者余剰の総和で定義する。このとき、社会厚生関数最大化問題は、次のように表すことができる：

$$\max_{\mathbf{n}} W(\mathbf{n}) = wN - W_1(\mathbf{n}) + W_2(\mathbf{n}) - W_3(\mathbf{n}) \quad (22a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{n} \in \Delta. \quad (22b)$$

ここで、 $W_1(\mathbf{n})$ 、 $W_2(\mathbf{n})$ 、 $W_3(\mathbf{n})$ は以下で与えられる、各々、交通混雑・相乗りの規模の経済・土地消費の影響を表す項である：

$$W_1(\mathbf{n}) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \left\{ x_{b,s} c\left(\frac{x_{b,s}}{\phi_b \mu_b}\right) + 2x_{b,p} c\left(\frac{x_{b,p}}{(1-\phi_b) \mu_b}\right) \right\}, \quad (23a)$$

$$W_2(\mathbf{n}) = -c_F \left(N_s + \frac{N_p}{2} \right) - \theta, \quad (23b)$$

$$W_3(\mathbf{n}) = - \sum_{a \in \mathcal{A}} N_a f\left(\frac{L}{N_a}\right) = P_3(\mathbf{n}). \quad (23c)$$

社会厚生関数 $W(\mathbf{n})$ は、 $W_1(\mathbf{n})$ と $W_3(\mathbf{n})$ が凸関数、 $W_2(\mathbf{n})$ が線形関数であることから、単峰であり、均衡状態が一意である。

(2) 社会的最適状態における人口・通勤手段分布

社会的最適状態 \mathbf{n}^o は、社会厚生関数 $W(\mathbf{n})$ の最大化点であることから、以下で与えられる最適化問題 (23) の KKT 条件を満足する:

$$\begin{cases} \hat{v}^* = \hat{v}_{a,i}(\mathbf{n}) & \text{if } n_{a,i}^o > 0, \\ \hat{v}^* \geq \hat{v}_{a,i}(\mathbf{n}) & \text{if } n_{a,i}^o = 0, \end{cases} \quad (24a)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{i \in \mathcal{C}} n_{a,i}^o = N. \quad (24b)$$

ここで、 $\hat{v}_{a,i}(\mathbf{n})$ は以下で与えられる:

$$\begin{cases} \hat{v}_{a,s}(\mathbf{n}) = v_{a,s}(\mathbf{n}) - \sum_{b=1}^a c'(\frac{x_{b,s}}{\phi_b \mu_b}) x_{b,s} \\ \hat{v}_{a,p}(\mathbf{n}) = v_{a,p}(\mathbf{n}) - \sum_{b=1}^a c'(\frac{x_{b,p}}{(1-\phi_b) \mu_b}) x_{b,p} + \frac{\theta}{N_p}. \end{cases} \quad (25)$$

なお、最適状態における各変数は、上付き添え字 o で示す。

この KKT 条件をと要すると、前章 (3) 節と同じ手順の解析により、次の性質を有することがわかる: $N_a^o > 0$ かつ $N_{a-1}^o > 0$ であれば、 $N_a^o < N_{a-1}^o$ となる。すなわち、CBD から遠い居住地ほど人口が少ない。

局所最適状態は、居住地 a に住む労働者に対して、通勤手段別に通勤手段・人口分布 \mathbf{n} に応じた課金/補助金

$$\begin{cases} p_{a,s}(\mathbf{n}) = - \sum_{b=1}^a c'(\frac{x_{b,s}}{\phi_b \mu_b}) x_{b,s} \\ p_{a,p}(\mathbf{n}) = - \sum_{b=1}^a c'(\frac{x_{b,p}}{(1-\phi_b) \mu_b}) x_{b,p} + \frac{\theta}{N_p} \end{cases} \quad (26)$$

を導入した状況下の局所安定均衡状態と一致する。これは、効用関数が $\hat{v}_{a,i}(\mathbf{n}) = v_{a,i}(\mathbf{n}) + p_{a,i}(\mathbf{n})$ で与えられたとき、そのポテンシャル関数が総余剰 $W(\mathbf{n})$ となることから容易に確認できる。

(3) 政策分析

人口・通勤手段分布 \mathbf{n} に応じた課金/補助金政策 $p_{a,i}(\mathbf{n})$ を実施することの影響を調べる。より具体的には、均衡状態 \mathbf{n}^* を初期状態としたときに政策を導入することの影響を分析する。まず、人口分布に対する影響を考える。 $(a, i), (a-1, i) \in \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ の場合、

$$\hat{v}_{a,i}(\mathbf{n}^*) - \hat{v}_{a-1,i}(\mathbf{n}^*) = -c'(\frac{x_{a,i}^*}{\mu_{a,i}}) x_{a,i}^* < 0 \quad (27)$$

が成立する。すなわち、 $\hat{v}_{a,i}(\mathbf{n}^*) < \hat{v}_{a-1,i}(\mathbf{n}^*)$ であることがわかる。このことから、政策導入は CBD 付近の人口増加をもたらすことが示される。

次に、通勤手段に対する影響を考える。そのために、 $(a, s), (a, p) \in \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ となる $(a, s), (a, p)$ に着目する。このとき、

$$\begin{aligned} & \hat{v}_{a,s}(\mathbf{n}^*) - \hat{v}_{a,p}(\mathbf{n}^*) \\ &= - \sum_{b=1}^a \left\{ c'(\frac{x_{b,s}}{\phi_b \mu_b}) x_{b,s} - c'(\frac{x_{b,p}}{(1-\phi_b) \mu_b}) x_{b,p} \right\} - \frac{\theta}{N_p} \end{aligned} \quad (28)$$

が成立する。それぞれの通勤手段の混雑度合いと、相乗りの規模の経済の影響によって、どちらの通勤手段

への移動が起こるかが決まる。特に、 $c'(\frac{x_{b,s}}{\phi_b \mu_b}) x_{b,s} - c'(\frac{x_{b,p}}{(1-\phi_b) \mu_b}) x_{b,p} > 0$ のとき、 $\hat{v}_{a,s}(\mathbf{n}^*) < \hat{v}_{a,p}(\mathbf{n}^*)$ となる。すなわち、単独通勤者は、より効用の高い相乗り通勤に変更する。

5. 2 居住地モデルの特性解析

本章では、解析を容易にするため、居住地が都心・郊外の 2 地点からなる都市を考える。以降では、便宜上、都心・郊外を、各々、居住地 1, 2 とする。また、都心に住む労働者は、自動車通勤する必要がないため、その通勤費用は定数 c_1 とする。それに対し、郊外に住む労働者は、多地点モデル同様、単独通勤か、相乗り通勤かを選択できる。HOV レーンは都心・郊外間の 1 つの道路にのみ存在するため、以降では道路容量を μ 、単独自動車レーンのシェアを ϕ とする。そして、固定費用 c_F や道路用量 μ が、均衡効用や人口・通勤手段分布に与える影響について検証する。なお、以降の具体的な解析では、交通混雑の影響を表す関数 $c(x)$ と土地消費の影響を表す関数 $f(y_a)$ は次のように設定する:

$$c(x) = x, \quad f(y_a) = -\frac{\alpha}{y_a}. \quad (29)$$

(1) 均衡状態

2 居住地モデルにおいて、労働者は、居住地・通勤手段を選択する。その結果、均衡状態における人口・通勤手段分布が決まる。均衡状態が満たす均衡条件は、以下の条件で与えられる:

$$\begin{cases} v^* = v_{a,i}(\mathbf{n}) & \text{if } n_{a,i} > 0, \\ v^* \geq v_{a,i}(\mathbf{n}) & \text{if } n_{a,i} = 0, \end{cases} \quad (30a)$$

$$\sum_{a \in \{1,2\}} \sum_{i \in \mathcal{C}} n_{a,i} = N. \quad (30b)$$

ここで、 v^* は均衡効用、 $v_{a,i}(\mathbf{n})$ は居住地 a に居住し通勤手段 i で通勤する労働者の効用水準を表す:

$$v_{a,i}(\mathbf{n}) = w - c_{a,i}(n_{a,i}) - \frac{2\alpha}{L} N_a, \quad (31a)$$

$$\begin{cases} c_1 = c_1, \\ c_{2,s}(n_{2,s}) = \frac{n_{2,s}}{\phi \mu} + c_F + c_1, \\ c_{2,s}(n_{2,p}) = \frac{n_{2,p}/2}{(1-\phi)\mu} + \frac{c_F}{2} + \frac{\theta}{n_{2,p}} + c_1. \end{cases} \quad (31b)$$

多居住地モデル同様、条件 (30a) は、立地均衡状態であり、均衡状態では、単一の労働者の選択変更のみでは自らの効用を改善することができないことを表している。また、条件 (30b) は労働者の人口保存則である。

(2) 均衡状態の特性解析

本節では、前章で得られた多居住地モデルの特性を有することを確認するとともに、より具体的な性質を

調べる。

a) 均衡状態の理論解析

2 居住地モデルにおいても、多居住地モデルと同様の方法によりポテンシャル関数を有することが確認でき、以下の式で与えられる:

$$P(\mathbf{n}) = wN - P_1(\mathbf{n}) + P_2(\mathbf{n}) - P_3(\mathbf{n}). \quad (32)$$

ここで、 $P_1(\mathbf{n}), P_2(\mathbf{n}), P_3(\mathbf{n})$ は、各々、通勤混雑、相乗りの規模の経済、土地消費に関する影響を表す凸関数であり、次の関係を満たす:

$$P_1(\mathbf{n}) = \frac{n_{2,s}^2}{2\phi\mu} + \frac{n_{2,p}^2}{4(1-\phi)\mu} \quad (33a)$$

$$P_2(\mathbf{n}) = -c_F \left(n_{2,s} + \frac{n_{2,p}}{2} \right) - \theta \ln[n_{2,p}] - c_1 N, \quad (33b)$$

$$P_3(\mathbf{n}) = \frac{\alpha}{L} (N_1^2 + N_2^2). \quad (33c)$$

また、均衡状態は、次の最適化問題の KKT 条件を満たす \mathbf{n} の集合と一致する:

$$\max_{\mathbf{n}} P(\mathbf{n}) = wN - P_1(\mathbf{n}) + P_2(\mathbf{n}) - P_3(\mathbf{n}), \quad (34a)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{a \in \{1,2\}} \sum_{i \in C} n_{a,i} = N. \quad (34b)$$

この事実は、上記の問題の KKT 条件が、均衡条件 (31) と一致することから容易に確認できる。

2 居住地モデルは、 $P_2(\mathbf{n})$ の凸性により、 $P(\mathbf{n})$ は凸関数にもなりうるため、均衡状態は必ずしも一意とは限らない。このことを踏まえると、最適化問題 (34) より、郊外における安定均衡状態の通勤手段分布は、内生変数 N_2^* を有する以下の 2 つで与えられる:

$$\begin{cases} n_{2,s}^* = N_2^*, \\ n_{2,p}^* = 0, \end{cases} \quad (35a)$$

$$\begin{cases} n_{2,s}^* = N_2^* - n_{2,p}^*, \\ n_{2,p}^* = \frac{(1-\phi)\phi\mu}{2-\phi} (B + \sqrt{B^2 - C}), \end{cases} \quad (35b)$$

$$B = \frac{N_2^*}{\phi\mu} + \frac{c_F}{2}, \quad (35c)$$

$$C = \frac{(2-\phi)\theta}{(1-\phi)\phi\mu}. \quad (35d)$$

通勤手段分布 (35a) は、通勤手段が単独通勤に集中した状態である。通勤手段分布 (35b) は、通勤手段が分散した状態である。以上のように、通勤手段分布が複数あることが確認できた。また、通勤手段が分散しているとき、相乗り通勤人口 $n_{2,p}^*$ は、自動車保有費用 c_F に関して単調増加である。すなわち、自動車保有費用が増加すると、相乗り通勤人口は増加する。

b) 均衡状態の人口分布

次に、均衡状態における人口・通勤手段分布について調べる。 $(2,s), (2,p) \in \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ であれば、 $v_{2,s}(\mathbf{n}^*) = v_{2,p}(\mathbf{n}^*)$ 、すなわち、 $c^*(\mathbf{n}^*) = c_{2,s}(n_{2,s}^*) = c_{2,p}(n_{2,p}^*)$

となる。ここで、 $c^*(\mathbf{n}^*)$ は、均衡状態における郊外の均衡通勤費用である。この条件から、 $c^*(\mathbf{n}^*)$ は、以下で与えられる:

$$c^*(\mathbf{n}^*) = \frac{B}{2-\phi} + \frac{c_F}{2} + c_1 - \frac{1-\phi}{2-\phi} \sqrt{B^2 - C}. \quad (36)$$

$(1,i), (2,i) \in \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ であれば、 $v_{1,i}(\mathbf{n}^*) = v_{2,i}(\mathbf{n}^*)$ となる。この条件から、以下の関係が与えられる:

$$\frac{2\alpha(N_1 - N_2)}{L} = -c_1 + c^*(\mathbf{n}^*) > 0. \quad (37)$$

したがって、 $N_1^* > 0$ かつ N_2^* であれば、 $N_1^* > N_2^*$ となる。すなわち、都心の方が郊外より人口が多くなる。これは、多居住地モデルと同様の結果である。

(3) HOV レーン導入前後の比較

次に、HOV レーンを新たに設置することを想定し、設置前後で通勤費用がどのように変化するか調べる。なお、HOV レーンを導入後、郊外で通勤手段選択が行われていることを想定するため、 N_2^* は一定であると仮定する。

HOV レーン設置前は、単独自動車レーンのみ存在するため $\phi = 1$ である。このとき、郊外に住む労働者は全て単独通勤をするため、HOV レーン設置前の均衡通勤費用を c_a^* とすると、 c_a^* は以下で与えられる:

$$c_a^*(\mathbf{n}^*) = \frac{N_2^*}{\mu} + c_F + c_1. \quad (38a)$$

HOV レーン設置後は $\phi \in (0,1)$ であり、HOV レーン利用者がいるときの均衡通勤費用、HOV レーン利用者がいないときの均衡通勤費用を、各々、 c_b^*, c_c^* とすると、 c_b^*, c_c^* はそれぞれ以下で与えられる:

$$c_b^*(\mathbf{n}^*) = \frac{n_{2,s}^*}{\phi\mu} + c_F + c_1, \quad (38b)$$

$$c_c^*(\mathbf{n}^*) = \frac{N_2^*}{\phi\mu} + c_F + c_1, \quad (38c)$$

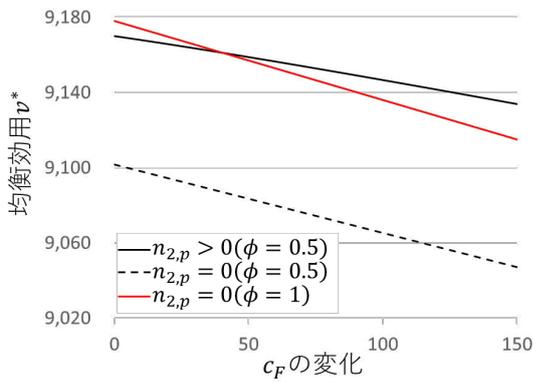
$c_c^*(\mathbf{n}^*)$ と $c_a^*(\mathbf{n}^*), c_b^*(\mathbf{n}^*)$ の大小関係については、明らかに $c_c^*(\mathbf{n}^*) > c_a^*(\mathbf{n}^*)$ 、 $c_c^*(\mathbf{n}^*) > c_b^*(\mathbf{n}^*)$ が言える。また、 $c_a^*(\mathbf{n}^*), c_b^*(\mathbf{n}^*)$ の差をとることで、以下の条件が与えられる:

$$\frac{n_{2,s}^*}{N_2^*} \begin{cases} < \phi \text{ ならば、} c_a^*(\mathbf{n}^*) > c_b^*(\mathbf{n}^*) \\ > \phi \text{ ならば、} c_a^*(\mathbf{n}^*) < c_b^*(\mathbf{n}^*) \end{cases} \quad (39)$$

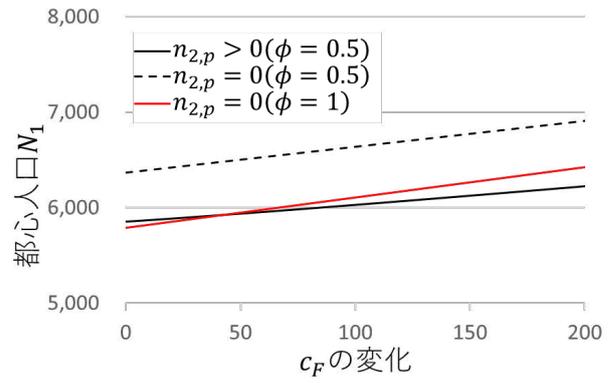
条件 (39) より、HOV レーンを新たに設置しても通勤費用が改善されない、という結果が起こり得ることが確認できる。郊外の単独通勤シェア $n_{2,s}^*/N_2^*$ が単独自動車レーンシェア ϕ より大きいとき、HOV レーンを導入しても通勤費用が改善されていない。

(4) 数値解析例

本節では数値解析により、HOV レーンの導入前後の均衡効用 v^* ・都心人口 N_1 を比較する。さらに、燃料

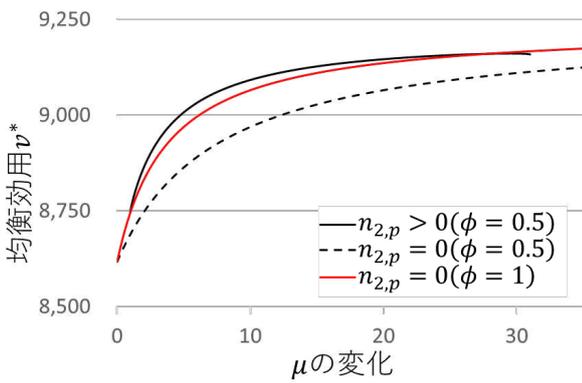


(a) 均衡効用水準 v^*

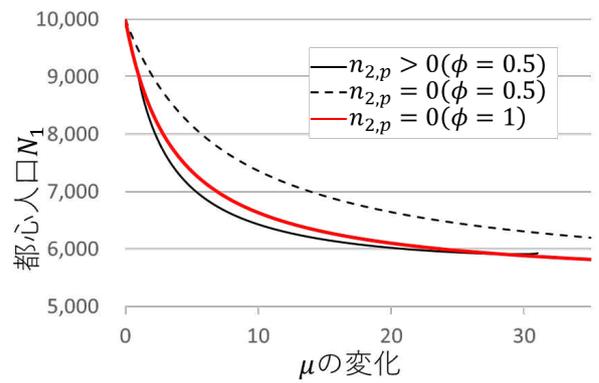


(b) 居住地 1 人口 N_1 (都心部人口)

図-1 c_F の変化が均衡状態に与える影響 ($N = w = 10000$, $\alpha = 2$, $L = 30$, $\mu = 20$, $\theta = 250000$, $c_1 = 50$, $c(x) = x$)



(a) 均衡効用水準 v^*



(b) 居住地 1 人口 N_1 (都心部人口)

図-2 μ の変化が均衡状態に与える影響 ($N = w = 10000$, $\alpha = 2$, $L = 30$, $c_F = 100$, $\theta = 250000$, $c_1 = 50$, $c(x) = x$)

やその他維持費などの自動車保有費用 c_F や道路用量 μ が均衡状態に与える影響に関する比較静学も実施する。そして、その結果と前節で得られた理論解析との整合性を確認しつつ、その結果の考察を行う。

a) 自動車保有費用 c_F が均衡状態に与える影響

c_F を変化させることにより得られた結果は、図-1 に示す通りである。なお、数値解析結果の図の赤線は、HOV レーンが存在しない状況下での均衡状態、黒の実線・破線は、各々、HOV レーン設置下の相乗り利用者が存在する・存在しない均衡状態を表す。これらの結果から、前節に示した理論解析と整合した結果が確認できる。より具体的には、 c_F の値が小さい場合、HOV レーン導入が導入は都心人口の増加・均衡効用水準の低下を引き起こす。これは、HOV レーンを導入しても、郊外での通勤費用の改善幅が小さいためである。ただし、 c_F が大きい場合には、HOV レーンの導入は、均衡効用水準の増加・都市の郊外化をもたらしていることも確認できる。

c_F は、自動車を通勤のために保有する大変さを表すパラメータであり、 c_F の値は都会で大きく (e.g., 駐車場料金が大きい)、田舎で小さい (e.g., 駐車場確保の容易性、他用途とのシェアができる) と考えられる。このこ

とから、都会での HOV レーンの導入は、均衡効用水準の増加をもたらす。一方で、田舎で HOV レーンを導入しても、均衡効用水準の低下を招いてしまう恐れがある。

b) 道路総容量 μ が均衡状態に与える影響

μ を変化させることにより得られた結果は、図-2 に示す通りである。均衡状態が複数ある状況下で μ が大きい場合、HOV レーンの導入は、都心人口の増加・均衡効用水準の低下を引き起こし得ることが確認できる。これは、HOV レーン導入による混雑解消より、相乗りに追加的にかかる費用の影響が大きいためであると考えられる。また、 μ が大きすぎると均衡状態が 1 つになり、相乗りを利用する労働者はいなくなる。これは、 μ が大きいと交通量が交通混雑に与える影響が小さいので、あえて相乗りをする必要がないためであると考えられる。

6. おわりに

本研究では、Alonso¹⁾ 型の居住地選択モデルの通勤手段に相乗り通勤を追加することで、相乗り通勤が都市の空間構造に与える影響を表すことのできる枠組み

を構築した。そして、多居住地モデルにおいて、ポテンシャル関数が存在することを示した。また、均衡状態の詳細な性質を調べるため、2 居住地モデルでの理論・数値解析を行った。その結果、HOV レーンを導入しても、効用が改善されない可能性がある、という知見が得られた。

今後の展開としては、多居住地モデルでの数値解析による具体的な特性分析、自動運転技術の発達による相乗り通勤の易化の影響評価等が考えられる。

謝辞: 本研究は国土交通省「道路政策の質の向上に資する技術研究開発」の令和 2 年度研究助成(テーマ名: 公共交通ターミナル整備の空間経済分析に関する研究開発)の助成を受けたものである。

付録 I. $P_1(\mathbf{n}), P_2(\mathbf{n}), P_3(\mathbf{n})$ が凸関数であることの証明

$P(\mathbf{n})$ がポテンシャル関数であることは、(13), (14) より明らかである。そこで、ここでは、 $P_1(\mathbf{n}), P_2(\mathbf{n}), P_3(\mathbf{n})$ が凸関数であることを証明する。

まず、 $P_1(\mathbf{n})$ が凸関数であることを調べる。 $P_1(\mathbf{n})$ の Hessian 行列は以下で表される：

$$\nabla^2 P_1(\mathbf{n}) = \begin{bmatrix} \nabla \mathbf{c}_{11} & \nabla \mathbf{c}_{12} & \nabla \mathbf{c}_{13} & \cdots & \nabla \mathbf{c}_{1A} \\ \mathbf{0} & \nabla \mathbf{c}_{22} & \nabla \mathbf{c}_{23} & \cdots & \nabla \mathbf{c}_{2A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla \mathbf{c}_{33} & \cdots & \nabla \mathbf{c}_{3A} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \nabla \mathbf{c}_{AA} \end{bmatrix}, \quad (\text{I.1})$$

$$\nabla \mathbf{c}_{ab} = \begin{bmatrix} \sum_{d=1}^a c'(x_{d,s}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sum_{d=1}^a c'(x_{d,p}) \end{bmatrix}. \quad (\text{I.2})$$

この関係から、 $\nabla^2 P_1(\mathbf{n})$ は上三角行列であり、その対角要素はすべて正であることがわかる。すなわち、 $\nabla^2 P_1(\mathbf{n})$ の固有値は非負である。したがって、 $P_1(\mathbf{n})$ は凸関数であることがわかる。

次に、 $P_2(\mathbf{n})$ が凸関数であることを調べる。 $P_2(\mathbf{n})$ の Hessian 行列は以下で表される：

$$\nabla^2 P_2(\mathbf{n}) = \frac{\theta}{N_p^2} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \frac{\theta}{N_p^2} (\mathbf{E} \otimes \mathbf{B}), \quad (\text{I.3})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.4})$$

ここで、 \otimes はクロネッカー積、 \mathbf{E} は全ての要素が 1 の $A \times A$ 行列である。

この Hessian 行列 $\nabla^2 P_2(\mathbf{n})$ の固有値 $\lambda_{a,i}$ は、以下で与えられる：

$$\lambda_{a,i} = e_a b_i = \begin{cases} \frac{\theta A b_i}{N_p^2} & \text{if } a = 0, \\ 0 & \text{if } a \neq 0. \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

ここで、 e_a は \mathbf{E} の第 a 固有値、 b_i は \mathbf{B} の第 i 固有値である。(I.4) より $b_i = 1, 0$ なので、 $\lambda_{a,i} \geq 0$ であるため、 $\nabla^2 P_2(\mathbf{n})$ は半正定値である。したがって、 $P_2(\mathbf{n})$ は凸関数である。

最後に $P_3(\mathbf{n})$ の凸性を、その Hessian 行列を利用して示す。 $P_3(\mathbf{n})$ の Hessian 行列は以下で表される：

$$\nabla^2 P_3(\mathbf{n}) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{H}_A \end{bmatrix}, \quad (\text{I.6})$$

$$\mathbf{H}_a = -h'(N_a)\mathbf{I}. \quad (\text{I.7})$$

ここで、 $h'(N_a) < 0$ であるため、 $\nabla^2 P_3(\mathbf{n})$ は正定値である。したがって、 $P_3(\mathbf{n})$ は凸関数であることがわかる。

参考文献

- 1) Alonso, W.: *Location and Land Use*, Harvard University Press, 1964.
- 2) Yang, H., and Huang, H.: Carpooling and congestion pricing in a multilane highway with high-occupancy-vehicle lanes, *Transportation Research Part A*, Vol.33, NO.3, pp.139-155, 1999.
- 3) Konishi, H., Mun, S.: Carpooling and congestion pricing: HOV and HOT lanes, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.40, No.4, pp.173-186, 2010.
- 4) Fujita, M.: *Urban Economic Theory: Land Use and Citi Size*, Cambridge University Press, 1989.
- 5) Arnott, R.: Congestion tolling with agglomeration externalities, *Journal of Urban Economics*, Vol. 62, No. 2, pp. 187-203, 2007.
- 6) Sandholm, W. H.: Potential Games with Continuous Player Sets, *Journal of Economic Theory*, Vol. 97, No. 1, 2001.

(2021. 3. 7 受付)