

# 土地利用モデルに基づく計量分析: ベイズ推定アプローチの検討

小林 秀佑<sup>1</sup>・中西 航<sup>2</sup>・堀越 光<sup>3</sup>・高山 雄貴<sup>4</sup>

<sup>1</sup>学生非会員 東京工業大学 環境・社会理工学院 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-M1-20)

E-mail: kobayashi.s.bi@m.titech.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 東京工業大学助教 環境・社会理工学院 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-M1-20)

E-mail: nakanishi@plan.cv.titech.ac.jp

<sup>3</sup>学生会員 金沢大学 大学院理工学研究科 (〒 920-1192 金沢市角間町)

E-mail: h.hika@stu.kanazawa-u.ac.jp

<sup>4</sup>正会員 金沢大学准教授 理工研究域 (〒 920-1192 金沢市角間町)

E-mail: ytakayama@se.kanazawa-u.ac.jp

土地利用モデルのパラメータは、実用上の問題などにより、いくつかの段階に分けて推定・キャリブレートされることが主流になっている。しかし、理論的には一括で推定すべきパラメータを段階的に設定していることから、推定手法の信憑性は定かではない。そこで、本研究ではベイズ推定アプローチによりパラメータを一括で推定することを試みた。ベイズ推定を用いた結果、現実的な計算時間でパラメータを一括で推定することができた。さらに、推定結果や従来手法との比較から、土地利用モデルのパラメータ推定としてベイズ推定を用いることの優位性や将来性が示唆された。

**Key Words** : *land use model, parameter estimation, Bayesian approach*

## 1. はじめに

社会基盤整備などの都市・地域政策の効果は、長期間・広範囲に渡って発現する。そのため、それらの政策を効果的・効率的に実施するためには、長期的・広域的な効果を把握することが重要となる。土地利用モデルを利用した計量分析は、空間単位 (e.g., 地区, 市町村), 経済主体 (e.g., 家計, 企業) 毎に政策の長期的効果を計量化できる (i.e., どこに, 誰に, どの程度の効果が生じるのかを計測できる) 手法であり, 都市経済学・土木計画学分野で関連する研究が膨大に蓄積されてきた (詳細は, 例えば, 堤ら<sup>1)</sup> 参照)。

これらの研究蓄積により, ミクロ経済学的基礎を持ち, かつ土地利用と交通の相互作用を明示的に考慮した分析枠組 (e.g., 応用都市経済 [Computable Urban Economic: CUE] モデル) や, 経済活動の空間的集積メカニズムを考慮した分析枠組 (e.g., 定量的都市経済 [Quantitative Urban Economic: QUE] モデル) が開発されるまでになっている<sup>2), 3)</sup>。しかし, 基本的な分析枠組は完成の域に達してきているものの, 堤ら<sup>1)</sup> が指摘しているように, その分析枠組にはいくつかの重要な課題が残されている。

本研究では, それらの課題のなかでも, 土地利用モデルのパラメータ設定手法に注目する。土地利用モデルのパラメータは, 直接推定すると符号条件を満たさ

ないなどの問題が生じることが知られている。そこで, 既存研究では, 個別の需要・供給関数を推定・キャリブレートするなどの, 段階的にパラメータを設定する手法が採用されてきた。しかし, その手法には, 推定量の一致性・効率性に関する問題が指摘されるとともに (e.g., 堤ら<sup>1)</sup>), 計量分析の手続きを複雑化する要因にもなっている。

本研究では, これらの課題を解消するための第一歩として, 土地利用モデルのパラメータをベイズ推定アプローチにより一括で推定する手法の特性を検証することを目的とする。この目的を達成するために, Ahlfeldt et al.<sup>3)</sup> で採用されている段階的なパラメータ推定手法と, 本研究で提案するベイズ推定アプローチを, 同一のモデルに適用する。そして, それらの結果を比較することで, ベイズ推定アプローチの特徴・優位性を検証する。

本研究の構成は以下のとおりである。第2章では, 土地利用モデルの設定を示したうえで, その均衡状態を定式化する。第3章では, パラメータの設定に用いるデータの概要を示す。そして, 第4章で Ahlfeldt et al.<sup>3)</sup> に基づく手法, 第5章でベイズ推定アプローチによるパラメータ推定を行う。最後に, 第6章で本研究の成果をまとめる。

## 2. モデルの設定

### (1) 都市・交通条件の設定

本研究では、1つの都市が存在し、その都市内には  $I$  個の立地点があると考え、この立地点の集合を  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, I\}$  と表す。立地点間は、道路ネットワークにより接続されており、立地点  $a, i$  間の移動にかかる所要時間は、その交通量によらず  $\tau_{ai}$  で与えられる。また、立地点  $i$  で利用可能な住宅・業務用の土地は、各々、 $K_{Ri}, K_{Ci}$  である。

この都市には、立地主体である家計と企業に加え、floor space を供給するデベロッパーが存在する。家計は、全て均質であり、総数は固定的に  $N$  である。各家計は、居住地  $a \in \mathcal{I}$ 、労働を供給する企業  $i \in \mathcal{I}$  を選択する。居住地  $a$ ・就業地  $i$  の家計数を  $h_{ai} \geq 0$  と表す。このとき、居住地が立地点  $a$  の家計数  $n_a$ 、就業地が立地点  $i$  の家計数  $m_i$  は、以下で与えられる：

$$n_a = \sum_{i \in \mathcal{I}} h_{ai}, \quad m_i = \sum_{a \in \mathcal{I}} h_{ai}, \quad (1)$$

なお、各家計は単一の労働を供給すると仮定するため、 $m_i$  は立地点  $i$  に供給される労働と一致する。

### (2) 家計の行動

この都市の家計は均質であるため、同一の効用関数を有する。したがって、家計は、居住地  $a \in \mathcal{I}$ 、就業地  $i \in \mathcal{I}$  により特徴付けられる。この家計の効用は、以下に示すように、合成財の消費量  $c_{ai}$ 、floor space 面積  $l_{ai}$  に応じて定まる：

$$u(c_{ai}, l_{ai}) = c_{ai} + \beta \ln l_{ai} + B_a \quad (2)$$

ここで、 $\beta$  は floor space への選好に関するパラメータ、 $B_a$  は居住地のアメニティ水準を表す。合成財をニューメーラールとすると、予算制約は以下で与えられる：

$$w_i = c_{ai} + r_{Ra} l_{ai} + t\tau_{ai} \quad (3)$$

ここで、 $t$  は通勤費用パラメータ、 $w_i$  は勤務地  $i$  における賃金率、 $r_{Ra}$  は住宅用の floor space の単位面積当たりの価格である。

財消費に関する効用最大化問題より、 $c_{ai}, l_{ai}$  が以下で与えられる：

$$l_{ai} = \frac{\beta}{r_{Ra}}, \quad c_{ai} = w_i - \beta - t\tau_{ai}. \quad (4)$$

したがって、立地点  $a \in \mathcal{I}$  における住宅用の floor space の総需要  $L_{Ra} = \sum_{i \in \mathcal{I}} l_{ai} h_{ai}$  は、次のように表される：

$$L_{Ra} = \frac{\beta n_a}{r_{Ra}}. \quad (5)$$

さらに、間接効用関数  $v_{ai}$  は、以下のとおりとなる：

$$v_{ai} = w_i - \beta \ln r_{Ra} - t\tau_{ai} + B_a + \beta(\ln \beta - 1). \quad (6)$$

### a) 企業の行動

企業は、完全競争のもとで労働と floor space を投入して、合成財を生産する。生産関数は、以下の Cobb-Douglas 型を仮定する。したがって、立地点  $i$  の企業の生産高  $y_i$  は、労働・floor space 投入量  $H_{Ci}, L_{Ci}$  を用いると、

$$y_i = F_i H_{Ci}^\alpha L_{Ci}^{1-\alpha}. \quad (7)$$

ここで、 $F_j$  は立地点  $j$  の生産性を表す指標、 $\alpha$  は労働の投入割合である。

立地点  $i$  の企業は、以下で与えられる利潤  $\pi_i$  を最大化する労働・floor space 投入量を選択する：

$$\max_{H_{Ci}, L_{Ci}} \pi_i = y_i - w_i H_{Ci} - r_{Ci} L_{Ci}. \quad (8)$$

ここで、 $r_{Ci}$  は業務用の floor space の単位面積当たりの価格である。

この利潤最大化問題と利潤ゼロ条件より、 $H_{Ci}, L_{Ci}, w_i, r_{Ci}$  の次の関係が得られる：

$$H_{Ci} = \left( \frac{\alpha F_i}{w_i} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{Ci}, \quad (9a)$$

$$r_{Ci} = (1 - \alpha) \left( \frac{\alpha}{w_i} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} F_i^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (9b)$$

### (3) デベロッパーの行動

デベロッパーは、各立地点で不在地主から借りた住宅・業務用の土地と資本を投入し、完全競争のもとで住宅・業務用の floor space を供給する。生産関数は Cobb-Douglas 型であると仮定することから、利潤最大化行動は次のように表される：

$$\max_{M_i, K_i} \Pi_i = r_i S_i - P M_i - R_i K_i, \quad (10a)$$

$$\text{s.t. } S_i = M_i^\mu K_i^{1-\mu}. \quad (10b)$$

ここで、 $P$  は都市全域にわたる資本の共通価格、 $R_i$  は土地の価格、 $\mu$  は資本の投入割合である。ここで、floor space は住宅・業務用の2種類が存在するが、その設定は同一であると仮定する。なお、業務用の場合は  $r_{Ci}, S_{Ci}$ 、住宅用の場合は  $r_{Ri}, S_{Ri}$  のようにそれぞれ  $C$  と  $R$  を下付き添え字として加えることで区別する。

利潤最大化問題の一階条件・利潤ゼロ条件から、次の関係が得られる：

$$M_i = \frac{\mu}{1-\mu} \frac{R_i}{P} K_i, \quad (11a)$$

$$r_i = \frac{P^\mu R_i^{1-\mu}}{\mu^\mu (1-\mu)^{1-\mu}}, \quad (11b)$$

$$S_i = \left( \frac{\mu}{P} r_i \right)^{\frac{1}{1-\mu}} K_i, \quad (11c)$$

### (4) 市場均衡状態

本モデルでは、労働・土地・floor space 市場を考えている。そこで、各々の需給均衡条件から得られる関

係を整理する。労働の需給均衡条件は、 $H_{Ci} = m_i$  で与えられる。この関係と (9b) より、 $L_{Ci}, r_{Ci}, w_i$  の次の関係が与えられる:

$$L_{Ci} = \left\{ \frac{(1-\alpha)F_i}{r_{Ci}} \right\}^{\frac{1}{\alpha}} m_i, \quad (12a)$$

$$w_i = \alpha \left( \frac{1-\alpha}{r_{Ci}} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} F_i^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (12b)$$

土地の需給均衡条件と (11) から、住宅・業務用の floor space 生産量  $S_{Ra}, S_{Ci}$  は、以下で与えられる:

$$S_{Ra} = \kappa_{Ra} r_{Ra}^{\frac{\mu}{1-\mu}}, \quad \kappa_{Ra} \equiv \left( \frac{\mu}{P} \right)^{\frac{\mu}{1-\mu}} K_{Ra}, \quad (13a)$$

$$S_{Ci} = \kappa_{Ci} r_{Ci}^{\frac{\mu}{1-\mu}}, \quad \kappa_{Ci} \equiv \left( \frac{\mu}{P} \right)^{\frac{\mu}{1-\mu}} K_{Mj}. \quad (13b)$$

この関係から、floor space の供給量  $S_{Ra}, S_{Ci}$  は、土地供給量  $K_{Ra}, K_{Ci}$  が多いほど・floor space 価格  $r_{Ra}, r_{Ci}$  が高いほど、増加することが確認できる。

住宅・業務用の floor space の需給均衡条件 ( $S_{Ra} = L_{Ra}, S_{Ci} = L_{Ci}$ ) より、単位面積当たりの floor space 価格が得られる:

$$r_{Ra} = \left( \frac{\beta n_a}{\kappa_{Ra}} \right)^{1-\mu} \quad (14a)$$

$$r_{Ci} = \left\{ \frac{(1-\alpha)^{1/\alpha} F_i^{1/\alpha}}{\kappa_{Ci}} m_i \right\}^{\frac{1}{\frac{\mu}{1-\mu} + \frac{1}{\alpha}}}. \quad (14b)$$

これを用いると、各立地点の賃金  $w_i$  は、次のように表される:

$$w_i = \lambda_i m_i^{-\gamma}, \quad (15a)$$

$$\lambda_i \equiv \alpha(1-\alpha)^{\frac{(1-\alpha)\mu}{1-(1-\alpha)\mu}} F_i^{\frac{1}{1-(1-\alpha)\mu}} \kappa_{Ci}^{\gamma}, \quad (15b)$$

$$\gamma \equiv 1 - \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)\mu} < 1, \quad (15c)$$

以上の関係を利用すると、居住地  $a$ 、就業地  $i$  の家計の間接効用関数  $v_{ai}$  が、 $\mathbf{h} = (h_{ai})_{a,i \in \mathcal{I}}$  の関数で与えられる:

$$v_{ai}(\mathbf{h}) = \lambda_i m_i^{-\gamma} - (1-\mu)\beta \ln n_a - t\tau_{ai} + \psi_a, \quad (16a)$$

$$\psi_a \equiv B_a + (1-\mu)\beta \ln \kappa_{Ra} + \beta(\mu \ln \beta - 1). \quad (16b)$$

### (5) 立地均衡状態

本研究では、家計の居住地・就業地選択には異質性があると仮定する。より具体的には、家計  $\ell$  の効用  $v_{ai}(\ell)$  は、以下で与える:

$$v_{ai}(\ell) = v_{ai}(\mathbf{h}) + \epsilon_{ai}(\ell) \quad (17)$$

ここで、 $\epsilon_{ai}(\ell)$  は、家計  $\ell$  固有の確定的効用であり、家計の集団全体に渡る  $\{\epsilon_{ai}(\ell)\}$  の分布が (家計が十分多く存在するため、連続分布で近似でき) 互いに独立・同一な Weibull 分布に従うと仮定する。

このとき、立地均衡状態における居住地  $a$ 、就業地  $i$  を選択する家計数  $h_{ai}$  は、次の Logit 型の関数で与えら

れる:

$$h_{ai} = \frac{\exp[\theta v_{ai}(\mathbf{h})]}{\sum_{b \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{I}} \exp[\theta v_{bj}(\mathbf{h})]} N \quad \forall a, i \in \mathcal{I}. \quad (18)$$

ここで、 $\theta$  はスケールパラメータである。したがって、この非線形連立方程式 (18) を解くことで、立地均衡状態を得ることができるとわかる。

詳細・広域な実空間を分析対象にする場合、非線形連立方程式 (18) が不可避免的に大規模になることから、その数値解析は困難となる。そこで、本研究では、立地均衡状態の数値解析を効率的に実施するために、本モデルにポテンシャル関数が存在することを示しておく。Sandholm<sup>4)</sup> により示されているように、非負条件・人口保存則を満たす (i.e.,  $h_{ai} \geq 0 \forall a, i \in \mathcal{I}$ ,  $\sum_{a \in \mathcal{I}} \sum_{i \in \mathcal{I}} h_{ai} = N$ ) 任意の  $\mathbf{h}$  に対して、次の条件を満たす関数  $P(\mathbf{h})$  をポテンシャル関数と呼ぶ:

$$\frac{\partial P(\mathbf{h})}{\partial h_{ai}} = v_{ai}(\mathbf{h}) - \frac{1}{\theta} \ln h_{ai} + \zeta \quad \forall a, i \in \mathcal{I}. \quad (19)$$

ここで、 $\zeta$  は任意の定数である。このポテンシャル関数が存在する場合、立地均衡状態は、次の最適化問題の Karush-Kuhn-Tucker 条件を満たす  $\mathbf{h}$  と一致する:

$$\max_{\mathbf{h}} P(\mathbf{h}) \quad (20a)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{a \in \mathcal{I}} \sum_{i \in \mathcal{I}} h_{ai} = N, \quad h_{ai} \geq 0 \quad \forall a, i \in \mathcal{I}. \quad (20b)$$

さらに、 $P(\mathbf{h})$  を局所的に最大化する  $\mathbf{h}$  は、logit ダイナミクスの下で安定的な均衡状態と一致する。

間接効用関数 (16) より、本モデルには次のポテンシャル関数が存在する:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{h}) = & \frac{1}{1-\gamma} \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i m_i^{1-\gamma} \\ & + \sum_{a \in \mathcal{I}} \{-(1-\mu)\beta(\ln n_a - 1) + \psi_a\} n_a \\ & - \sum_{a \in \mathcal{I}} \sum_{i \in \mathcal{I}} \left( t\tau_{ai} + \frac{1}{\theta} \ln h_{ai} \right) h_{ai}. \end{aligned} \quad (21)$$

したがって、本研究で開発したモデルにおいて、初期状態  $\mathbf{h}^{(0)}$  から創発する立地均衡状態は、最適化問題 (20) を初期状態を  $\mathbf{h}^{(0)}$  として局所的に解くことで得られることがわかる。

## 3. 使用データの概要

本研究では、石川県小松市周辺を分析対象としている。家計の居住地・勤務地分布  $h_{ai}$  は、500m×500m メッシュで区切った 321 地区に対して定義した。

本章で示すパラメータ設定の際に用いたデータとその出典は以下の通りである:

居住地・勤務地別家計数  $h_{ai}$ : ドコモインサイドマーケティング社が販売するモバイル空間統計を用いる。具体的には、ユーザーの登録住所を居住地  $a$  とし、2017

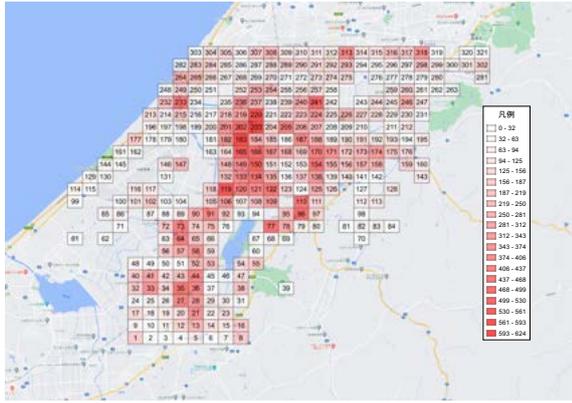


図-1 居住地別の家計数

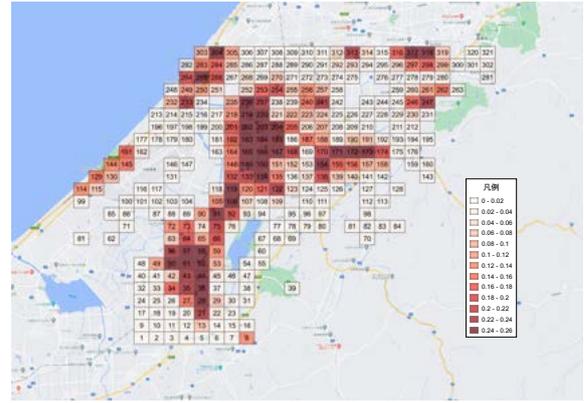


図-3 市街化区域面積

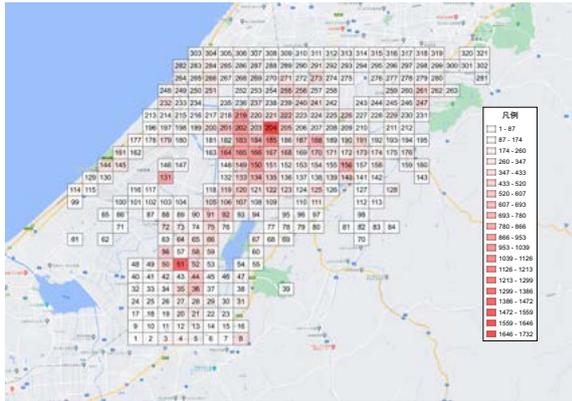


図-2 就業地別の家計数

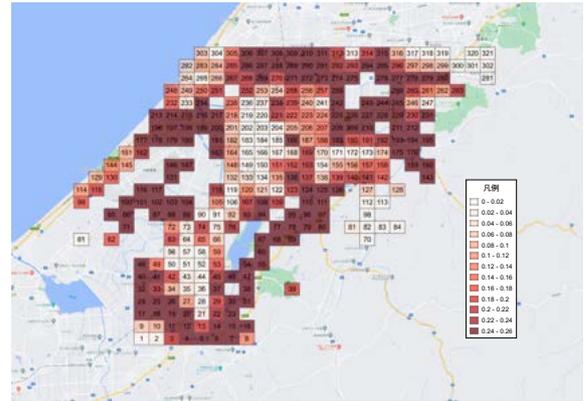


図-4 市街化調整区域面積

年 5 月 29 日午後 1 時時点の滞在住所を勤務地  $i$  と仮定する。ただし、本モデルでは対象地域内の人口移動のみを扱っているため、対象地域外に居住地または勤務地を持つデータは除外する。居住地別の家計数  $n_a$ 、就業地別の家計数  $m_i$  は図 1, 2 に示す通りである。

区別の土地面積  $A_a$ : 国土数値情報の 2014 年土地利用細分メッシュデータから算出する。具体的には、土地利用細分メッシュデータから得られる 100m メッシュごとの土地の各利用区分を利用して、500m メッシュの総面積から河川湖沼・海水域面積を引いたものを使用する。

住宅用の土地面積  $K_{Ra}$ : 住宅用の土地面積は、以下のように設定した: 市街化区域に指定されている地区では、用途地域における第一種低層住居専用地域から準住居地域を住宅に使用できる面積とした; 市街化区域に指定されていない地区では、国土数値情報の土地利用細分データにおける建物用地を住宅に利用できる面積であるとした。

業務用の土地面積  $K_{M}$ : 業務用の土地面積については、市街化区域に指定されている地区では、用途地域における近隣商業地域、商業地域、準工業地域、工業地域、工業専用地域の面積を使用した。市街化区域に指定されていない地区では、土地面積から土地利用細分

データの建物用地面積を差し引いたものを用いた。

地区間の移動時間  $\tau_{ai}$ : 異なる地区間の移動時間は、各メッシュの中心間の直線距離を分速 50m で移動した場合にかかる時間とする。また、地区内は移動時間がかからないと仮定する。

居住地のアメニティに含まれる土地固有の効果に関する変数  $X_i$ : モデルの変数候補として準備したのは、国土数値情報から得られる以下の変数である:

1. 道路延長 (m)
2. 市街化区域面積 (km<sup>2</sup>)
3. 市街化調整区域面積 (km<sup>2</sup>)
4. 小松駅までの距離 (min)

市街化区域面積・市街化調整区域面積は、図 3, 4 に示すとおりである。

## 4. 従来型のパラメータ設定

### (1) 推定手法

従来型のパラメータ設定として、Ahlfeldt et al.<sup>3)</sup> による方法でパラメータを設定する。そこで、本節では、その具体的な手順を示す。なお、本研究では、以降で示すバイズ推定アプローチとの結果を比較するための便宜上、 $\theta = 1$  と仮定した。この仮定は以降の推定手順

を単純化するためのものであり、本稿で用いたデータを利用した  $\theta$  の推定も可能である。

### step 1: 通勤費用パラメータ

通勤費用パラメータ  $t$  の推定には、立地均衡条件 (18) を用いる。具体的には、立地均衡条件 (18) の両辺に自然対数をとることで、次の重力方程式を得る：

$$\ln h_{ai} = t\tau_{ai} + D_{Ra} + D_{Ci} + C \quad (22)$$

ここで、 $D_{Ra}$  は居住地  $a$  に関する項、 $D_{Ci}$  は勤務地に関する項、 $C$  は定数項を表す。 $h_{ai}, \tau_{ai}$  のデータが得られることから、固定効果推定法により  $t$  の推定値が得られる。なお、本研究では、推定式 (22) の都合上、 $h_{ij} \geq 1$  となるデータを用いて推定する。

### step 2: 居住地、勤務地に由来する項に関する値

次に、step 1 で得られた  $t\tau_{ai}$  を利用して、間接効用関数に含まれる居住地・勤務地に関する次の項の値を得る：

$$D_{Ra} \equiv -(1 - \mu)\beta \ln n_a + \psi_a, \quad D_{Ci} \equiv \lambda_i m_i^{-\gamma}. \quad (23)$$

これらの項は、立地均衡条件 (18) が以下のように変形できることを利用すると計算できる：

$$n_a = \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{\exp[D_{Ra} - t\tau_{ai}]}{\sum_{b \in \mathcal{I}} \exp[D_{Rb} - t\tau_{bi}]} m_i \quad (24a)$$

$$m_i = \sum_{a \in \mathcal{I}} \frac{\exp[D_{Ci} - t\tau_{ai}]}{\sum_{j \in \mathcal{I}} \exp[D_{Cj} - t\tau_{aj}]} n_a \quad (24b)$$

より具体的には、実データから得られる  $n_a, \tau_{ai}, m_i$  と  $t$  を用いて、非線形方程式 (24a), (24b) を解けば、 $D_{Ra}, D_{Ci}$  が与えられる。ただし、これらの非線形方程式の解を一意に求めるには (人口保存則が成立するため) 自由度が 1 足りない。したがって、 $D_{Ra}, D_{Ci}$  に関して何らかの基準化が必要となる点に注意が必要である。

### step 3: floor space に関するパラメータの設定

生産費用のうち floor space に必要な費用の割合  $1 - \alpha$ 、floor space の建設費用のうち土地に必要な費用の割合  $1 - \mu$  を、既往研究<sup>5), 6), 7)</sup> で推定された値に設定する：

$$1 - \alpha = 0.20, \quad 1 - \mu = 0.25. \quad (25)$$

また、 $\beta$  は、家計の総支出に占める floor space 費用の割合  $\frac{\beta n_a}{\sum_{i \in \mathcal{I}} w_i h_{ai}}$  の平均値が上記の既往研究と一致するように設定する。すなわち、次の条件を満たす値とする：

$$\frac{1}{I} \sum_{a \in \mathcal{I}} \frac{\beta n_a}{\sum_{i \in \mathcal{I}} w_i h_{ai}} = 0.25. \quad (26)$$

ここで、 $w_i$  は、 $D_{Ci} = w_i$  の関係を利用する。

### step 4: 居住地のアメニティ・生産性

居住地のアメニティ  $B_a$  と生産性  $F_i$  は、これまでに得られたパラメータ・変数を用いることで求まる。具体的には、(15b), (16b), step 1, 3 で得られた

$\beta, \mu, \alpha, D_{Ra}, D_{Ci}$ 、データから与えられる  $n_a, m_i$  を用いることで、 $B_a, F_i$  が与えられる：

$$B_a = D_{Ra} + (1 - \mu)\beta (\ln n_a - \ln \kappa_{Ra}) - \beta(\mu \ln \beta - 1), \quad (27a)$$

$$F_i = \alpha^{-1} \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{(1 - \alpha)\mu} \left\{ D_{Ci} \left( \frac{m_i}{\kappa_{Ci}} \right)^\gamma \right\}^{1 - (1 - \alpha)\mu} \quad (27b)$$

なお、資本価格  $P$  は、均衡状態に何ら影響を与えないため、Ahlfeldt et al.<sup>3)</sup> と同様、1 に基準化する。

### step 5: 居住地のアメニティ

step 4 で得られた  $B_a$  を被説明変数とした以下の式を用いて、各地点に固有のアメニティを生み出す効果に関する変数選択及びパラメータ推定を行う<sup>1)</sup>。ただし、本研究では、空間的自己相関に対処するために、固有ベクトル空間フィルタリング (eigenvector spatial filtering) アプローチ<sup>8)</sup> を採用する。このアプローチは、地点間距離の逆数  $1/\tau_{ai}$  を要素に持つ空間重み行列の固有ベクトル  $\mathbf{Z}$  を説明変数に導入するだけで空間的自己相関に対処できる。

本研究では、 $B_a$  を、次の推定式を用いて推定する：

$$B_a = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{X} + \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{Z}_a + C, \quad (28)$$

ここで、 $\mathbf{X}_a$  は各地点のアメニティ水準に関する変数、 $\boldsymbol{\eta}$  はそれらのパラメータ、 $C$  は定数項を表す。また、説明変数に加える空間重み行列の固有ベクトル  $\mathbf{Z}$  は、Tiefelsdorf and Griffith<sup>9)</sup> に基づき、正の固有値に対応した固有ベクトルのみを用いる。これは、これらの固有ベクトルが、正の空間相関を捉えることが知られているためである。

## (2) パラメータ設定の結果

前節の方法で定めたパラメータ値は、表 1, 図 5 に示す通りとなった。なお、step 5 の推定では、3 章で示した変数  $\mathbf{X}$  (i.e., 道路延長, 市街化区域面積, 市街化調整区域面積, 小松駅までの距離) を強制投入、空間重み行列の固有ベクトル  $\mathbf{Z}$  をステップワイズ法 (有意確率 5%) により選定した。その結果として定まった道路延長, 市街化区域面積, 市街化調整区域面積, 小松駅までの距離に対応するパラメータが、各々、 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$  である。

図 5 に示した結果は、次章でも議論するように、本研究で用いたデータとの整合性が確認できた。また、表 1 から、 $t, \eta_1, \eta_2$  の有意確率が 5% を下回っている一方で、 $\eta_3, \eta_4$  は有意確率が 10% を超えていることがわかる。さらに、 $\eta_4$  が正の値を取ることから “小松駅からの距離

<sup>1)</sup> step 5 と同様の手順により生産性  $F_i$  に影響を与える要因をモデル化することができる。

表-1 パラメータの設定値

パラメータ	設定値	有意確率
$\alpha$	0.80	-
$\mu$	0.75	-
$\beta$	2.11	-
$-t$	$-1.80 \times 10^{-2}$	0.000
$\eta_1$	$5.46 \times 10^{-4}$	0.024
$\eta_2$	8.57	0.000
$\eta_3$	2.79	0.124
$\eta_4$	$2.20 \times 10^{-3}$	0.493

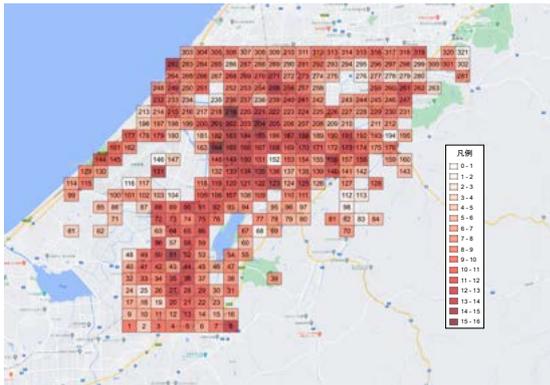


図-5 生産性  $F_i$

が遠い地点ほどアメニティ水準(効用)が高い”という直感とは異なる結果が得られている。

この推定結果を用いて、政策分析等を実施することは明らかに適切ではない。ただし、本稿では同じモデル・データを利用してベイズ推定した結果と上記の結果を比較する。なお、今後、変数の候補を増やすとともに、それらを選択するアプローチを採用した場合の従来手法とベイズ推定の結果を比較する予定である。この結果については、発表時に報告する。

### 5. ベイズ推定アプローチ

本章では、ベイズ推定を用いて本研究で構築したモデルのパラメータを推定を行う。

#### (1) ベイズ推定の定義

本研究で用いるベイズ推定は、以下のように定義する。

1. 観測されたデータ (i.e., 家計数) を生成した真の分布の確率密度関数  $q(x)$  を推定したい。
2. 観測されたデータは、 $q(x)$  に独立に従って生成された  $X^n = (X_1, \dots, X_n)$  とする。
3. 推定するモデルを  $p(x|w)$  と表し、 $w$  をパラメータと呼ぶ。

#### 4. 尤度関数を

$$\prod_{i=1}^n p(X_i | w) \quad (29)$$

と定義する。

#### 5. パラメータの事後分布を

$$p(w | X^n) = \frac{1}{Z_n} \varphi(w) \prod_{i=1}^n p(X_i | w) \quad (30)$$

と定義する。なお、 $Z_n$  は周辺尤度であり、

$$Z_n = \int \varphi(w) \prod_{i=1}^n p(X_i | w) dw \quad (31)$$

である。

#### 6. 上式に含まれるパラメータの事前分布 $\varphi(w)$ の存在を認め、分析者が事前に定める。

上記のうち、1 から 4 までは一般的な最尤推定と同一である。一方で、5 および 6 における事前分布・事後分布の存在を前提とする点は最尤推定と異なる。詳細は専門書<sup>10)</sup>に譲るが、この一見煩雑な手続きの有用性は、モデル構造が複雑な場合やサンプル数が少ない場合に発揮される。本研究の対象もここに相当するため、ひとつの可能性としてベイズ推定アプローチを検討する。

なお、最尤推定は事後分布の式 (30) のうち尤度関数 (式 (29)) の部分のみに着目し、これを最大化する  $w$  を推定量とする推定方法である。最尤推定は、問題が一定の条件を満たす場合 (e.g., モデル構造が比較的単純でサンプル数が十分に多い場合) には統計的に良い性質を有している。しかし、そうでない場合にはこの性質は成り立たない。また、事前分布が恣意的なものであり客観性を欠くという批判は、現在では統計的に明確に否定されている。すなわち、事前分布の妥当性についても、ベイズ推定の手続きにおいて確認することができる。

本研究では、事後分布を用いて事後平均  $\bar{w}_n$  (式 (32)) および 95% ベイズ信頼区間を算出する。等裾事後信頼区間  $R = [L_{\alpha/2}, R_{\alpha/2}]$  (式 (33a), (33b)) を本研究で用いるベイズ信頼区間として、 $\alpha = 0.05$  とする。そして、 $q(x)$  の推定結果を  $p(x|\bar{w}_n)$  とみなすことで、パラメータの値について既存の推定手法との比較や地図上への図示を行う。

$$\bar{w}_n = \int w p(w | X^n) dw. \quad (32)$$

$$\int_{-\infty}^{L_{\frac{\alpha}{2}}} p(w | X^n) dw = \frac{\alpha}{2}. \quad (33a)$$

$$\int_{R_{\frac{\alpha}{2}}}^{\infty} p(w | X^n) dw = \frac{\alpha}{2}. \quad (33b)$$

なお、複数のモデル候補がある場合の変数選択は、情報量規準である WAIC<sup>11)</sup> および WBIC<sup>12)</sup> を参考に行

う。これらの指標の値が小さいモデルが統計的により妥当であると判断される。

(2) 推定における設定

a) 尤度関数

本研究における尤度関数(式(29))を設定する。上式の観測されたデータ  $X_i$  ひとつは、家計ひとつに対応する。また、パラメータ  $w$  が与えられたときに、ある家計ひとつが居住地  $a$ 、就業地  $i$  を選択する確率は、式(18)の両辺を  $N$  で除したもので与えられる。したがって、全家計についての対数尤度  $\log L$  は以下になる。

$$\begin{aligned} \log L &= \sum_a \sum_i h_{ai} \log \frac{\exp[\theta v_{ai}]}{\sum_b \sum_j \exp[\theta v_{bj}]} \\ &= \sum_a \sum_i h_{ai} (\theta v_{ai} - \log \sum_b \sum_j \exp[\theta v_{bj}]). \end{aligned} \tag{34}$$

この尤度関数に含まれるパラメータは、原理的にはすべて同時に推定可能である。ただし、 $\theta$ 、 $\alpha$  および  $\mu$  は前章との比較のため同じ値で固定する。したがって、本研究で推定するパラメータは、アメニティに関するパラメータ  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 、総収入に占める floorspace への支出割合  $\beta$ 、通勤費用パラメータ  $t$ 、生産性を表す指標  $F_j$  の計 327 個である。

b) 事前分布の設定

推定するパラメータそれぞれについて、事前分布を以下に示す範囲の一様分布で設定した。まず、モデルの前提条件から、 $0 \leq \beta, 0 \leq t, 0 \leq F_j$  とした。また、現実的な値の大きさを考えて、 $0 \leq \beta \leq 1, 0 \leq t \leq 1, 0 \leq F_j \leq 10, 0 \leq \eta_1 \leq 1, 0 \leq \eta_2 \leq 10, -5 \leq \eta_3 \leq -5, -1 \leq \eta_4 \leq 1$  とした。

なお、事前分布の改良はベイズ推定アプローチにおける課題のひとつである。複数の設定で推定を行うことで情報量基準により相対的に良い設定を探索できるため、今後検討を深めたい。

c) 事後分布の実現：サンプリング方法

本研究のようにシンプルな事前分布  $\varphi(w)$  と尤度  $\prod_{i=1}^n p(X_i | w)$  であれば計算は容易だが、その場合でも周辺尤度  $Z_n$  の計算は容易ではない<sup>13)</sup>。そこで、事後分布に比例する分布  $\varphi(w) \prod_{i=1}^n p(X_i | w)$  から乱数サンプルを多数発生させて事後分布の代わりとする。この事後サンプルを発生させる方法の1つにマルコフ連鎖モンテカルロ法(MCMC法)がある。

本研究では、確率的プログラミング言語である Stan を使用して MCMC サンプリングを行った。推定には CPU:AMD Ryzen 9 3950X(16 コア 32 スレッド)、メモリ:64GB を用いた。また、MCMC の各種設定は、事後分布が十分に収束したと判断できるように設定を行っ

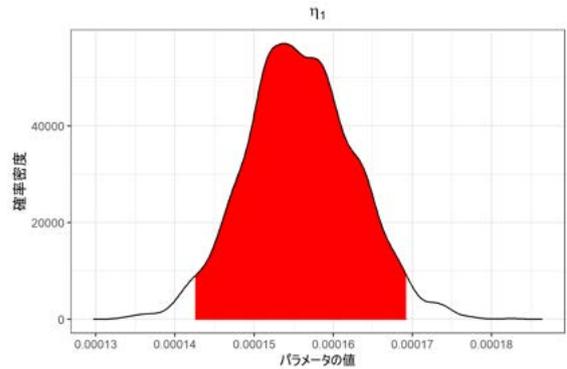


図-6 アメニティ(道路延長)のパラメータ  $\eta_1$  の事後分布

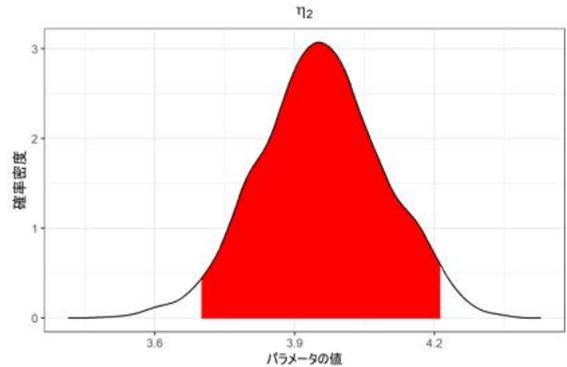


図-7 アメニティ(市街化区域)のパラメータ  $\eta_2$  の事後分布

た。具体的には、MCMC サンプリングのマルコフ連鎖の数は4、間引き間隔を1として、ウォームアップ数は各連鎖において1500、事後分布に用いるサンプリング数は各連鎖において500とした。よって、推定全体で事後分布の実現に用いたサンプリング数は2000である。

(3) 推定結果

本研究では、推定に6時間40分7秒要した。計算時間は、モデル構造やMCMCの設定に大きく依存する。本研究は、従来型のパラメータ推定とベイズアプローチを用いたパラメータ推定の比較を行うことが目的の1つであるため、計算時間に関する追求を行わなかった。しかし、モデル構造の改良やMCMCの設定の変更、マシンスペックの向上により計算時間は大きく変動することが見込まれる。

アメニティに関するパラメータ( $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ )の事後分布をそれぞれ図-6,7,8,9に示す。色付けした部分は、95%ベイズ信頼区間である(以降の図も同様)。いずれも単峰の分布となった。

次に、総収入に占める floorspace への支出割合  $\beta$ 、通勤費用パラメータ  $t$  の事後分布をそれぞれ図-10, 11に示す。これらも単峰の分布となった。なお、 $\beta$  は、分布のピークが0にかなり寄っている。モデルの構造自体は変えずパラメータに定数をかける(たとえば、 $\beta' = 1000\beta$  として  $\beta'$  を推定する)ことで、ピークの正確性が増し、

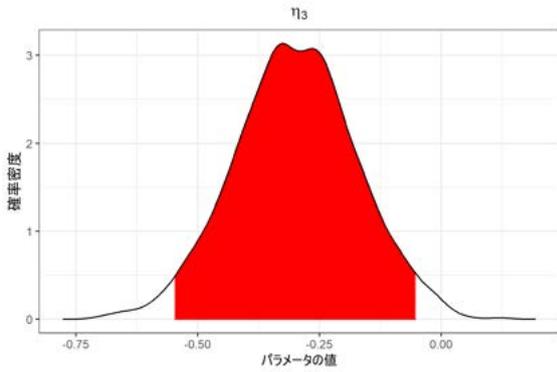


図-8 アメニティ（市街化調整区域）のパラメータ  $\eta_3$  の事後分布

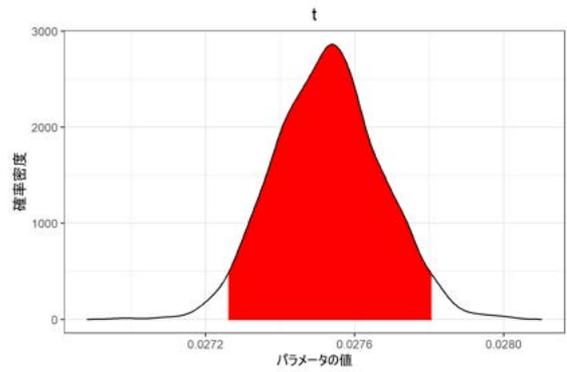


図-11 通勤費用パラメータ  $t$  の事後分布

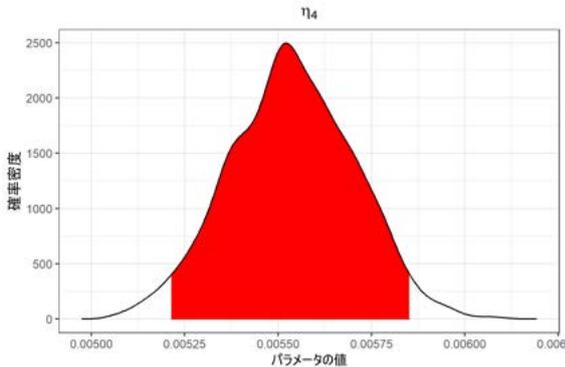


図-9 アメニティ（小松駅までの所要時間）のパラメータ  $\eta_4$  の事後分布

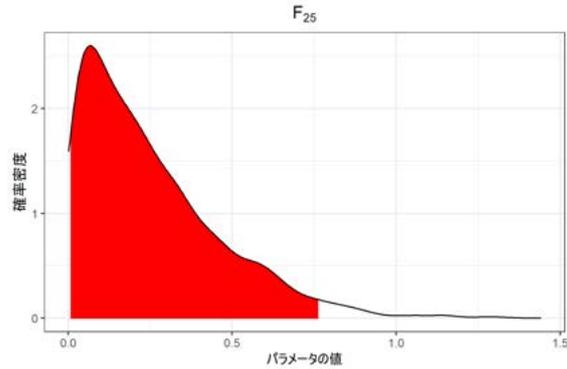


図-12 生産性を表す指標  $F_{25}$  の事後分布

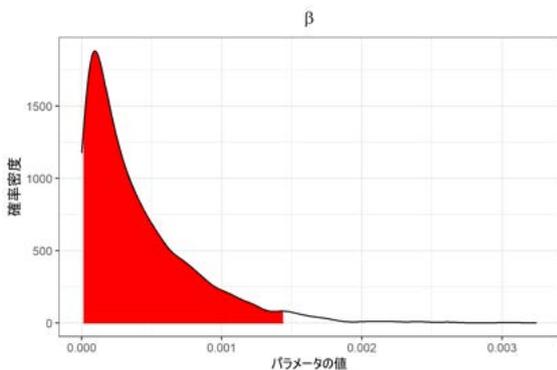


図-10 総収入に占める floor space への支出割合  $\beta$  の事後分布

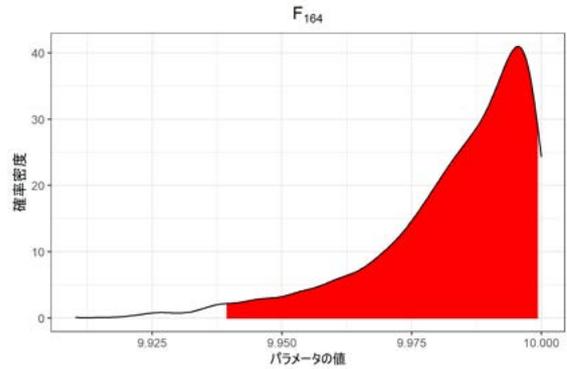


図-13 生産性を表す指標  $F_{164}$  の事後分布

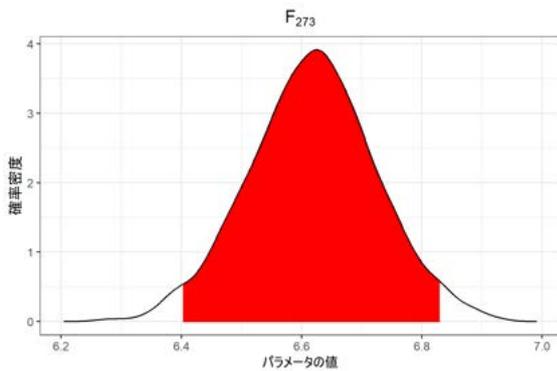
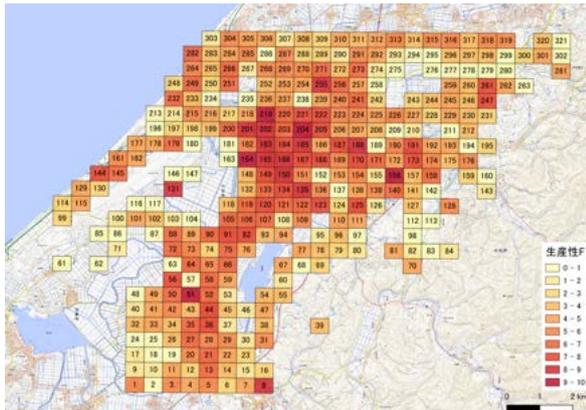
単峰であることも視覚的に把握しやすくなると考えられる。

生産性を表す指標 ( $F_j$ ) は、メッシュごとに異なる値を取るパラメータである。その個数は 321 個であるが、紙面の都合上すべての事後分布を掲載することは難しい。そこで、代表例として、 $F_{25}$ ,  $F_{164}$ ,  $F_{273}$  の事後分布を図-12,13,14 に示す。これらの図に示すように、 $F_j$  は、ピークが 0 によっている分布 (図-12)、10 によっている分布 (図-13)、および形状が整った単峰の分布 (図-14) に大別される。視覚的な分類の結果、321 個のうち 0 によっている分布は 42 個 (全体の 13%)、10 によっている分布は 3 個 (全体の 1%)、形状が整った単峰

の分布は 276 個 (全体の 86%) であった。

本研究では、 $F_j$  の事前分布を  $0 \leq F_j \leq 10$  に設定したことにより、形状が整った単峰の分布の他に、ピークが 0 によっている分布と 10 によっている分布が確認された。 $0 \leq F_j$  は理論的な制約条件であるが、 $F_j \leq 10$  は理論的な背景のない設定である。したがって、ピークが 10 に近いパラメータは、本来より大きな値を取る可能性がある。今後、事前分布の範囲を広げた推定の試行が考えられる。

また、すべてのメッシュの  $F_j$  の事後平均を地図上に図示したものを図-15 に示す。図-15 において  $F_j$  が特に大きいメッシュに着目すると、メッシュ 164 には小松市民病院、メッシュ 51 には小松製作所の栗津工場があった。 $F_j$  が大きい他のメッシュにも病院や工場、商

図-14 生産性を表す指標  $F_{273}$  の事後分布図-15 生産性を表す指標  $F_j$  の事後平均

業施設が立地していた。これは、本研究で用いたデータと整合性がある結果であった。

最後に、パラメータの事後平均と95%ベイズ信頼区間を表2に示す。比較として、従来型のパラメータ設定の設定値(表1)も付記する。

従来型のパラメータ設定の設定値と比較すると、値のスケールが近かったのは  $-t, \eta_1, \eta_2, \eta_4$  であった。推定値に大きな差異があったのは、 $\beta$  と  $\eta_3$  であった。 $\beta$  は、従来型のパラメータ設定では既往研究の推定結果と一致するように設定していたのに対し、ベイズアプローチでは他の推定パラメータと同様、 $\beta$  もデータからの推定を試みている。その結果、本アプローチでは、従来型で推定された効果に加え、堤ら<sup>1)</sup>でも議論されている“近隣効果(正の外部性)”も捉えている可能性がある。また、 $\eta_3$  は従来型のパラメータ設定では有意確率は0.124であり、有意水準を5%と設定するのであれば棄却される。

#### (4) モデル選択

従来手法では、ステップワイズ法を用いてパラメータ選択を行っている。同様に、ベイズアプローチでも情報量基準を用いてアメニティ項に関して変数選択を行う。本来は、4つのアメニティ項それぞれについて、変数として採用する/しないの組み合わせ計16通

りが存在する。ただし、本研究ではなるべく多くの変数を残す前提下、簡単のため4つの変数のどれか1つのみを採用しない場合のモデルにおいてWAICとWBICを算出し、元のモデルとの比較を行った。各モデルにおけるWAICとWBICの値を表3に示す。表3の通り、どのアメニティ変数も除かないモデルのWAIC, WBICが最も小さかった。したがって、アメニティ変数として  $X_1, X_2, X_3, X_4$  のすべてを採用するモデルが統計的に支持された。

## 6. おわりに

本研究では、土地利用モデルのパラメータ推定において、ベイズ推定アプローチによりパラメータを一括で推定することを試みた。その結果、現実的な計算時間でパラメータを一括で推定することができた。従来手法において有意水準5%としたときに有意であるパラメータは、ベイズアプローチにおいて95%ベイズ信頼区間内ではないものの、値のスケールは一致していた。また、生産性を表す指標  $F_j$  の事後平均が、本研究で用いたデータと整合性のとれる結果であることも確認できた。

ベイズアプローチはパラメータを一括で推定できる。また、変数の入れ替えを柔軟に行えることによりモデル選択も容易であるという面で推定手法として優位である。その一方で、段階的に推定する手法よりも計算負荷が圧倒的に大きい(本研究でも、従来の段階推定では、推定時間が数秒ほどに対し、ベイズアプローチでは7時間ほど要した)。本研究で構築した土地利用モデルは、既往研究で用いられてきた土地利用モデルと比較して極めてシンプルな構造である。さらに、都市圏としては比較的小規模な石川県小松市周辺を分析対象としている。モデルが単純であり分析対象も小規模であるからこそ、ベイズアプローチで容易に推定が行うことができた面もある。今後、本研究で検討した推定手法が普及していくには、より複雑なモデルで分析対象が大規模であったとしても、比較的容易に推定できる必要がある。今後、推定手法としての改良により、実用面においても妥当性のある推定手法を確立していきたい。

また、本研究の範疇であるにも関わらず本稿に掲載することができなかった要素がいくつかある。それらは発表時に報告を行う。

謝辞: 本研究は国土交通省「道路政策の質向上に資する技術研究開発」の令和2年度研究助成(テーマ名:公共交通ターミナル整備の空間経済分析に関する研究開発)の助成を受けたものである。

表-2 パラメータの事後平均と 95%ベイズ信頼区間

パラメータ	事後平均	95%ベイズ信頼区間		従来型の設定値 (表 1)
		下限値	上限値	
$\beta$	$3.98 \times 10^{-4}$	$1.05 \times 10^{-5}$	$1.44 \times 10^{-3}$	2.11
$-t$	$-2.75 \times 10^{-2}$	$-2.78 \times 10^{-2}$	$-2.72 \times 10^{-2}$	$-1.80 \times 10^{-2}$
$\eta_1$	$1.56 \times 10^{-4}$	$1.42 \times 10^{-4}$	$1.69 \times 10^{-4}$	$5.46 \times 10^{-4}$
$\eta_2$	3.96	3.70	4.21	8.57
$\eta_3$	$-2.99 \times 10^{-1}$	$-5.48 \times 10^{-1}$	$-5.20 \times 10^{-2}$	2.79
$\eta_4$	$5.53 \times 10^{-3}$	$5.21 \times 10^{-3}$	$5.85 \times 10^{-3}$	$2.20 \times 10^{-3}$

表-3 各モデルの WAIC と WBIC

除いた変数	WAIC	WBIC
なし	<b>4.3552</b>	<b>449763</b>
$X_1$	4.3577	450022
$X_2$	4.3601	450271
$X_3$	4.3553	449768
$X_4$	4.3608	450329

## 参考文献

- 1) 堤盛人, 山崎清, 小池淳司, 瀬谷創: 応用都市経済モデルの課題と展望, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol. 68, No. 4, pp. 344–357, 2012.
- 2) 上田孝行, 石川良文, 小池淳司, 石倉智樹, 小林優輔, 山崎清, 武藤慎一: Excel で学ぶ地域・都市経済分析, コロナ社, 2010.
- 3) Ahlfeldt, G. M., Redding, S. J., Sturm, D. M. and Wolf, N.: The Economics of density: Evidence from the Berlin wall, *Econometrica*, Vol. 83, No. 6, pp. 2127–2189, 2015.
- 4) Sandholm, W. H.: *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT Press, 2010.
- 5) Davis, M. A. and Ortalo-Magné, F.: Household expenditures, wages, rents, *Review of Economic Dynamics*, Vol. 14, No. 2, pp. 248–261, 2011.
- 6) Valentinyi, Á. and Herrendorf, B.: Measuring factor

- income shares at the sectoral level, *Review of Economic Dynamics*, Vol. 11, No. 4, pp. 820–835, 2008.
- 7) Epple, D., Gordon, B. and Sieg, H.: A new approach to estimating the production function for housing, *American Economic Review*, Vol. 100, No. 3, pp. 905–924, 2010.
  - 8) Griffith, D. A.: *Spatial autocorrelation and spatial filtering: Gaining understanding through theory and scientific visualization*, Springer, pp. 247, 2003.
  - 9) Tiefelsdorf, M. and Griffith, D. A.: Semiparametric filtering of spatial autocorrelation: The eigenvector approach, *Environment and Planning A*, Vol. 39, No. 5, pp. 1193–1221, 2007.
  - 10) 渡辺澄夫: ベイズ統計の理論と方法, コロナ社, 2012.
  - 11) Watanabe, S.: Asymptotic Equivalence of Bayes Cross Validation and Widely Applicable Information Criterion in Singular Learning Theory, *Journal of Machine Learning Research*, Vol.11, pp. 3571–3594, 2010.
  - 12) Watanabe, S.: A Widely Applicable Bayesian Information Criterion, *Journal of Machine Learning Research*, Vol.14, pp. 867–897, 2013.
  - 13) 松浦健太郎: Stan と R でベイズ統計モデリング, 共立出版, 2016.

(2021. 3. 7 受付)

Structural estimation of a land-use model: A Bayesian approach

Shusuke KOBAYASHI, Wataru NAKANISHI, Hikari HORIKOSHI, Yuki TAKAYAMA