

スケジュールコストの異質性を考慮した タンデムボトルネック出発時刻選択問題

酒井 高良¹・赤松 隆²・佐津川 功季³

¹学生会員 東北大学大学院情報科学研究科・JSPS 特別研究員 DC (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: takara.sakai.t1@dc.tohoku.ac.jp (Corresponding Author)

²正会員 東北大学教授 大学院情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

³正会員 東北大学助教 未来科学技術共同研究センター (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

E-mail: satsukawa@tohoku.ac.jp

本研究では、タンデムボトルネック・ネットワークにおいてスケジュール遅れ時間の価値が異なる利用者が存在する状況における動的システム最適 (DSO) 配分と動的利用者均衡 (DUE) 配分の解析的解法および両者の対応関係を解明する。具体的には、まず、DSO 配分を対象に最適輸送理論および動的計画法の枠組みを活用した解析的解法を構築する。次に、スケジュールコスト関数の形状に関する緩い仮定のもとで DUE 状態と DSO 状態が 1 対 1 対応することを、両者を結びつける closed-form 関係式の導出をもって明らかにする。このことは DUE 配分の解析解が、DSO 配分の解析解を経由して導出できること意味する。最後に解析的に得られた DSO 状態と DUE 状態の類似点および相違点を具体例を用いて示す。

Key Words: *departure time choice, tandem bottlenecks, heterogeneity in value of schedule delay, dynamic system optimal, dynamic user equilibrium*

1. はじめに

(1) 背景

道路交通における渋滞の多くは、需要が特定の時間帯に集中し、道路容量を超過することで発生するボトルネック渋滞である。この渋滞の緩和策として、交通需要の時間方向の分散を促す Transportation Demand Management (TDM) 施策の必要性が従来から認識されている。このような施策を設計・評価する際に重要となるのが、物理的な交通流ダイナミクス (供給サイドの条件) だけでなく、利用者の出発時刻選択行動 (需要サイドの条件) を陽に考慮することである。出発時刻選択問題はこの要請に答える理論モデルのひとつである。

出発時刻選択問題の基本的な枠組みは、ボトルネックにおける待ち行列ダイナミクスと利用者の費用最小化原理に基づく出発時刻選択行動の相互作用の結果生じる動的な均衡状態 (DUE : Dynamic User Equilibrium) を求めるというものである。ここで利用者は、ボトルネックにおける待ち行列遅れ時間に加えて、その待ち行列に巻き込まれることに起因する終点への実到着時刻と希望到着時刻との開き (スケジュール遅れ時間) を考慮して、自身の旅行費用を最小化するように出発時刻を選択する。この出発時刻選択問題に関する研究は、単一ボトルネックにおいて均質な利用者 (i.e., 希望到着時刻や遅れ時間価値が同一な利用者) を仮定した基本モデルを

中心に発展してきた¹⁾。ここでは均衡解 (フローパターン) の存在・一意性といった理論的性質に加えて、動的な社会的最適状態 (DSO : Dynamic System Optimal) を達成する最適混雑料金価格の設定方策などが明らかにされている^{2),3),4),5)}。

この基本モデルの重要な拡張のひとつとして、利用者の異質性の考慮が挙げられる。この点については出発時刻選択問題の黎明期から、希望到着時刻や待ち行列遅れ時間・スケジュール遅れ時間の時間価値の異質性など様々な枠組み下での解析が存在する¹⁾。ここでは、均衡フローパターンにおける希望到着時刻や時間価値に準じたソーティング特性などが明らかにされている。さらに、時間価値が異なる利用者の存在下では、DSO 状態を達成するための最適混雑料金価格の設定方策が、均質利用者を仮定した場合と本質的に異なることも示されている^{6),7),8),9),10),11)}。

基本モデルの展開の別の方向性として、複数ボトルネックが存在するネットワーク (i.e., コリドー・ネットワーク) への空間構造の拡張がある。Kuwahara¹²⁾, Arnott et al.¹³⁾ では、それぞれタンデムボトルネック・ネットワーク, Y 字ネットワークを対象として、空間構造の縮約可能性を示し、単一ボトルネックのケースとの対応を明らかにしている。Akamatsu et al.¹⁴⁾ は、到着時刻ベースの変数を導入 (i.e., ラグランジュ座標系ア

アプローチ)することにより、数理構造が明快な線形相補性問題として定式化し、均衡解の基礎的性質を示している。

このように、利用者の異質性および空間構造の拡張について各々の方向性で一定の理論蓄積が存在する。その一方で両者を同時に考慮した状況下における解析はほとんど存在しない。単独でも均衡解の特徴を定性的に変え得るこれらの拡張要素を統合した出発時刻選択問題の解析が求められる。

(2) 目的

本研究では、コリドー・ネットワークにおける解析の第一段階として、タンデムボトルネック・ネットワークにおいて、利用者のスケジュールコストの異質性を考慮した出発時刻選択問題の性質を解明する。具体的には、上記枠組みのもとで2つの配分原則に従う出発時刻選択問題；DUE配分とDSO配分の解析的解法および両者の対応関係を明らかにする。

本研究では、上記の目的を次に示す解析アプローチにより達成する。まず、DSO配分を無限次元線形計画問題として定式化する。そして、最適輸送理論の枠組みを活用することで、動的計画法のように上流側ボトルネックに関する変数から順番に解析解を得られることを明らかにする。次に、DUE配分を無限次元相補性問題として定式化する。ここで、DSO配分とDUE配分の問題構造上の類似点に着目し、スケジュールコスト関数の形状に関する緩い仮定のもとではDUE状態とDSO状態が1対1対応することを、両者を結びつけるclosed-form関係式の導出をもって明らかにする。このことは、DUE配分の解析解が、DSO配分の解析解を経由して導出できること意味している。最後に、ここまでで解析的に得られたDSO状態とDUE状態のフローパターン、コストパターンの対応関係を示す。

(3) 本稿の構成

本稿の構成を次に示す。続く2.において、DSO配分とDUE配分に共通の事項について述べる。次に3.でDSO配分の解析的解法を示し、4.でDUE配分の解析的解法およびDSO状態とDUE状態との対応関係を示す。最後に5.にて本研究のまとめと今後の課題を示す。

2. モデル

本稿では、起点ノードが2つ、終点ノードが1つ存在するコリドー・ネットワークを解析対象とする。最下流の終点ノードのインデックスを0とし、起点ノードのインデックスは上流に向かって昇順に1,2とする(図-1)。起点ノード集合を $N \equiv \{i \mid i = 1, 2\}$ と表す。起

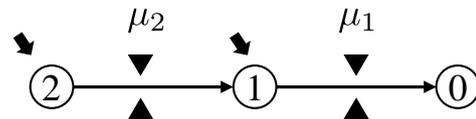


図-1 2起点1終点コリドー・ネットワーク

点 i の直下流リンクのインデックスを i と対応付ける。各リンクにはボトルネックが存在し、その容量を μ_i とする。ただし下流側ボトルネックの方が容量が大きいものとする(i.e., $\mu_2 < \mu_1$)。起点 i から終点0までの自由走行時間を d_i と表す。

ネットワーク上を旅行する各利用者の終点希望到着時刻 t^d は同一の $t^d = 0$ とする。実際の到着時刻 $t \in \mathcal{T}$ が希望到着時刻 t^d と異なる場合、その“ずれ”から評価されるスケジュールコストを経験する。このスケジュールコストは、利用者が所属するグループごとに異なるものとする。利用者グループの集合を $\mathcal{K} = \{k \mid k = 1, 2, \dots, K\}$ と表記する。グループ k に属する利用者が時刻 t に終点0へ到着するときに経験するスケジュールコストを $\alpha^k s(t)$ と表す。ここで、 $s(t)$ は $t = 0$ を頂点とする狭義凸関数である(i.e., $s(0) = 0, \dot{s}(0) = 0$)； α^k はスケジュール遅れ時間を金銭価値換算した交通費用に変換するパラメータであり $\alpha^1 > \alpha^2 > \dots > \alpha^K > 0$ が成立している。つまり k が小さい利用者グループほどスケジュールコストの価値が大きい。起点 i 、利用者グループ k の利用者の総数は与件であり Q_i^k と表す。

各利用者は、通過ボトルネックにおける待ち行列遅れ時間と通行リンクにおける自由走行時間およびスケジュールコストを経験する。起点 i 、グループ k の利用者が時刻 t に終点へ到着したときに経験する交通費用は次のように計算される¹：

$$C_i^k(t) = \alpha^k s(t) + \beta \left(d_i + \sum_{ij \leq i} \widehat{w}_j(t) \right) \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall i \in \mathcal{N}. \quad (1)$$

ここで $\widehat{w}_j(t)$ は、終点到着時刻別に定義(i.e., ラグランジュ座標系アプローチ¹⁴⁾)されるボトルネック待ち行列遅れ時間であり、具体的には時刻 t に終点0に到着する利用者がボトルネック i で経験する待ち行列遅れ時間²を表す。 β は自由走行時間と待ち行列遅れ時間を交通費用に換算するパラメータであり、本研究では利用者グループによらず $\beta = 1$ とする(i.e., 待ち行列遅れ時間と自由走行時間に対するコスト感度に、利用者の異質性を仮定しない)。以降では $s^k(t) \equiv \alpha^k s(t)$ をスケジュールコスト関数、 $\widehat{w}_j(t)$ を待ち行列遅れコストと呼ぶ。スケジュールコスト関数 $s^k(t)$, ($k = 1, 2$)の形状を図-2に

¹ 本稿では、式(1)のように $t \in \mathcal{V}\mathcal{T}$ が明白である場合は、これをしばしば省略する。

² 待ち行列ダイナミクスについては、4章DUE配分において後述する。

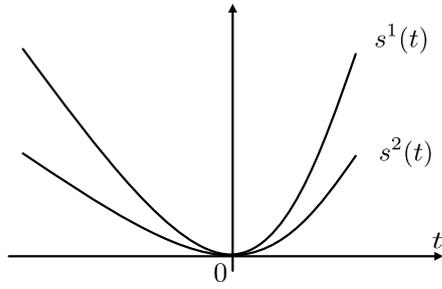


図-2 スケジュールコスト関数

示す。

3. 動的システム最適配分

本章では、DSO 配分の解析解を問題の階層分解手法および最適輸送理論の枠組みを用いて導出する。具体的には、まず、3.(1)において DSO 配分 [DSO-LP] を無限次元線形計画問題として定式化する。続いて 3.(2)で、[DSO-LP] をひとつのマスター問題とボトルネック数個のサブ問題に階層分解する。そして、3.(3)、3.(4)でそれぞれサブ問題、マスター問題の解析解を導出する。最後に、3.(5)にて最終的に得られる DSO 配分の解析解を示す。

(1) 定式化

本研究では、DSO 状態を「全ボトルネックにおいて待ち行列が発生しないという条件のもとで総交通費用がされた交通状態」と定義する。この定義に基づくと、DSO 配分は次の 3つの制約条件と目的関数から構成される無限次元相補性問題として定式化される：

需要の保存条件 需要の保存条件は、配分対象時間帯 \mathcal{T} において、全利用者が終点まで必ずトリップを行うことを保証する条件である。起点が i 、グループが k であり時刻 t に終点 0 へ到着する利用者の終点到着交通流率 $q_i^k(t)$ の時間積分が Q_i^k に一致することを表す等式制約条件として書ける：

$$\int_{\mathcal{T}} q_i^k(t) dt = Q_i^k \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall i \in \mathcal{N}. \quad (2)$$

ここで \mathcal{T} は配分対象時間帯を表す。

ボトルネック容量制約条件 ボトルネック容量制約条件は、DSO 状態においていかなる時間帯でもボトルネックに待ち行列が発生しないことを保証する条件である。この条件は、ある時刻に終点に到着する利用者のフローが、通行してきたボトルネックの容量以下であることを表す不等式制約条件として次のように書ける：

$$\sum_{j \geq i} y_j(t) \leq \mu_i \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (3)$$

ここで $y_i(t)$ は起点が i であり時刻 t に終点 0 へ到着する利用者の終点到着交通流率である。

起点別フローの保存条件 起点別の終点到着交通流率 $y_i(t)$ とグループ別の終点到着交通流率 $q_i^k(t)$ は次の関係を持つ：

$$y_i(t) = \sum_{k \in \mathcal{K}} q_i^k(t) \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (4)$$

目的関数 DSO 状態において、利用者はボトルネック待ち行列遅れコストを経験することなく、自由走行時間で各リンクを通行し終点に到着する。そのため、全利用者が終点までトリップを行ったときに発生する総交通費用は次のように計算される：

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathcal{T}} q_i^k(t) C_i^k(t) dt \\ &= \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathcal{T}} q_i^k(t) \{d_i + s^k(t)\} dt \\ &= \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} d_i Q_i^k + \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathcal{T}} s^k(t) q_i^k(t) dt \end{aligned} \quad (5)$$

式 (5) の第 1 項は総リンク自由走行時間を表し、これはフローパターンに関わらず常に定数となる。式 (5) の第 2 項は総スケジュールコストを表す。これより第 2 項を DSO 配分の目的関数とする。

これらの制約条件、目的関数を用いて、DSO 配分は次のように定式化される：

[DSO-LP]

$$\begin{aligned} & \min_{\{y_i(t) \geq 0, \{q_i^k(t)\} \geq 0\}} \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathcal{T}} s^k(t) q_i^k(t) dt \quad (6) \\ & \text{s.t.} \quad (2), (3), (4). \end{aligned}$$

この問題 [DSO-LP] の最適性条件は次のように表される：

[DSO-LP-OC]

$$\begin{aligned} & (2), (4), \\ & \begin{cases} \sum_{j \geq i} y_j(t) = \mu_i & \text{if } p_i(t) > 0 \\ \sum_{j \geq i} y_j(t) \leq \mu_i & \text{if } p_i(t) = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad (7) \\ & \begin{cases} \sum_{j \leq i} p_j(t) + s^k(t) = \rho_i^k & \text{if } q_i^k(t) > 0 \\ \sum_{j \leq i} p_j(t) + s^k(t) \geq \rho_i^k & \text{if } q_i^k(t) = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall k \in \mathcal{K}. \quad (8) \end{aligned}$$

ここで $\rho_i^k, p_i(t)$ は、それぞれ需要の保存条件 (2) とボトルネック容量制約条件 (3) に対応する双対変数である。

双対変数の最適解は、DSO 状態を達成するための政策を考える際に重要な意味を持つ。具体的には、双対変数 $p_i(t)$ の最適解は、DSO 状態を達成するポトルネックベースの最適混雑料金価格³ を意味する。そして双対変数 ρ_i^k の最適解はそうにして達成された DSO 状態における均衡コストを表す。このことは [DSO-LP] の最適性条件 [DSO-LP-OC] が、最適混雑料金制度導入下における均衡問題として解釈できることより確認できる⁴。このとき、式 (8) は出発時刻選択条件に対応する。以降では主問題の変数に加えて、双対変数の最適解も解析的に導出する。

(2) 解析解導出の方針と問題の階層分解

本研究では、次のアプローチにより、[DSO-LP] の解析解を導出する。まず、[DSO-LP] の決定変数を分離することで、ひとつのマスター問題と、ポトルネック数個のサブ問題に階層分解する。次に、階層分解された各サブ問題が最適輸送問題の構造を持つことに着目し、最適輸送理論の枠組みを活用することで解析解を導出する。そして、導出された解析解を用いることで、動的計画法のように、マスター問題の解を上流ポトルネック側から順番に得られることを示す。そして、得られたサブ・マスター問題の最適解を組み合わせることで、[DSO-LP] の解析解を導出する。

では、決定変数を分離することで [DSO-LP] を階層分解していこう。具体的には、起点別の終点到着交通流率 $y_i(t)$ を決定するマスター問題、起点/グループごとの終点到着交通流率 $q_i^k(t)$ を決定するポトルネック数個のサブ問題に分解する：

[DSO-LP-Master]

$$\min_{\{y_i(t)\} \geq 0} \sum_{i \in \mathcal{N}} Z_i^{S^*}(\mathbf{y}) \quad (9)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j: j \geq i} y_j(t) \leq \mu_i \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad \cdots p_i(t) \quad (10)$$

[DSO-LP-Sub(i)]

$$Z_i^{S^*}(\mathbf{y}_i) \equiv \min_{\{q_i^k(t)\} \geq 0} \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathcal{T}} s^k(t) q_i^k(t) dt \quad (11)$$

$$\text{s.t.} \quad \int_{\mathcal{T}} q_i^k(t) dt = Q_i^k \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad \cdots \rho_i^k \quad (12)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} q_i^k(t) = y_i(t) \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad \cdots b_i(t) \quad (13)$$

マスター問題およびサブ問題の各制約条件式には対応する双対変数を付記している。

ここでサブ問題とマスター問題の双対変数 (コスト変数) の関係を、両者の最適性条件を通して整理する。まず、サブ問題 [DSO-LP-Sub(i)] の最適性条件を次に示す：

[DSO-LP-Sub(i)-OC]

(12), (13),

$$\begin{cases} b_i(t) + s^k(t) = \rho_i^k & \text{if } q_i^k(t) > 0 \\ b_i(t) + s^k(t) \geq \rho_i^k & \text{if } q_i^k(t) = 0 \end{cases} \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (14)$$

続いて、マスター問題の最適性条件を導く。包絡線定理よりサブ問題の最適値関数について以下が成立する：

$$\frac{\partial Z_i^{S^*}(\mathbf{y})}{\partial y_i(t)} = b_i^*(t | y_i(t)) \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (15)$$

これよりマスター問題の最適性条件はサブ問題の双対変数 $b_i(t)$ ⁵ を含む形で次のように書ける：

[DSO-LP-Master-OC]

$$\begin{cases} \sum_{j: j \geq i} y_j(t) = \mu_i & \text{if } p_i(t) > 0 \\ \sum_{j: j \geq i} y_j(t) \leq \mu_i & \text{if } p_i(t) = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (16)$$

$$\begin{cases} b_i(t) = \sum_{j: j \leq i} p_j(t) & \text{if } y_i(t) > 0 \\ b_i(t) \leq \sum_{j: j \leq i} p_j(t) & \text{if } y_i(t) = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (17)$$

これらサブ問題とマスター問題の最適性条件 [DSO-LP-Sub(i)-OC], [DSO-LP-Master-OC] より、サブ問題の双対変数 $b_i(t)$ は、起点が i である利用者が、時刻 t に終点 0 に到着したときに経験する最適混雑料金価格の合計 $\sum_{j: j \leq i} p_j(t)$ であることが解釈できる。

³ 厳密には $\beta^{-1} p_i(t)$ が金銭価値の次元を持つ最適混雑料金価格であるが、 $p_i(t)$ の意味が最適な混雑料金水準であることに変わりはないので、本稿の以降では $p_i(t)$ を単に最適混雑料金価格と呼ぶ。

⁴ Tradable network permit スキーム^{15),16)} 導入下では、これら双対変数 $\rho_i^k, p_i(t)$ はそれぞれ均衡コストおよびポトルネック通行権価格を表す。

⁵ 式 (15) では $y_i(t)$ が $b_i^*(\cdot)$ のパラメータであることを明示的に表記しているが、以降では特に注意が必要な場合を除き、簡単に $b_i^*(t)$ と書く

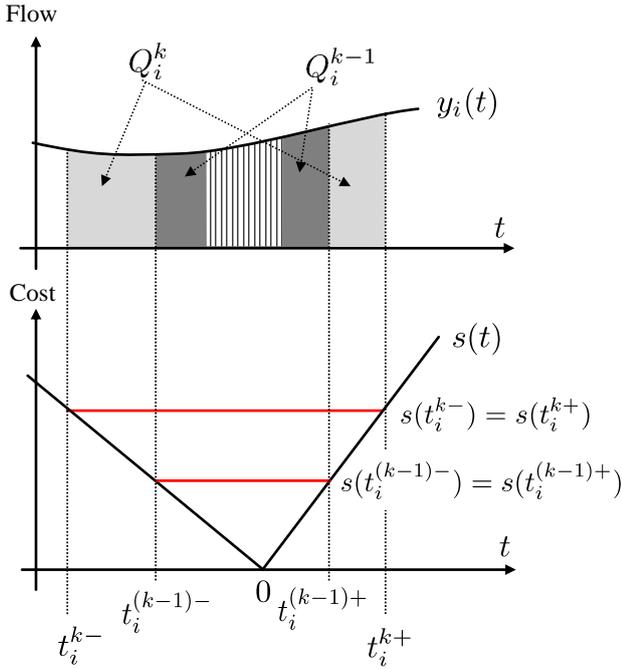


図-3 補題 3.1 の解釈：サブ問題のフローパターン

(3) サブ問題の構造と性質

サブ問題 [DSO-LP-Sub(i)] は、各ボトルネック i について、総需要である Q_i^k と時々刻々の起点別の終点到着交通流率 $y_i(t)$ によって定まる 2 つの制約条件を満たしながら、総交通費用を最小化する $q_i^k(t)$ を求める問題である。こうした問題は最適輸送理論の分野¹⁷⁾ では、二重制約型の最適輸送問題として知られており、輸送コスト関数 (i.e., スケジュールコスト関数) が劣モジュラ性や優モジュラ性と呼ばれる性質を備えれば、解析解を得られることが知られている。そのため、スケジュールコスト関数がこうした性質を満足することを示せれば、最適輸送理論の枠組みを用いて解析解を導出できることが期待される⁶。

結果として得られるフロー変数の解析解を次の補題に示す：

補題 3.1 (サブ問題の解析解). サブ問題 [DSO-LP-Sub(i)] の解析解は以下である：

$$q_i^{k*}(t) = \begin{cases} y_i(t) & \text{if } \forall t \in \mathcal{T}_i^k \setminus \mathcal{T}_i^{k-1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall i \in \mathcal{N}. \quad (18)$$

ここで \mathcal{T}_i^k は、境界時刻 t_i^{k-}, t_i^{k+} を用いて $\mathcal{T}_i^k \equiv [t_i^{k-}, t_i^{k+}]$, $\mathcal{T}_i^0 \equiv \emptyset$ と定義される。境界時刻 t_i^{k-}, t_i^{k+} は

⁶ Akamatsu et al.¹⁸⁾ は、単一ボトルネック (i.e., 制約条件 (13) の $y_i^k(t)$ が時間を通じて一定の μ_i であるケース) において、本研究と同様に最適輸送理論の枠組みを用いて解析解が導出できることを明らかにしている。

k に対して次の方程式の解として求める：

$$\begin{cases} \int_{t_i^{k-}}^{t_i^{k+}} y_i(t) dt = \sum_{l:l \leq k} Q_i^l & (19a) \\ s(t_i^{k-}) = s(t_i^{k+}) & (19b) \end{cases}$$

証明は付録に示す⁷。補題 3.1 の式 (19a), (19b) は、サブ問題の最適フロー・パターンについて、利用者グループに関する次のソーティング特性が成立することを意味している：

$$t_i^{k-} < \dots < t_i^{k-} < \dots < 0 < \dots < t_i^{k+} < \dots < t_i^{k+} \quad (20)$$

すなわち、より時間価値の高い利用者の方がより希望到着時刻 $t = 0$ に近い時間帯に終点に到着する。

このソーティング特性が成立することは、次のようにスケジュールコスト関数との関係を考えていけば理解することができる。図-3 は方程式 (19) の解として得られる境界時刻 t_i^{k-}, t_i^{k+} が満たすべきフロー/コストの関係を表したものである。横軸に終点到着時間軸をとり、上段には $y_i(t)$ 、下段には $s(t)$ を示している。方程式 (19) は、 $k = 1$ から昇順に解くことができる。そして、任意の k に対して方程式を解くということは、関数 $s(t)$ の値が同一 (19b) でありながら、その範囲で $y_i(t)$ を積分すれば需要保存条件 (19a) が成立する境界時刻 t_i^{k-}, t_i^{k+} を求めることに相当することが読み取れる。ここで $\sum_{l:l \leq k} Q_i^l$ は k に対して単調増加であり、関数 $s(t)$ が狭義凸関数⁸ であることを踏まえれば、関係式 (20) に示すソーティングが成立することがわかる。

フロー変数と同様に、コスト変数 (双対変数) の解析解も次のように導出することができる：

補題 3.2 (サブ問題の双対変数の最適解). サブ問題 [DSO-LP-Sub(i)] の双対変数の最適解は以下である：

$$\rho_i^{k*} = \sum_{l:l \geq k} \bar{\alpha}^l \bar{s}(T_i^k) \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall i \in \mathcal{N}. \quad (21)$$

$$b_i^*(t) = \max_{k \in \mathcal{K}} \{ \rho_i^{k*} - s^k(t) \} = \rho_i^{k*} - s^k(t) \quad t \in \mathcal{T}_i^k \setminus \mathcal{T}_i^{k-1} \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (22)$$

where $\bar{\alpha}^k = \alpha^k - \alpha^{k+1}$, $\bar{\alpha}^{K+1} = 0$

ここで $T_i^k \equiv t_i^{k+} - t_i^{k-}$ であり、関数 $\bar{s}(T)$ は方程式 $s(t) = s(t - T)$ の解 t^* を用いて $\bar{s}(T) \equiv s(t^*)$ と定義される⁹。

補題 3.2 は、マスター問題の最適解 $y_i^*(t)$ を与件とすれば、コスト変数の最適解が次の手続きによって求まることを意味している。まず、補題 3.1 の方程式 (19) よ

⁷ 本稿では以降の命題・補題・系の証明はすべて付録に示す。

⁸ 本研究では関数 $s(t)$ を狭義凸関数と仮定しているが、直観的なわかりやすさを優先して本稿の挿入図では区分線形関数を用いている。

⁹ 関数 $s(t)$ の狭義凸性より関数 $\bar{s}(T)$ は、 T に対して狭義単調増加である。

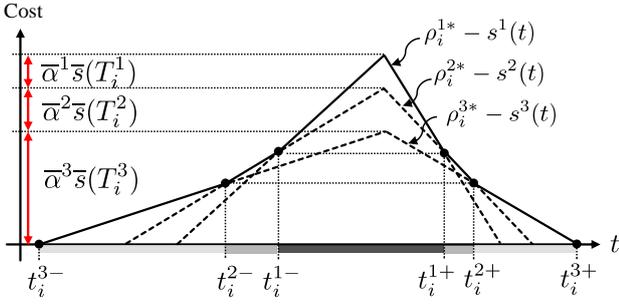


図-4 補題 3.2 の解釈：サブ問題のコストパターン

り、各グループの境界時刻 t_i^k, t_i^{k+} が定まる。これにより到着時間幅 $T_i^k = t_i^{k+} - t_i^k$ が決定できるので、式 (21) より均衡コスト ρ_i^k が求まる。そして、均衡コスト ρ_i^k を用いて、式 (22) より $b_i^k(t)$ を決定することができる。

図-4 はサブ問題のコスト変数が最適解において満たすべき関係を $K = 3$ の具体ケースを用いて示したものである。図の横軸は終点到着時刻、縦軸はコストを表し、各グループ k について曲線 $\rho_i^k - s^k(t)$ を図示している。グループ k の均衡コスト ρ_i^{k*} は曲線 $\rho_i^k - s^k(t)$ の頂点に相当すること、双対変数 $b_i^k(t)$ は曲線群 $\{\rho_i^k - s^k(t)\}$ の k についての上側包絡線で得られることが確認できる。

(4) マスター問題の構造と性質

マスター問題 [DSO-LP-Master] は、サブ問題の双対変数が最適解において特定の条件を満足する場合に、その解析解を得ることができる：

補題 3.3 (マスター問題の解析解). 各サブ問題の双対変数の最適解が次の関係：

$$b_1^*(t) < b_2^*(t) \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (23)$$

を満足するとき、マスター問題の最適解は以下である：

$$y_i^*(t) = \begin{cases} \bar{\mu}_i & \text{if } t \in \mathcal{T}_i^K \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (24)$$

$$\text{where } \bar{\mu}_1 \equiv \mu_1 - \mu_2, \quad \bar{\mu}_2 \equiv \mu_2.$$

条件式 (23) は、[DSO-LP-Master-OC] を踏まえれば、 $y_2^*(t) > 0$ である時間帯に最適混雑料金価格 $p_2^*(t) = b_2^* - b_1^*$ が常に正であるための条件を意味する。式 (24) は、この条件が満足されている場合、[DSO-LP] の起点別の終点到着交通流率の解析解が、上流側から順番に決定できることを意味する。すなわち、動的計画法のようにマスター問題の解析解が得られる。

この条件式 (23) の成立可否は、各グループの利用者の到着時間幅を用いて、十分条件的に判定することができる。

補題 3.4. [DSO-LP] のパラメータが、次に示す条件を満足している場合、条件式 (23) が成立する：

$$\sum_{l|l \geq k} \bar{\alpha}^l \left(\frac{1}{\bar{\mu}_1} \sum_{l|l \leq k} Q_1^l \right) < \sum_{l|l \geq k} \bar{\alpha}^l \left(\frac{1}{\bar{\mu}_2} \sum_{l|l \leq k} Q_2^l \right) \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (25)$$

補題 3.4 は、DSO 配分で与件となる時間価値パラメータ、需要、ボトルネック容量の関係から、動的計画法の適用可能性を判定できることを意味している。

(5) DSO 配分の解析解

ここまでで得られたマスター問題の解析解 (24) を、サブ問題の解析解 (18) に代入することで、[DSO-LP] 全体の解析解を導出できる：

命題 3.1 (DSO 配分の解析解). 問題 [DSO-LP] の最適解は以下である：

$$y_i^*(t) = \begin{cases} \bar{\mu}_i & \text{if } t \in \mathcal{T}_i^K \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (26)$$

$$q_i^{k*}(t) = \begin{cases} \bar{\mu}_i & \text{if } t \in \mathcal{T}_i^k \setminus \mathcal{T}_i^{k-1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall i \in \mathcal{N}. \quad (27)$$

$$\rho_i^{k*} = \sum_{l|l \geq k} \bar{\alpha}^l s(T_i^k) \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall i \in \mathcal{N}. \quad (28)$$

$$p_i^*(t) = \begin{cases} \rho_i^{k*} - s^k(t) - \sum_{j|j < i} p_j^*(t) & \text{if } t \in \mathcal{T}_i^k \setminus \mathcal{T}_i^{k-1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (29)$$

$$\text{where } \mathcal{T}_i^k = [t_i^{k-}, t_i^{k+}], \quad \mathcal{T}_i^0 = \emptyset \quad \forall i \in \mathcal{N}.$$

$$T_i^k = \frac{\sum_{l|l \leq k} Q_i^l}{\bar{\mu}_i} \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall i \in \mathcal{N}.$$

命題 3.1 から得られる DSO パターンの具体例 ($K = 2$) を図-5 に示す。図-5 の上図は DSO フローパターン、下図は DSO コストパターンを表す。上下図ともに横軸は終点到着時刻を表し、縦軸はそれぞれフロー、コストを表している。起点が同じである場合、時間価値のより高い利用者グループがより希望到着時刻に近い時刻に到着するというソーティング特性が成立していることが読み取れる。

4. 動的利用者均衡配分

本章では、前章で得られた DSO 配分の解析解を用いて、DUE 配分の解析解を導出する。まず、4.(1) において DUE 配分を無限次元線形相補性問題として定式化する。続いて 4.(2) において、DSO 配分と DUE 配分の間

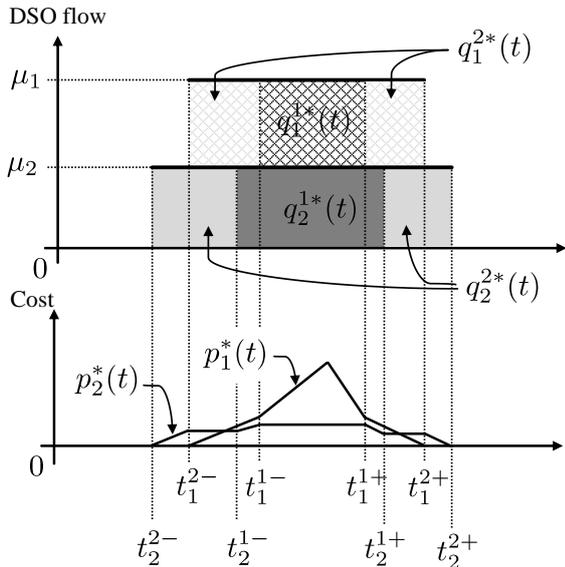


図-5 DSO 状態におけるフローパターンとコストパターン

題構造上の類似点に着目した DUE 配分の解析的解法を示す。ここでは、DUE 配分の均衡解が、DSO 配分の解析解を用いて表現される。最後に、4.(3)にて DSO 状態と DUE 状態の対応関係をまとめる。

(1) 定式化

DUE 配分の定式化を行うにあたり、新たに待ち行列遅れコストを表す変数および各ボトルネックの流入/流出時刻を表す変数を導入する。具体的には、時刻 t に終点に到着する利用者が、ボトルネック i で経験する待ち行列コストを $\widehat{w}_i(t)$ と定義する。そして、時刻 t に終点 0 へ到着する利用者の、ボトルネック i への流入時刻およびボトルネック i からの流出時刻をそれぞれ $\tau_i(t)$, $\sigma_i(t)$ とする。これらの時刻変数と待ち行列遅れの関係を図-6 に示す。図-6 は、時刻 t に終点に到着する利用者が、各ボトルネックにいつ流入しいつ流出したかをひとつの時間軸上で表現したものである。解析に影響を与えない自由走行時間を省略すれば、これら時刻変数について次の関係が成り立つ：

$$\tau_i(t) + \widehat{w}_i(t) = \sigma_i(t) \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (30)$$

$$\sigma_i(t) = t - \sum_{jj < i} \widehat{w}_j(t) \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (31)$$

式 (30) は各ボトルネックで FIFO 原則が成立することを意味している。また $\tau_i(t)$ を消去することで式 (31) が得られる。

DUE 状態においては、ボトルネックにおける待ち行列条件、需要の保存則、利用者の出発時刻選択条件の 3 つの均衡条件を満足する必要がある。時刻 t に終点へ到着する起点 i ・グループ k の利用者の終点到着交通流率を $\widehat{q}_i^k(t)$ とする。また、時刻 t に終点へ到着する起点が

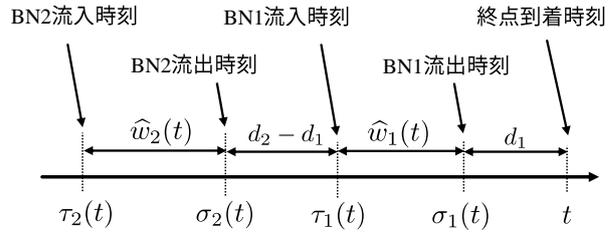


図-6 到着時刻座標系における時刻変数の関係

i である利用者の終点到着交通流率を $\widehat{y}_i(t) \equiv \sum_{k \in \mathcal{K}} \widehat{q}_i^k(t)$ とする。各均衡条件は具体的に次のように表される。

待ち行列条件 本研究ではボトルネックにおける待ち行列の進展を point queue モデルで表現する。このとき待ち行列条件は次に示す相補性条件として書き下せる^{14),18)}：

$$\begin{cases} \sum_{jj \geq i} \widehat{y}_j(t) = \mu_i \dot{\sigma}_i(t) & \text{if } \widehat{w}_i(t) > 0 \\ \sum_{jj \geq i} \widehat{y}_j(t) \leq \mu_i \dot{\sigma}_i(t) & \text{if } \widehat{w}_i(t) = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (32)$$

出発時刻選択条件 DUE 状態における起点 i ・グループ k の利用者の均衡コストを $\widehat{\rho}_i^k$ とする。出発時刻選択条件は、次に示す相補性条件によって表現できる：

$$\begin{cases} s^k(t) + \sum_{jj \leq i} \widehat{w}_j(t) = \widehat{\rho}_i^k & \text{if } \widehat{q}_i^k(t) > 0 \\ s^k(t) + \sum_{jj \leq i} \widehat{w}_j(t) \leq \widehat{\rho}_i^k & \text{if } \widehat{q}_i^k(t) = 0 \end{cases} \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall i \in \mathcal{N}. \quad (33)$$

需要の保存条件 需要の保存条件は、均衡コスト $\widehat{\rho}_i^k$ を用いて相補性条件の形式で次のように書ける：

$$\begin{cases} \int_{\mathcal{T}} \widehat{q}_i^k(t) dt = Q_i^k & \text{if } \widehat{\rho}_i^k > 0 \\ \int_{\mathcal{T}} \widehat{q}_i^k(t) dt \leq Q_i^k & \text{if } \widehat{\rho}_i^k = 0 \end{cases} \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall i \in \mathcal{N}. \quad (34)$$

これらの均衡条件式を用いて、DUE 配分は無有限次元線形相補性問題として次のように定式化される：

[DUE-LCP]

find $\{\widehat{\rho}_i^k\} \geq 0, \{\widehat{w}_i(t)\} \geq 0, \{\widehat{q}_i^k(t)\} \geq 0$
 such that (32), (33), (34).

(2) DUE 配分の解析解の導出

本研究では、次のアプローチによって [DUE-LCP] の解析解を導出する。まず、DSO 状態における最適混雑料金価格 $p_i(t)$ と DUE 状態における待ち行列コスト $\widehat{w}_i(t)$ が一致するという推論 (推論 4.1) を導入する。これは、DSO 配分と DUE 配分の問題構造上の類似性；DSO 配

分のボトルネック容量制約条件に関する最適性条件 (16) と [DUE-LCP] のボトルネック待ち行列条件 (32) の類似性に着目したものである。続いて、この推論のもとで、[DUE-LCP] の均衡条件を直接用いて他の変数の均衡解を推定する。具体的には、 $\widehat{\rho}_i^k$, $\widehat{y}_i(t)$, $\widehat{q}_i^k(t)$ の順に、均衡解の候補を導出する。ここで均衡解の候補は DSO 解析解を用いて記述される。最後に、導出された均衡解の候補が、スケジュールコスト関数の条件のもとで真に [DUE-LCP] の均衡解であることを明らかにする。

上述した最適混雑料金価格 $p_i(t)$ と待ち行列コスト $\widehat{w}_i(t)$ が一致するという推論を以下にまとめる：

推論 4.1. [DSO-LP] における最適混雑料金価格の最適解は、[DUE-LCP] の待ち行列遅れコストの均衡解である：

$$\widehat{w}_i(t) = p_i^*(t) \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (35)$$

推論 4.1 および [DUE-LCP] の出発時刻選択条件 (33) を整理することで直ちに均衡コストおよび利用者の到着時間帯の均衡解候補として以下を得る：

$$\widehat{\rho}_i^k = \rho_i^{k*} \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall i \in \mathcal{N}. \quad (36)$$

$$\begin{cases} \widehat{t}_i^k = t_i^{k-} \\ \widehat{t}_i^k = t_i^{k+} \end{cases} \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall i \in \mathcal{N}. \quad (37)$$

続いて、推論 4.1 に基づき、[DUE-LCP] のボトルネック待ち行列条件 (32) から、起点別の終点到着交通流率 $\widehat{y}_i(t)$ の均衡解を推定する：

推論 4.2. 次に示す起点別終点到着交通流率 $\widehat{y}_i(t)$ は [DUE-LCP] の均衡解である：

$$\widehat{y}_2(t) = \begin{cases} \mu_2 \delta_2(t) & \text{if } t \in \text{supp}(\widehat{w}_2(t)) = \mathcal{T}_2^K \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (38)$$

$$\widehat{y}_1(t) = \begin{cases} \mu_1 - \widehat{y}_2(t) & \text{if } t \in \text{supp}(\widehat{w}_1(t)) = \mathcal{T}_1^K \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (39)$$

さらに、式 (37) および出発時刻選択条件 (33) から起点・グループ別の終点到着交通流率 $\widehat{q}_i^k(t)$ の均衡解を次のように推定する：

推論 4.3. 次に示す起点・グループ別終点到着交通流率 $\widehat{q}_i^k(t)$ は、[DUE-LCP] の均衡解である：

$$\widehat{q}_i^k(t) = \begin{cases} \widehat{y}_i(t) & \text{if } t \in \mathcal{T}_i^k \setminus \mathcal{T}_i^{k-1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall i \in \mathcal{N}. \quad (40)$$

ここまでで推論 4.1 のもとで、[DUE-LCP] の均衡条件のうちボトルネック待ち行列条件 (32) および出発時

刻選択条件 (33) を直接的に用いて、均衡解を推定した。次に、これらの推論が真であること、つまり導出された均衡解の候補が真に [DUE-LCP] の均衡解であることを示す。具体的には、均衡解の候補が、その導出過程で明示的に用いていない他の [DUE-LCP] の均衡条件；需要の保存条件 (34) と起点・グループ別終点到着交通流率の非負条件 $\widehat{q}_i^k(t) \geq 0$ 満足しているかどうか検証する。検証の結果として次の補題を得る：

補題 4.1 (スケジュールコスト関数の条件). スケジュールコスト関数が次の条件を満足するとき、推論 4.2, 推論 4.3 は真である：

$$s^k(t_1^{k-}) \geq -1 \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (41)$$

$$s^k(t_1^{k+}) \leq \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (42)$$

以上の解析をまとめることで、[DUE-LCP] の解析解は次のように表される：

命題 4.1 (DUE 配分の解析解). 補題 4.1 の条件が満足されているとき、次に示す変数の組は [DUE-LCP] の均衡解である：

$$\widehat{q}_2^k(t) = \begin{cases} \mu_2 \delta_2(t) & \text{if } t \in \mathcal{T}_2^k \setminus \mathcal{T}_2^{k-1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (43)$$

$$\widehat{q}_1^k(t) = \begin{cases} \mu_1 - \mu_2 \delta_2(t) & \text{if } t \in \mathcal{T}_1^k \setminus \mathcal{T}_1^{k-1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (44)$$

$$\widehat{w}_i(t) = p_i^*(t) \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (45)$$

$$\widehat{\rho}_i^k = \rho_i^{k*} \quad \forall k \in \mathcal{K}, \forall i \in \mathcal{N}. \quad (46)$$

(3) 均衡状態と最適状態の対応関係

命題 4.1 は、スケジュールコスト関数の条件 (補題 4.1) のもとで DSO 状態と DUE 状態には 1 対 1 の対応関係が存在することを意味している。具体的には、まず、最適混雑料金価格 $p_i^*(t)$ と待ち行列遅れコスト $\widehat{w}_i(t)$ が一致 (式 (45)) し、両状態の均衡コスト ρ_i^k , ρ_i^{k*} も一致する (式 (46)) ことを表している。このようにコストパターンについては値が完全に一致する対応関係が確認できる。

一方、フローパターンについては、DUE 状態と DSO 状態で対応関係は存在するが、それらの値は完全に一致しない。このことを $K=2$ の具体ケースを用いて説明する。まず、図-7 の上図は DSO 状態、下図は DUE 状態における終点への到着フローパターンを表している。まず、各グループの利用者が終点に到着する時間帯は一致することが確認できる (式 (37))。このことは、DSO 状態において成立するソーティング特性が、DUE

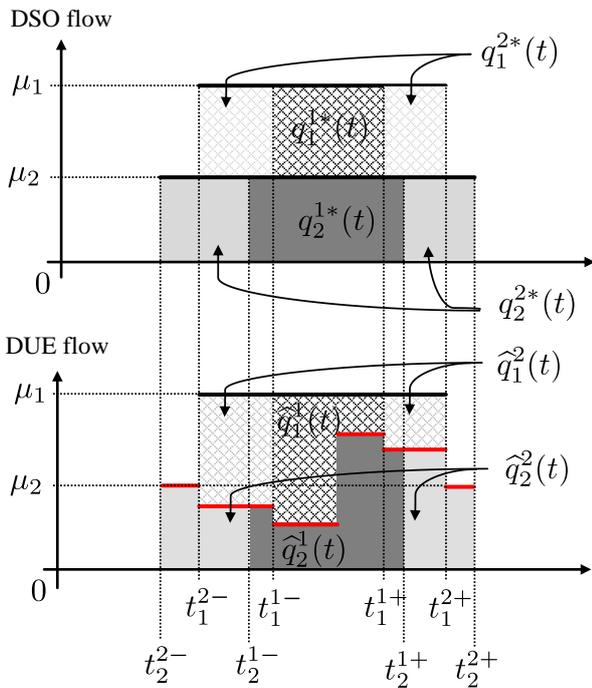


図-7 DSO と DUE における到着フローパターン

状態においても同様に成立することを意味している。また、命題 4.1 の式 (44),(43) に示すように、DUE 状態と DSO 状態で $\hat{a}_2(t)$ だけの到着交通流率に差が生じることが確認できる。

続いて出発フローパターンの対応関係を図-8 を用いて説明する。図-8 の下図は、横軸に終点到着時刻をとり、縦軸に起点が 2 である利用者グループが待ち行列遅れコストをとったものである。上図は、横軸に終点到着時刻をとり縦軸に対応する DSO 状態、DUE 状態における起点出発時刻をプロットしたものである。図-8 から、ある到着時刻 t に到着する利用者の DSO 状態、DUE 状態それぞれにおける起点出発時刻を読みとることができる。図-8 より、DUE 状態と DSO 状態で全利用者の起点 2 出発時間帯が一致することが確認できる。その一方で、最も時間価値の低い利用者グループ $k = K$ を除く $k \neq K$ の利用者グループは、DUE 状態より DSO 状態の方が起点出発時刻が遅くなる傾向が読み取れる。

5. おわりに

本研究では、タンデムボトルネック・ネットワークにおいて、利用者のスケジュール遅れ時間の価値の異質性を考慮した出発時刻選択問題の理論特性を解明した。具体的には、まず、最適輸送理論と動的計画法の枠組みを活用した DSO 配分の解析的解法を構築した。次に、スケジュールコスト関数の形状に関する仮定のもとで、DSO 状態と DUE 状態が 1 対 1 対応することを示した。

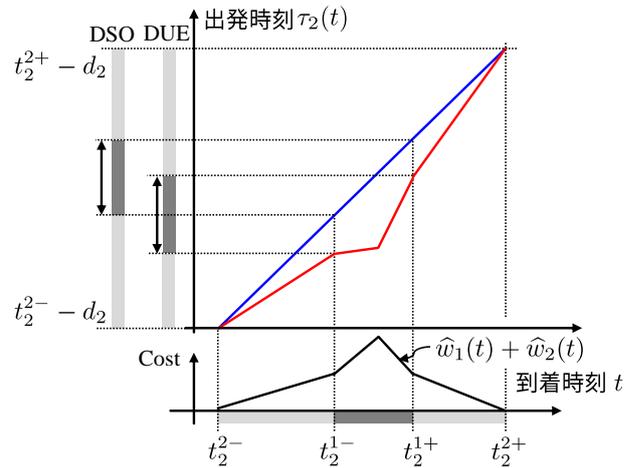


図-8 到着時間帯と出発時間帯の比較

これにより、DSO 解析解を活用した DUE 配分の解析的解法が明らかとなった。最後に、解析的に得られた DSO 状態と DUE 状態の類似点および相違点を具体例を用いて示した。

本研究の主要な貢献として、DSO 配分および DUE 配分のシステマティックな解析的解法を構築した点が挙げられる。従来研究は、数値解法の提案に留まっていたり、具体的にスケジュールコスト関数を特定してアドホックに解を導出しているものが多い。これに対し本研究では、数学的な方法論 (i.e., 最適輸送理論、動的計画法) に裏付けられた操作により解析解を導出している。このことは、より一般的な構造のネットワークへの解析方法論の拡張基盤を与えたものと言える。

今後の課題としては、まず、3 個以上のボトルネックが連続するより一般的なコリドー・ネットワークへの解析方法論の展開が挙げられる。さらに、スケジュール遅れ時間の時間価値の異質性に加えて、待ち行列遅れ時間価値や希望到着時刻の異質性を考慮した状況における解析も重要な課題である。これらの点については、また別の機会に報告したい。

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 (JP20J21744, JP18H01551, JP20H02267) の助成を受けた研究の一部です。ここに記し、感謝を表します。

参考文献

- 1) Li, Z.-C., Huang, H.-J., and Yang, H.: Fifty years of the bottleneck model: A bibliometric review and future research directions, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.139, pp.311-342, 2020.
- 2) Vickrey, W. S.: Congestion theory and transport investment, *The American economic review*, Vol.59, No.2, pp.251-260, 1969.
- 3) Hendrickson, C. and Kocur, G.: Schedule delay and de-

- parture time decisions in a deterministic model, *Transportation Science*, Vol.15, No.1, pp.62–77, 1981.
- 4) Smith, M. J.: The existence of a Time-Dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck, *Transportation Science*, Vol.18, No.4, pp.385–394, 1984.
 - 5) Daganzo, C. F.: The uniqueness of a time-dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck, *Transportation Science*, Vol.19, No.1, pp.29–37, 1985.
 - 6) Newell, G. F.: The morning commute for nonidentical travelers, *Transportation Science*, Vol.21, No.2, pp.74–88, 1987.
 - 7) Arnott, R., de Palma, A., and Lindsey, R.: Route choice with heterogeneous drivers and group-specific congestion costs, *Regional science and urban economics*, Vol.22, No.1, pp.71–102, 1992.
 - 8) Arnott, R., de Palma, A., and Lindsey, R.: The welfare effects of congestion tolls with heterogeneous commuters, *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol.28, No.2, pp.139–161, 1994.
 - 9) van den Berg, V. and Verhoef, E. T.: Congestion tolling in the bottleneck model with heterogeneous values of time, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.45, No.1, pp.60–78, 2011.
 - 10) Liu, Y., Nie, Y. m., and Hall, J.: A semi-analytical approach for solving the bottleneck model with general user heterogeneity, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.71, pp.56–70, 2015.
 - 11) Takayama, Y. and Kuwahara, M.: Bottleneck congestion and residential location of heterogeneous commuters, *Journal of urban economics*, 2017.
 - 12) Kuwahara, M.: Equilibrium queueing patterns at a Two-Tandem bottleneck during the morning peak, *Transportation Science*, Vol.24, No.3, pp.217–229, 1990.
 - 13) Arnott, R., de Palma, A., and Lindsey, R.: Properties of dynamic traffic equilibrium involving bottlenecks, including a paradox and metering, *Transportation Science*, Vol.27, No.2, pp.148–160, 1993.
 - 14) Akamatsu, T., Wada, K., and Hayashi, S.: The corridor problem with discrete multiple bottlenecks, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.81, No.3, pp.808–829, 2015.
 - 15) Wada, K. and Akamatsu, T.: A hybrid implementation mechanism of tradable network permits system which obviates path enumeration: An auction mechanism with day-to-day capacity control, *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, Vol.60, pp.94–112, 2013.
 - 16) Akamatsu, T. and Wada, K.: Tradable network permits: A new scheme for the most efficient use of network capacity, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol.79, pp.178–195, 2017.
 - 17) Rachev, S. T. and Rüschemdorf, L.: *Mass Transportation Problems: Volume I: Theory*, Springer Science & Business Media, 1998.
 - 18) Akamatsu, T., Wada, K., Iryo, T., and Hayashi, S.: A new look at departure time choice equilibrium models with heterogeneous users, arXiv (<http://arxiv.org/abs/2009.11037>), 2020.