

# 多起点多終点コリドーネットワークにおける 動的利用者均衡配分

酒井 高良<sup>1</sup>・赤松 隆<sup>2</sup>

<sup>1</sup>学生会員 東北大学大学院情報科学研究科・JSPS 特別研究員 DC (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: takara.sakai.t1@dc.tohoku.ac.jp (Corresponding Author)

<sup>2</sup>正会員 東北大学教授 大学院情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06-408)

E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

近年、多起点単一終点/単一起点多終点コリドーネットワークを対象として、動的利用者均衡 (DUE : Dynamic User Equilibrium) 配分と動的システム最適 (DSO : Dynamic System Optimal) 配分の対応関係を解析的に導く方法論が示されている。本研究では、最も簡単な多起点多終点コリドーネットワークである 2 起点 2 終点からなるネットワークを対象に、DSO 配分と DUE 配分の理論的性質および両者の対応関係を明らかにする。具体的には、まず、動的計画法と最適輸送理論の枠組みを用いた DSO 配分問題の解析的解法を示す。そして、適切な条件のもとで DSO 解析解を活用して DUE 解が解析的に導出できることを、両者を対応づける closed-form 関係式の導出をもって明らかにする。

**Key Words:** *dynamic user equilibrium, dynamic system optimum, corridor, many-to-many OD pattern, optimal transport theory, dynamic programming*

## 1. はじめに

### (1) 背景

近年、ダイナミックプライシングをはじめとする交通需要の時間的な分散を促す TDM (Traffic Demand Management) 施策が注目されている。このような TDM 施策の理論基盤となる概念として、Vickrey のボトルネックモデル<sup>1)</sup>をはじめとする出発時刻選択型の動的交通量配分モデルがある<sup>1</sup>。動的交通量配分モデルは需要サイドの条件 (利用者の選択行動) と供給サイドの条件 (道路性能条件) の相互作用によって生じる動的なネットワークフローを、なんらかの配分原則によって表現する数理モデルである。代表的な配分原則としては、動的利用者均衡 (DUE : Dynamic User Equilibrium) 配分および動的システム最適 (DSO : Dynamic System Optimal) 配分が挙げられる。これらはそれぞれ記述的モデル、規範的モデルとして重要であることから、これまでに数多くの理論解析がなされてきた<sup>2</sup>。

多くの既存研究は、各々の配分モデルについて豊富な理論蓄積を与えているが、両者の対応関係を把握す

ることもまた重要である。例えば、記述的フローパターンと規範的フローパターンはどのように異なるのかといった情報は、利用者の自然な選択行動のもとシステム最適状態を導く TDM スキーム構築のための policy implication となる。このような視座から Vickrey<sup>1)</sup>, Hendrickson and Kocur<sup>10)</sup>をはじめとする研究では、DUE 状態におけるボトルネック待ち行列遅れが DSO を達成する動的混雑料金価格に一致することを明らかにしている。しかしながら、そこでの方法には ad hoc な側面が存在し、より一般的なネットワーク (e.g., コリドーネットワーク) への方法論の拡張は難しいと考えられる。

この点について、井料・吉井<sup>11)</sup>, Iryo and Yoshii<sup>12)</sup>では、同じく単一ボトルネックを対象により systematic なアプローチによる DSO と DUE の対応付けを行っている。ここでは、線形計画問題として定式化される DSO 配分問題の双対変数が、DUE 状態における待ち行列遅れに対応することが解析的に示されている (詳細は以降で示す)。さらに、著者らの最新の研究<sup>13), 14), 15)</sup>によって、このような方法論がコリドーネットワークにも拡張可能であり、さらに DSO 配分問題の解自体も解析的に得られることが明らかとなっている。つまり、DSO 解と DUE 解が systematic なアプローチにより解析的に導出できることが示されている。しかしながら、これまでの解析では、起終点のいずれかが単一であるコリドーネットワークを前提としおり、多起点多終点 OD パターンの場合に同様の事実が成立するかどうかはわ

<sup>1</sup> 出発時刻選択行動に加えて経路選択行動も考慮した動的交通量配分モデルも存在するが本研究では扱わない。

<sup>2</sup> 両配分モデルのいずれも関連研究を挙げれば枚挙に暇がない。本研究と関連の深い複数ボトルネック (コリドーネットワーク) におけるケースに限定すれば、DUE 配分モデルについては Kuwahara<sup>2)</sup>, Arnott et al.<sup>3)</sup>, Arnott and de Palma<sup>4)</sup>, Akamatsu et al.<sup>5)</sup> など、DSO 配分モデルについては Muñoz and Laval<sup>6)</sup>, Shen and Zhang<sup>7)</sup>, van den Berg and Verhoef<sup>8)</sup>, Tian et al.<sup>9)</sup> などが代表的である。

かっていない。より複雑なネットワークにおける DSO と DUE の対応関係を明らかにするためには、まず多起点多終点コリドーネットワークにおける解析を進める必要がある。

## (2) 目的と方法

本研究では、もっとも簡単な多起点多終点ネットワークである 2 起点 2 終点コリドーネットワーク (図 1) を対象とし、DSO 配分モデルと DUE 配分モデルの理論特性を明らかにし、さらに両者の対応関係を解明する。具体的には、DSO 配分問題の解析解の導出方法およびそれを活用した DUE 解析解の導出方法を明らかにする。

本研究は、DSO 配分モデル、DUE 配分モデルそれぞれの解析を行う 2 つのステップから構成される。第 1 のステップでは、DSO 配分問題の解析解の導出方法を示す。具体的には、まず、DSO 配分問題を線形計画問題として定式化する。続いて動的計画法を活用して問題を階層分解しボトルネックベースの部分問題を導出する。そして、この部分問題が最適輸送問題の構造を持つことを示し、そのことを活用すれば解析解が得られることを明らかにする。

第 2 のステップでは、DSO 解析解を活用した DUE 解析解の導出方法を明らかにする。具体的には、まず、DUE 配分問題を線形相補性問題として定式化する。そして、適切な条件のもとで DSO 解と 1 対 1 対応する DUE 解が存在することを、両者を対応づける closed-form 関係式の導出をもって明らかにする。このような関係式導出のポイントは、DSO 配分問題の双対変数が、DUE 状態における待ち行列遅れに対応するという点である。つまり、単一終点コリドーネットワークにおける既存研究<sup>14)</sup> で示された DSO 配分と DUE 配分の systematic な対応付けの方法論が、2 起点 2 終点ネットワークでも機能することを明らかにする。

## (3) 本稿の構成

本稿の構成を次に示す。まず、2 章にて DSO 配分問題と DUE 配分問題に共通の事項 (ネットワーク構造・OD パターンなど) について述べる。続く 3 章では DSO 配分問題問題を定式化し、4 章にて最適輸送理論および動的計画法の枠組みを活用した導出アプローチを明らかにする。次に、5 章にて DUE 配分問題を定式化し、4 章で得られた DSO 解を活用した DUE 解の解析解導出方法を 6 章にて示す。最後に 7 章にて本研究のまとめと今後の展望について述べる。

本稿では 2 起点 2 終点の具体ケースに限定して解析アプローチを示している。しかしながら、本稿で示す命題のほとんどは、 $N$  起点  $N$  終点ネットワークの一般ケースにおいても成立することが、著者らの研究で明

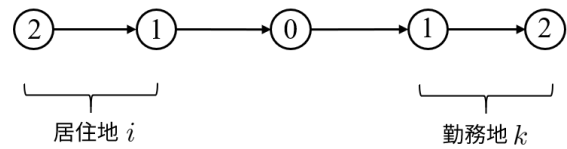


図-1 2 起点 2 終点ネットワーク

らかとなりつつある。本稿では、解析アプローチをわかりやすく示すことを重視するため、2 起点 2 終点の具体ケースを中心に扱うが、より一般的な議論については改めて別の機会に報告する。また紙面の都合上、多くの命題の証明についても割愛している。

## 2. モデル

本章では、ネットワーク構造や OD パターンなど、DSO 配分と DUE 配分に共通の事柄について述べる。本研究では、図 1 に示すような居住지가 2 つ、勤務地が 2 つ存在するネットワークを解析対象とする。居住地に対応するノードのインデックスを  $i = 1, 2$  と表し、勤務地に対応するノードのインデックスを  $k = 1, 2$  と表す。なおノード 0 は、居住地でも勤務地でもないノードである。各ノードとその下流側リンクのインデックスが対応し、各リンクの自由走行時間を  $d_2, d_1, d_0, d'_1$  と表す。なお、リンク 2, 1 にはボトルネックが存在しており、その容量を  $\mu_2, \mu_1 (\mu_2 < \mu_1)$  と表す<sup>3)</sup>。

OD ペアは、(居住地, 勤務地) の組に対して設定される：

- $(i, k) = (1, 1)$
- $(i, k) = (1, 2)$
- $(i, k) = (2, 1)$
- $(i, k) = (2, 2)$

各 OD ペア  $(i, k)$  には、OD 需要  $Q_i^k$  (与件) が存在しているとする。これら各 OD ペアの利用者は、同一の希望就業開始時刻 (希望到着時刻) および同一のスケジュールコスト関数を保持している。スケジュールコスト関数  $C'(\tau)$  は時刻  $\tau$  に勤務地に到着したときに、利用者が被る私的費用である。本研究では、スケジュールコスト関数  $C'(\tau)$  の形状を、同一の希望到着時刻  $\tau^*$  において 0 の値をとる凸関数であるとする：

$$C'(\tau^*) = 0 \quad (1)$$

ここで、以降の定式化および解析を明瞭にするためにノード 0 を基準点としたノード 0 到着時刻ベース座標系  $t \in \mathcal{T}$  を導入する。この座標系のもとでのスケジュー

<sup>3)</sup> 本稿ではボトルネック容量が  $\mu_2 < \mu_1$  の大小関係を満足することを仮定するが、これは本稿の解析アプローチが頑健に成立するための必要条件ではない。

スケジュールコスト

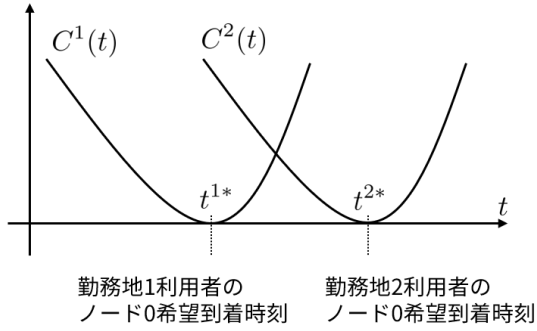


図-2 スケジュールコスト関数

ルコスト関数  $C^k(t)$  を次のように定義する：

$$C^1(t) \equiv C'(t + d_0) \quad (2)$$

$$C^2(t) \equiv C'(t + d_0 + d_{1'}) \quad (3)$$

$$\text{where } t^{1*} = \tau^* - d_0 \quad (4)$$

$$t^{2*} = \tau^* - d_0 - d_{1'} \quad (5)$$

$C^1(t)$  および  $C^2(t)$  の形状を図 2 に示す．ノード 0 到着時刻ベースの座標系では，勤務地 1 と勤務地 2 の自由流走行時間分だけ，見かけ上の希望到着時刻がずれる．

ここで本稿で扱う「(多起点)多終点ネットワーク」と「希望到着時刻の異質性を考慮した(多起点)単一終点ネットワーク」の関連性について簡単に述べる．先ほど示したように，ノード 0 到着時刻ベース座標系において，勤務地間の自由流走行時間はノード 0 を目的地とした利用者の希望到着時刻の異質性と読み替えることができる．具体的には，勤務地インデックス  $k$  が希望到着時刻が異なる利用者グループのインデックスと対応する．つまり，本稿で扱うモデルは，多起点単一終点ネットワークにおいて利用者の希望到着時刻の異質性を考慮したモデルと解釈することができる．このようなモデル設定の読み替えも可能であることを踏まえて以降の議論を眺めて頂ければ幸いである．

### 3. 動的システム最適配分

本研究では，動的システム最適配分問題を「全ボトルネックにおいて待ち行列が発生しないという条件のもと，総交通費用を最小化するフローパターンを求め問題」として定式化する．つまり，いかなる利用者も自由流走行時間で各リンクを通行し，終点に到着することができる．このような DSO 状態は，具体的には，OD 需要の保存則およびボトルネック容量制約条件のもと，総旅行費用を最小化する線形計画問題の最適解として得られる．本章では，目的関数および各制約条件を示し，DSO 配分問題を定式化する．

#### (1) 目的関数と制約条件

**目的関数** 居住地が  $i$  であり時刻  $t$  にノード 0 を通過する勤務地が  $k$  である利用者の OD フローを  $q_i^k(t)$  とすると，総交通費用は，総リンク旅行時間と総スケジュールコストの和として次のように計算できる：

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{i \in \mathcal{N}} d_i^k Q_i^k(t) + \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathcal{T}} C^k(t) q_i^k(t) dt \quad (6)$$

ここで  $d_i^k$  は，ノード  $i$  からノード  $k$  まで走行したときに被る自由走行時間である．式 (6) 第 1 項の総リンク旅行時間はフローパターンに関わらず常に定数となる．

**OD 需要の保存条件** 配分対象時間帯において OD 需要は保存される．

$$\int_{\mathcal{T}} q_i^k(t) dt = Q_i^k \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (7)$$

**ボトルネック容量制約条件** いかなる時間帯においても，ボトルネックに待ち行列は存在しない：

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{j, j \geq i} q_j^k(t) \leq \mu_i \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (8)$$

#### (2) DSO 配分問題

以上の目的関数および制約条件に決定変数の非負条件を加えて，2 起点 2 終点ネットワークにおける DSO 配分問題は次のように定式化される：

[DSO-LP]

$$\min_{\{q_i^k(t)\} \geq 0} \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathcal{T}} C^k(t) q_i^k(t) dt \quad (9)$$

$$\text{s.t. } \int_{\mathcal{T}} q_i^k(t) dt = Q_i^k \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (\rho_i^k) \quad (10)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{j, j \geq i} q_j^k(t) \leq \mu_i \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (p_i(t)) \quad (11)$$

where  $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ ,  $\mathcal{K} = \{1, 2\}$

OD 需要の保存則 (10) およびボトルネック容量制約 (11) に対応する双対変数  $\rho_i^k$ ,  $p_i(t)$  を併記している<sup>4</sup>．問題 [DSO-LP] の双対問題を付録に示している．

<sup>4</sup> DSO 配分問題 [DSO-LP] は DSO 状態を達成するなんらかの TDM スキームを導入したもとの均衡問題として定式化することもできる．例えば，Tradable Network Permit スキーム<sup>16), 17)</sup> 導入下では，双対変数  $\rho_i^k$ ,  $p_i(t)$  はそれぞれ均衡交通費用およびボトルネック通行権価格を表す．このような文脈での定式化は，Osawa et al.<sup>18)</sup>, Fu et al.<sup>14)</sup> を参照されたい．

## 4. 動的システム最適配分の解析

### (1) DSO 解析解の導出アプローチ

本章では DSO 配分問題 [DSO-LP] の解析解を、動的計画法および最適輸送理論の枠組みを活用して導出する。本節では具体的に解析結果を示す前に、まず解析解導出アプローチの基本的なアイデアと方針について述べる。

改めて、本研究では 2 起点 2 終点コリドーネットワークにおける DSO 配分問題を解析対象としている。本稿 2 章でも言及したように、このモデルは 2 起点 1 終点ネットワークにおける希望到着時刻の異質性を考慮したモデルと読み替えることもできる。このような希望到着時刻の異質性を考慮した DSO 配分問題については、Akamatsu et al.<sup>13),15)</sup> において単一ボトルネックを対象とした解析がなされている。そこでは最適輸送理論の枠組みを活用して DSO 配分問題の解析解が導出できることが示されている。

このことを踏まえて、本研究では (1) 問題 [DSO-LP] をボトルネック別の部分問題に分解し、(2) 部分問題を単一ボトルネックにおける DSO 配分問題として順番に解くことで、最終的に問題 [DSO-LP] 全体の解析解を得るアプローチを示す。このようなアプローチには、既存研究で明らかとなっている単一ボトルネック DSO 配分問題が独立に求解可能な部分問題に分解できるという保証が必要となる。本研究では、後者について問題 [DSO-LP] に部分構造最適性<sup>19)</sup> が存在することを示し、動的計画法の枠組みを用いることで適切に階層分解できることを明らかにする。

### (2) 単一ボトルネックにおける DSO 配分問題の性質

2 起点 2 終点コリドーネットワークにおける DSO 配分問題 [DSO-LP] の解析の基礎となる単一ボトルネックにおける DSO 配分問題の性質について本節で整理する。単一ボトルネックにおける DSO 配分問題の基本的な解析は Akamatsu et al.<sup>13),15)</sup> でなされているが、ここではボトルネック容量が時間帯によって変化する特殊な状況における DSO 配分問題 [DSO-LP-Single] を定式化し、その性質を示す<sup>5)</sup>。

時間帯によって変化する(時変容量)するボトルネック容量を  $\mu(t)$  とする。さらに、配分時間帯を  $[t^-, t^+]$  とすると、DSO 配分問題は次のように定式化される：

[DSO-LP-Single]

$$\min_{\{q^k(t)\} \geq 0} \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{t^-}^{t^+} C^k(t) q^k(t) dt \quad (12)$$

$$\text{s.t.} \quad \int_{t^-}^{t^+} q^k(t) dt = Q^k \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (13)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} q^k(t) = \mu(t) \quad \forall t \in [t^-, t^+] \quad (14)$$

ここで、ボトルネック容量が時変である点および配分時間帯  $[t^-, t^+]$  を明示的に設定している点を除けば、元の問題 [DSO-LP] において  $N = 1$  とした場合に対応することに注意されたい。この単一ボトルネックにおける DSO 配分問題 [DSO-LP-Single] について次の補題が成立する：

**補題 1.** 問題 [DSO-LP-Single] は、ヒッチコック型の最適輸送問題である。

**補題 2.** 問題 [DSO-LP-Single] の目的関数にあるスケジュールコスト関数  $C^k(t)$  は、 $k, t$  について狭義モンジュ性を満足する<sup>6)</sup>。

また、最適輸送理論<sup>20)</sup> によれば、輸送コスト関数が(狭義)モンジュ性を満足する場合に、ヒッチコック型最適輸送問題はソーティング特性を有する解析解が得られることが知られている<sup>21)</sup> (詳細は付録定理 1, 定理 2 を参照)。これらのことより、問題 [DSO-LP-Single] の解析解について、次の補題が成立する。

**補題 3.** 問題 [DSO-LP-Single] の最適解は以下である：

$$q^{k*}(t) = \begin{cases} \mu(t) & \text{if } t \in [t^{k-}, t^{k+}] \\ 0 & \text{if } t \notin [t^{k-}, t^{k+}] \end{cases} \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (15)$$

$$\text{where } t^{1-} < t^{1+} = t^{2-} < t^{2+} = \dots = t^{K-} < t^{K+} \quad (16)$$

ここで、関係式 (16) は、最適解において終点が遠い(あるいは希望到着時刻が早い) OD ペアから順にボトルネックを通行することを示している(ソーティング特性)。

### (3) ボトルネック稼働時間帯に関する仮定

本稿では、解析過程を簡潔に示すためにボトルネックが容量一杯使われている時間帯(ボトルネック稼働時間帯)  $\mathcal{T}_i$  について次に示す 2 つの仮定を導入する。

**仮定 1.** ボトルネック 1, 2 の稼働時間帯  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  は、連続である。

<sup>6)</sup> モンジュ性の定義は付録参照。

<sup>5)</sup> このような状況は現実に想定し難い。しかし、解析の過程でこのような部分問題をを取り扱う必要があるため、先んじて性質を整理している。

仮定 1 より, 各ボトルネックの稼働開始/終了時刻を  $t_i^-, t_i^+$  用いて, ボトルネック稼働時間帯を  $\mathcal{T}_i = [t_i^-, t_i^+]$  ( $i = 1, 2$ ) と表す.

**仮定 2.** 最適解において, 各ボトルネック稼働開始/終了時刻について, 次の大小関係が成立すると仮定する:

$$t_2^- < t_1^- < t_1^+ < t_2^+ \quad (17)$$

以降では, これらの仮定のもとで DSO 配分問題の解析解を導出していく.

#### (4) 階層的最適化問題の導出

階層的最適化問題は, 2つの部分問題 [Z(1)], [Z(2)] から構成される. ここで, 問題 [Z(2)] はボトルネック 2 に関する DSO 配分問題, 問題 [Z(1)] は問題 [Z(2)] の最適解  $\{q_2^{k*}(t)\}$  を与件として, ボトルネック 1 に関する DSO 配分問題という構造になる. 具体的に, 問題 [DSO-LP] を変形して得られる階層的最適化問題を次の命題によって示す:

**命題 1.** 次に示す階層的最適化問題 [Z(2)], [Z(1)] の最適解は, 問題 [DSO-LP] の最適解である.

[Z(2)]

$$\min_{\{q_2^k(t)\} \geq 0} \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{t_2^-}^{t_2^+} q_2^k(t) C^k(t) dt \quad (18)$$

s.t.  $\int_{t_2^-}^{t_2^+} q_2^k(t) dt = Q_2^k \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (19)$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} q_2^k(t) \leq \mu_2 \quad \forall t \in [t_2^-, t_2^+] \quad (20)$$

[Z(1)]

$$\min_{\{q_1^k(t)\} \geq 0} \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{t_1^-}^{t_1^+} q_1^k(t) C^k(t) dt \quad (21)$$

s.t.  $\int_{t_1^-}^{t_1^+} q_1^k(t) dt = Q_1^k \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (22)$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} q_1^k(t) \leq \mu_1 - q_2^{k*}(t) \quad \forall t \in [t_1^-, t_1^+] \quad (23)$$

このような問題の階層分解が可能である理由は, DSO 配分問題 [DSO-LP] が部分構造最適性を保持することに由来している. 具体的には, 元の問題および部分問題の最適値について次に示す方程式が成立する:

$$Z^*(\mathbf{q}_1^*, \mathbf{q}_2^*) = Z_2^*(\mathbf{q}_2^*) + \min_{\mathbf{q}_1} Z_1(\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2^*) \quad (24)$$

ここで, 方程式 (24) の左辺は元の問題 [DSO-LP] の最適値関数を表しており, 右辺第 1 項は部分問題 [Z(2)] の最適値関数, 第 2 項は部分問題 [Z(1)] の最適値をそれぞれ表している. つまり, 方程式 (24) は, 元の問題 [DSO-LP] の最適解が, ボトルネックベースの問題を独立に解いて得られることを表している<sup>7</sup>.

#### (5) DSO 解析解の導出

部分問題 [Z(1)] と [Z(2)] は, それぞれ問題 [DSO-LP-Single] と同じ構造となっている. このことから補題 3 を用いると, 部分問題 [Z(1)] と [Z(2)] の最適解について次の命題が導かれる:

**命題 2.** 部分問題 [Z(1)] と [Z(2)] の最適解は時刻変数を用いて次のように書ける:

$$q_2^{k*}(t) = \begin{cases} \mu_2 & \text{if } t \in [t_2^{k-}, t_2^{k+}] \\ 0 & \text{if } t \notin [t_2^{k-}, t_2^{k+}] \end{cases} \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (25)$$

$$q_1^{k*}(t) = \begin{cases} \mu_1 - \mu_2 & \text{if } t \in [t_1^{k-}, t_1^{k+}] \\ 0 & \text{if } t \notin [t_1^{k-}, t_1^{k+}] \end{cases} \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (26)$$

where  $t_i^{1-} < t_i^{1+} = t_i^{2-} < t_i^{2+} \quad \forall i \in \mathcal{N}$

また, 問題 [DSO-LP] の双対変数について解析解を得ることができる:

**命題 3.** 問題 [DSO-LP] の双対変数の最適解は以下である:

$$\rho_1^{1*} = C^1(t_1^{1-}) \quad (27)$$

$$\rho_1^{2*} = C^2(t_1^{2+}) \quad (28)$$

$$\rho_2^{1*} = C^1(t_2^{1-}) \quad (29)$$

$$\rho_2^{2*} = C^2(t_2^{2+}) \quad (30)$$

$$p_1^*(t) = \begin{cases} \rho_1^{1*} - C^1(t) & \text{if } t \in [t_1^{1-}, t_1^{1+}] \\ \rho_1^{2*} - C^2(t) & \text{if } t \in [t_1^{2-}, t_1^{2+}] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (31)$$

$$p_2^*(t) = \begin{cases} \rho_2^{1*} - C^1(t) - p_1^*(t) & \text{if } t \in [t_2^{1-}, t_2^{1+}] \\ \rho_2^{2*} - C^2(t) - p_1^*(t) & \text{if } t \in [t_2^{2-}, t_2^{2+}] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (32)$$

命題 2, 命題 3 が表す DSO 配分問題 [DSO-LP] の解析解は, ボトルネック稼働開始/終了時刻を用いて記述されている. これらボトルネック稼働開始/終了時刻は,

<sup>7</sup> あくまで方程式 (24) は最適解における目的関数値の関係性を示しているにすぎない. そのため, より厳密には“元の問題 [DSO-LP] の最適解のうち少なくとも 1 つはボトルネックベースの問題を独立に解いて得られる“ということになる.

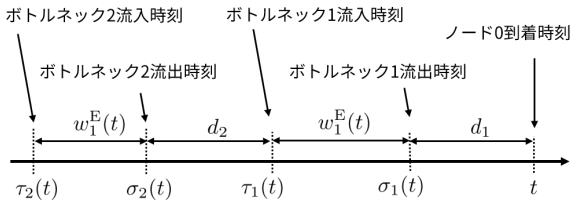


図-3 時間軸の関係

各ボトルネックにおいて、終点 1 と 2 の OD フローが切り替わる時刻における最適性条件から解析的に求めることができる：

**命題 4.** 各ボトルネックの稼働開始/終了時刻は、次の連立方程式の解として一意に定まる：

$$\begin{cases} C^1(t_2^-) - C^1(t_2^+) = C^2(t_2^-) - C^2(t_2^+) \\ C^1(t_1^-) - C^1(t_1^+) = C^2(t_1^-) - C^2(t_1^+) \end{cases} \quad (33)$$

$$\text{where } t_2^{1-} = t_2^- \quad (34)$$

$$t_2^{1+} = t_2^{2-} = t_2^- + Q_2^1/\mu_2 \quad (35)$$

$$t_2^{2-} = t_2^- + (Q_2^1 + Q_2^2)/\mu_2 \quad (36)$$

$$t_1^{1-} = t_1^- \quad (37)$$

$$t_1^{1+} = t_1^{2-} = t_1^- + Q_1^1/(\mu_1 - \mu_2) \quad (38)$$

$$t_1^{2+} = t_1^- + (Q_1^1 + Q_1^2)/(\mu_1 - \mu_2) \quad (39)$$

以上の命題 2, 命題 3, 命題 4 より DSO 配分問題 [DSO-LP] の解析解が明らかとなった。

## 5. 動的利用者均衡配分

本研究では、DUE 状態を「利用者の誰もが自分の選択している出発時刻を単独で変更するインセンティブを持たない状態」と定義する。本章では、動的なネットワークフローが満足すべき物理的制約条件および出発時刻選択均衡条件<sup>8</sup>を示し、DUE 配分問題を線形相補性問題として定式化する。

### (1) 新たに導入する記号の定義

3章,4章における DSO 配分問題の解析では、ボトルネックに待ち行列が存在しないと仮定していたため、明示的にボトルネック待ち行列を定式化に組み込んでいなかった。ただし、本章以降で解析対象とする DUE 配分問題においては、DUE 状態においてボトルネック待

ち行列が存在するので、それら待ち行列の時々刻々の取り扱いを考える必要がある。このことを踏まえて、新たに待ち行列遅れ時間を表す変数および各ボトルネックの流入/流出時刻を表す変数を次のように定義する：

- $\hat{w}_i(t)$ ：時刻  $t$  にノード 0 を通過するフローが、ボトルネック  $i$  で経験する待ち行列遅れ
- $\tau_i(t)$ ：時刻  $t$  にノード 0 を通過するフローの、ボトルネック  $i$  への流入時刻
- $\sigma_i(t)$ ：時刻  $t$  にノード 0 を通過するフローの、ボトルネック  $i$  からの流出時刻

これらの時刻変数と待ち行列遅れ時間の関係を図-3 に示す。図-3 は、時刻  $t$  にノード 0 を通過するフローが、各ボトルネックにいつ流入しいつ流出したかをひとつの時間軸上で表現したものである。各ボトルネックで FIFO 原則が成立していれば、時刻変数について次の関係が成立する：

$$\tau_i(t) + \hat{w}_i(t) = \sigma_i(t) \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (40)$$

$$\tau_i(t) = t - \sum_{j:j \leq i} \hat{w}_j(t) \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (41)$$

ボトルネック累積流出/流入曲線を絶対時刻座標系の関数として定義する：

- $\hat{D}_i(\sigma_i(t))$ ：ボトルネック累積流出曲線
- $\hat{A}_i(\tau_i(t))$ ：ボトルネック累積流入曲線

### (2) DUE 状態において満たされるべき条件

DUE 状態においては、ボトルネックにおける待ち行列条件、OD 需要の保存則、利用者の出発時刻選択均衡条件の 3 つの制約条件を満足する必要がある。OD ペア  $(i, k)$  のノード 0 到着フローを  $\hat{q}_j(t)$  とすると、各制約条件は具体的に次のように表される。

**待ち行列条件** 本研究ではボトルネックにおける待ち行列の進展を point queue モデルで表現する。このとき、待ち行列条件は次に示す相補性条件として書き下せる：

$$\begin{cases} \sum_{j:j \geq i} \hat{q}_j(t) = \mu_i \hat{\sigma}_i(t) & \text{if } \hat{w}_i(t) > 0 \\ \sum_{j:j \geq i} \hat{q}_j(t) \leq \mu_i \hat{\sigma}_i(t) & \text{if } \hat{w}_i(t) = 0 \end{cases}$$

$$\forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

待ち行列条件の導出過程の詳細については Akamatsu et al.<sup>15)</sup> を参照されたい。

**OD 需要の保存則** 配分対象時間帯において OD 需要は保存される：

$$\int_{\mathcal{T}} \hat{q}_i^k(t) dt = Q_i^k \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall k \in \mathcal{K}.$$

これは DSO 配分問題における OD 需要の保存則と同様の形式である。

<sup>8</sup> 出発時刻選択均衡条件は、本研究で対象とするネットワークに則した言い方をすれば、ノード 0 通過時刻選択条件となる。ただし本稿では、多くの出発時刻選択問題に関する既存研究を踏襲し、利用者の時間方向の選択行動を表す均衡条件は出発時刻選択均衡条件と統一して表記する。

**出発時刻選択条件** DUE 状態における OD ペア  $(i, k)$  の均衡交通費用を  $\hat{\rho}_i^k$  とする. 出発時刻選択条件は, 次  
に示す相補性条件によって表現できる:

$$\begin{cases} C^k(t) + \sum_{j:j \leq i} \hat{w}_i(t) = \hat{\rho}_i^k & \text{if } \hat{q}_i^k(t) > 0 \\ C^k(t) + \sum_{j:j \leq i} \hat{w}_i(t) \geq \hat{\rho}_i^k & \text{if } \hat{q}_i^k(t) = 0 \end{cases} \\ \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall k \in \mathcal{K}.$$

### (3) DUE 配分問題

これらの条件式を用いて, DUE 配分問題は次のように定式化される:

[DUE-LCP]

$$\text{find } \{\hat{\rho}_i^k\}, \{\hat{w}_i(t)\}, \{\hat{q}_i^k(t)\} \geq 0$$

such that

$$\begin{cases} C^k(t) + \sum_{j:j \leq i} \hat{w}_i(t) = \hat{\rho}_i^k & \text{if } \hat{q}_i^k(t) > 0 \\ C^k(t) + \sum_{j:j \leq i} \hat{w}_i(t) \geq \hat{\rho}_i^k & \text{if } \hat{q}_i^k(t) = 0 \end{cases} \\ \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (42)$$

$$\begin{cases} \sum_{j:j \geq i} \hat{q}_j(t) = \mu_i \hat{\sigma}_i(t) & \text{if } \hat{w}_i(t) > 0 \\ \sum_{j:j \geq i} \hat{q}_j(t) \leq \mu_i \hat{\sigma}_i(t) & \text{if } \hat{w}_i(t) = 0 \end{cases} \\ \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (43)$$

$$\int_{\mathcal{T}} \hat{q}_i^k(t) dt = Q_i^k \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (44)$$

### (4) 待ち行列条件の等価表現

待ち行列条件 (43) は, 様々な等価表現が可能である. ここでは以降の解析で用いるボトルネック流出フロー変数を用いた待ち行列条件を示す. まず, ボトルネック流出フロー  $\hat{x}_i(\sigma(t))$  を累積流出曲線を用いて, 次のように定義する:

$$\hat{x}_i(\sigma_i(t)) \equiv \frac{d\hat{D}_i(\sigma_i(t))}{d\sigma_i(t)} \quad (45)$$

これを用いて待ち行列条件は次のように表すことができる<sup>15)</sup>:

$$\begin{cases} \hat{x}_i(\sigma_i(t)) = \mu_i & \text{if } \hat{w}_i(t) > 0 \\ \hat{x}_i(\sigma_i(t)) \leq \mu_i & \text{if } \hat{w}_i(t) = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (46)$$

## 6. 動的利用者均衡配分の解析

### (1) DUE 解析解の導出アプローチ

本章では, 適切な条件のもとで DSO 配分問題 [DSO-LP] の解と 1 対 1 対応する DUE 配分問題 [DSO-LCP] の解が存在することを, 両者を対応付ける closed-form 関係式の導出をもって明らかにする. このことは DSO の解析を活用して, DUE の解析解が得られることも意味する. 本節では, 具体的な解析結果を示す前に, まず DUE 解析解導出の方針を簡単に述べる.

そもそも, DSO 配分問題の解を活用して, DUE 配分問題の解析解を得るという発想は, 井料・吉井<sup>11)</sup>, Iryo and Yoshii<sup>12)</sup> で示されたものである. そこでは, 単一ボトルネックにおいて, DUE 状態における待ち行列遅れと DSO 状態におけるボトルネック容量制約双対変数が一致することが示されている. この事実に基づき, 本研究では, 2 起点 2 終点ネットワークにおいても, 待ち行列遅れとボトルネック容量制約双対変数が一致するという推論をもとに解析を進める. 具体的には, まず, 推論が真であると仮定し, OD フローの非負条件を除く DUE 配分問題 [DUE-LCP] の均衡条件から他の未知変数の均衡解の候補を導出する. そして, そのようにして導出された OD フローが非負条件を満足するかを検証し, 解候補が DUE 配分問題 [DUE-LCP] の真の均衡解であるか解析する. 結論としては, スケジュールコスト関数の形状に関する条件のもとで推論が真であり, 他の未知変数についてもすべて解析的に均衡解を導出できることを明らかにした.

### (2) 待ち行列遅れに関する推論

前節で示した均衡状態における待ち行列遅れに関する推論を次のようにまとめる:

**推論 1.** DUE 配分問題 [DUE-LCP] の, 待ち行列遅れの均衡解  $\hat{w}_i(t)$  は, DSO 配分問題 [DSO-LP] の最適解  $p_i^*(t)$  を用いて次のように表すことができるとする:

$$\hat{w}_i(t) = p_i^*(t) \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (47)$$

### (3) DUE 解析解

推論 1 に基づき, OD フローの非負条件を除く DUE 配分問題 [DUE-LCP] の均衡条件を整理すると, 他の未知変数について, 次の補題に示す解の候補が導出される:

**補題 4.** 推論 1 のもとで, 問題 [DUE-LCP] の  $\hat{x}_i(\sigma_i(t))$

の解候補は以下である：

$$\hat{x}_i(\sigma_i(t)) = x_i^*(t) \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (48)$$

$$\text{where } x_i^*(t) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{j: j \geq i} q_i^{k*}(t) \quad (49)$$

**補題 5.** 推論 1 のもとで、問題 [DUE-LCP] の  $\hat{\rho}_i^k$  の解候補は以下である：

$$\hat{\rho}_i^k = \rho_i^{k*} \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall k \in \mathcal{K}. \quad (50)$$

**補題 6.** 推論 1 のもとで、問題 [DUE-LCP] の  $\hat{q}_i^k(t)$  の解候補は以下である：

$$\hat{q}_2^1(t) = \begin{cases} q_2^{1*}(t)(1 + \dot{C}^1(t)) & \text{if } t \in [t_1^{1-}, t_1^{1+}] \\ q_2^{1*}(t) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (51)$$

$$\hat{q}_2^2(t) = \begin{cases} q_2^{2*}(t)(1 + \dot{C}^2(t)) & \text{if } t \in [t_1^{2-}, t_1^{2+}] \\ q_2^{2*}(t) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (52)$$

$$\hat{q}_1^1(t) = q_1^{1*}(t) - q_2^{1*}(t)\dot{C}^1(t) \quad (53)$$

$$\hat{q}_1^2(t) = q_1^{2*}(t) - q_2^{2*}(t)\dot{C}^2(t) \quad (54)$$

このように導出された解候補が DUE 配分問題 [DUE-LCP] の均衡解であるためには、これまで無視してきた OD フローの非負条件を検証する必要がある。この条件はスケジュールコスト関数の形状に関する条件として次の補題にまとめられる：

**補題 7.** スケジュールコスト関数が次に示す条件を満足するとき、補題 6 が示す解候補は非負条件を満たす：

$$\dot{C}^k(t) \geq -1 \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (55)$$

$$\dot{C}^k(t) \leq \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall t \in [t_1^-, t_1^+] \quad (56)$$

以上より補題 7 に示すスケジュールコスト関数の形状に関する条件のもとで、DUE 解析解を得られることがわかった。このことを次の命題にまとめる：

**命題 5.** 補題 7 に示す条件のもとで、DUE 配分問題 [DUE-LCP] の解は、DSO 配分問題 [DSO-LP] の解  $q_i^{k*}(t), p_i^*(t), \rho_i^{k*}$  を用いて、次のように書ける：

$$\hat{w}_i(t) = p_i^*(t) \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

補題 5, 補題 6 の関係式。

## 7. おわりに

本研究では、2 起点 2 終点からなるネットワーク (図-1) における DSO 配分および DUE 配分の解析を行い、

両者の理論的性質および対応関係を明らかにした。具体的には、まず、DSO 配分問題は、適切に問題を分解し最適輸送理論の枠組みを活用することで解析解を得られることを明らかにした。次に、スケジュールコスト関数がある条件を満足していれば、DSO 解に 1 対 1 対応する DUE 解が存在することを明らかにした。従来研究では単一起点または単一終点 OD パターンに限定された解析アプローチを多起点多終点 OD パターンに拡張した点は、本研究の貢献である。

今後の課題については、本稿では 2 起点 2 終点の具体的なケースの解析を行ったが、同様の結論が  $N$  起点  $N$  終点ネットワークでも頑健に成立するか検証する必要がある。また、依然として、経路選択の存在する一般ネットワークにおいて本研究で示した DSO と DUE の対応関係が頑健に成立するかどうかは未解明である。これらの点は今後の研究課題である。

**謝辞：** 本研究は、JSPS 科研費 (JP18H01551, JP20J21744) の助成を受けた研究の一部です。ここに記し、感謝を表します。

## 付録 I DSO 配分問題の最適性条件

DSO 配分問題 [DSO-LP] の最適性条件を次に示す：

[DSO-LP-KKT]

$$\begin{cases} C^k(t) + \sum_{j: j \leq i} p_j(t) = \rho_i^k & \text{if } q_i^k(t) > 0 \\ C^k(t) + \sum_{j: j \leq i} p_j(t) \geq \rho_i^k & \text{if } q_i^k(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (\text{I.1})$$

$$\begin{cases} \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{j: j \geq i} q_j^k(t) = \mu_i & \text{if } p_i(t) > 0 \\ \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{j: j \geq i} q_j^k(t) \geq \mu_i & \text{if } p_i(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (\text{I.2})$$

$$\int_{\mathcal{T}} q_i^k(t) dt = Q_i^k \quad \forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (\text{I.3})$$

## 付録 II 最適輸送理論とモンジュ性

本章では、本研究の解析アプローチにおいて重要な役割を果たす最適輸送理論の枠組みを示す。特に、本文で示した階層的最適化問題のサブ問題に対応する最適輸送問題および、問題の構造を決定するモンジュ性を重点的に扱う。なお、本章で扱う記号は本文の定義とは異なることに注意されたい。



最も代表的な最適輸送問題のクラスのひとつであるヒッチコック問題は、供給地を表すノード集合  $\mathcal{I}$  と需要地を表すノード集合  $\mathcal{K}$  からなる二部グラフ構造のネットワークにおける最適輸送問題である。具体的なネットワーク条件を以下に示す。  $I$  個の供給地と  $K$  個の需要地を表す各ノードには、それぞれ供給量  $S_i$  および需要量  $Q_k$  が定義されており、これらの地点を結ぶリンクには輸送コスト  $c_{i,k}$  が定義されている。主要な記号の定義の一覧を以下に示す。

- $I$  : 供給地数
- $K$  : 需要地数
- $i \in \mathcal{I}$  : 供給地と供給地集合
- $k \in \mathcal{K}$  : 消費地と消費地集合
- $S_i$  : 供給地  $i$  の供給量
- $Q_k$  : 消費地  $k$  の需要量
- $c_{i,k}$  : 地点  $i, k$  間の輸送コスト
- $x_{i,k}$  : 地点  $i, k$  間の輸送量 (決定変数)

ここで、需要量と供給量の総和は一致しているものとする：

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} S_i = \sum_{k \in \mathcal{K}} Q_k$$

ヒッチコック問題は、需要量制約および供給量制約を満足し、かつ総輸送費用を最小化するフローパターンを求める問題として、以下の線形計画問題の形で定式化される：

**[2D-OPT]**

$$\min_{\mathbf{x}} \quad Z(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{k \in \mathcal{K}} c_{i,k} x_{i,k} \quad (\text{II.1})$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k \in \mathcal{K}} x_{i,k} = S_i \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (\text{II.2})$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} x_{i,k} = Q_k \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (\text{II.3})$$

$$x_{i,k} \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (\text{II.4})$$

この [2D-OPT] は二重制約型の構造を有しており、時刻について離散系か連続系かの違いを無視すれば、本研究のサブ問題と対応する構造である。

このように定式化された [2D-OPT] の解析を行う上で重要ないくつかの概念および定理を導入する。

**定義 1.** 輸送コスト行列  $C$  が以下の条件を満たすとき、 $C$  はモンジュ性を満足する。

$$c_{i,k} + c_{i+1,k+1} \leq c_{i,k+1} + c_{i+1,k} \quad (\text{II.5})$$

$$\forall 1 \leq i < I, 1 \leq k < K$$

特に等式条件が不要な場合は、狭義モンジュ性を満足する。

ヒッチコック問題 [2D-OPT] の実行可能解を見つける方法として、北西隅のルール (Northwest corner rule) が存在する。北西隅のルールについて以下の定理が成立する<sup>22)23)</sup>。

**定理 1.** 北西隅のルールは、任意のヒッチコック問題に対して、実行可能解を与える。

**定理 2.** 北西隅のルールは、輸送コスト行列  $C$  がモンジュ性を満足する最適輸送問題に対して、最適解を与える。

これまでに示した離散型のヒッチコック問題に関する定理は、供給地および需要地が連続の場合にも同様に成立する。確率変数  $x \in X = \mathbb{R}$  および  $y \in Y = \mathbb{R}$  およびそれに対応する分布関数  $F_1, F_2$  を導入する。さらに、確率変数  $(x, y)$  に対応する分布関数  $F$  も定義する。連続な輸送コスト関数  $c: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を用いて、連続型の最適輸送問題は以下のように表される。

**[2D-COTP]**

$$\min_{F \in \mathcal{F}(F_1, F_2)} \quad Z_{2D}(F) \equiv \int_{X \times Y} c(x, y) dF(x, y) \quad (\text{II.6})$$

$$\text{where } \mathcal{F}(F_1, F_2) \equiv \{F(x, \infty) = F_1(x), F(\infty, y) = F_2(y)\}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (\text{II.7})$$

ここで  $F_1(\infty) = F_2(\infty)$  である。また、[2D-COTP] に関して次に示す定理が成り立つ<sup>24),25)</sup>：

**定理 3.** 輸送コスト分布  $c: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  が劣モジュラ関数であるとき、[2D-COTP] の解  $F^*(x, y) \in \mathcal{F}(F_1, F_2)$  は次に示す Frechet-Hoeffding 分布として得られる：

$$F^*(x, y) = \min\{F_1(x), F_2(y)\} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{II.8})$$

**参考文献**

- 1) Vickrey, W. S.: Congestion theory and transport investment, The American economic review, Vol.59, No.2, pp.251-260, 1969.
- 2) Kuwahara, M.: Equilibrium queueing patterns at a Two-Tandem bottleneck during the morning peak, Transportation Science, Vol.24, No.3, pp.217-229, August 1990.
- 3) Arnott, R., de Palma, A., and Lindsey, R.: Properties of dynamic traffic equilibrium involving bottlenecks, including a paradox and metering, Transportation Science, Vol.27, No.2, pp.148-160, May 1993.
- 4) Arnott, R. and DePalma, E.: The corridor problem: Preliminary results on the no-toll equilibrium, Transportation Research Part B: Methodological, Vol.45, No.5, pp.743-768, June 2011.

- 5) Akamatsu, T., Wada, K., and Hayashi, S.: The corridor problem with discrete multiple bottlenecks, *Transportation Research Procedia*, Vol.7, pp.474–498, January 2015.
- 6) Muñoz, J. C. and Laval, J. A.: System optimum dynamic traffic assignment graphical solution method for a congested freeway and one destination, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.40, No.1, pp.1–15, January 2006.
- 7) Shen, W. and Zhang, H. M.: On the morning commute problem in a corridor network with multiple bottlenecks: Its system-optimal traffic flow patterns and the realizing tolling scheme, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.43, No.3, pp.267–284, March 2009.
- 8) van den Berg, V. and Verhoef, E. T.: Congestion tolling in the bottleneck model with heterogeneous values of time, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.45, No.1, pp.60–78, January 2011.
- 9) Tian, Q., Huang, H.-J., Yang, H., and Gao, Z.: Efficiency and equity of ramp control and capacity allocation mechanisms in a freeway corridor, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol.20, No.1, pp.126–143, February 2012.
- 10) Hendrickson, C. and Kocur, G.: Schedule delay and departure time decisions in a deterministic model, *Transportation Science*, Vol.15, No.1, pp.62–77, February 1981.
- 11) 井料隆雅, 吉井稔雄, and 朝倉康夫: 出発時刻選択問題の均衡状態に関する数理的な分析, *土木学会論文集*, Vol.2005, No.779, pp.779\_105–779\_118, 2005.
- 12) Iryo, T. and Yoshii, T.: Equivalent optimization problem for finding equilibrium in the bottleneck model with departure time choices, *4th IMA International Conference on Mathematics in Transport Institute of Mathematics and its Applications*, trid.trb.org, 2007.
- 13) Akamatsu, T., Wada, K., Iryo, T., and Hayashi, S.: Departure time choice equilibrium and optimal transport, *MPRA Paper*, 2018.
- 14) Fu, H., Akamatsu, T., Satsukawa, K., and Wada, K.: Dynamic traffic assignment in a corridor network: Optimum vs. equilibrium, *Technical report*, 2020.
- 15) Akamatsu, T., Wada, K., Iryo, T., and Hayashi, S.: A new look at departure time choice equilibrium models with heterogeneous users, 2020.
- 16) Wada, K. and Akamatsu, T.: A hybrid implementation mechanism of tradable network permits system which obviates path enumeration: An auction mechanism with day-to-day capacity control, *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, Vol.80, pp.304–326, June 2013.
- 17) Akamatsu, T. and Wada, K.: Tradable network permits: A new scheme for the most efficient use of network capacity, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol.79, pp.178–195, June 2017.
- 18) Osawa, M., Fu, H., and Akamatsu, T.: First-best dynamic assignment of commuters with endogenous heterogeneities in a corridor network, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.117, pp.811–831, November 2018.
- 19) T. コルメン, C. ライザーソン, R. リベスト, C. シュタイン: *アルゴリズムイントロダクション: 世界標準 MIT 教科書*, 2013.
- 20) Rachev, S. T. and Rüschendorf, L.: *Mass Transportation Problems: Volume I: Theory*, Springer Science & Business Media, March 1998.
- 21) Burkard, R. E.: Monge properties, discrete convexity and applications, *European journal of operational research*, Vol.176, No.1, pp.1–14, January 2007.
- 22) Hoffman, A. J.: On greedy algorithms that succeed, *Surveys in combinatorics*, Vol.1985, pp.97–112, 1985.
- 23) Hoffman, A. J.: On simple linear programming problems, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Vol. 7, pp. 317–327, books.google.com, 1963.
- 24) Cambanis, S., Simons, G., and Stout, W.: Inequalities for  $\epsilon k(X, Y)$  when the marginals are fixed, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, Vol.36, No.4, pp.285–294, 1976.
- 25) Dubuc, S., Kagabo, I., and Marcotte, P.: A note on the uniqueness of solutions to the transportation problem, *INFOR. Information Systems and Operational Research*, Vol.37, No.2, pp.141–148, 1999.

(2020.10.2 受付)