

経済活動の時空間的な集中メカニズムを 考慮した都市システムモデル

苗 璐¹・高山 雄貴²

¹学生会員 金沢大学 自然科学研究科 (〒 920-1192 石川県金沢市角間町)
E-mail: miao@stu.kanazawa-u.ac.jp

²正会員 金沢大学准教授 理工研究域 (〒 920-1192 石川県金沢市角間町)
E-mail: ytakayama@se.kanazawa-u.ac.jp

本研究では、経済活動の時間分布 (i.e., 始業時刻分布) と空間分布 (i.e., 人口分布) を内生化したモデルを構築する。そのために、Alonso¹⁾ 型の居住地選択モデルと Henderson²⁾ 型の始業時刻選択モデルを統合した 1 都市の住宅立地モデル (高山³⁾) を多都市、かつ空間集積の経済を考慮した枠組みに拡張する。そして、ポテンシャルゲームの性質を用い、モデルの均衡状態と社会的最適状態の特性分析を行う。その結果、次の性質が明らかにされる：1) 始業時刻集中による生産性向上効果 (異なる企業の業務スケジュールの同期の必要性) の低下は一方の都市への人口集中をもたらす。2) 安定均衡状態から、居住地毎の始業時刻を分散、都市内・都市間の人口分布を集中させるような政策導入により、社会厚生が増大する。

Key Words : *temporal and spatial agglomeration economies, systems-of-cities model, potential game*

1. はじめに

(1) 背景と目的

世界中の殆どの都市において、朝ピーク時間帯の交通混雑や列車遅延が大きな問題となっている。この問題の主要な原因の一つに、殆どの経済活動が特定の時間帯・場所において集中して行われる点が挙げられる。それゆえ、古典的な交通・立地理論では、経済活動が行われる時間帯・場所が集積し、その構造 (e.g., 都市人口, 中心業務地区の位置・規模, 始業時刻分布) が変化しないことを前提とした枠組が開発されてきた。しかし、これらの古典的な理論は、その特徴から、経済活動の時間・空間分布を変化させることで交通混雑を緩和させることを意図した交通需要マネジメント施策 (e.g., 時差出勤, フレックスタイム, 時間帯別課金) の効果検証に、そのまま適用することはできない。

始業時刻と交通混雑の関係 (始業時刻分布の内生的形成) に関する先駆的な研究に、Henderson²⁾ がある。この研究は、業務時刻の集中が“企業生産性の向上”・“余暇活動の易化”をもたらす“時間集積の経済”と呼ばれる始業時刻集中による正の効果と、“時間集積の不経済”と呼ばれる負の効果を考慮した枠組みを提案し、経済活動の時間的な集積・分散メカニズムの説明に成功している。しかし、Henderson²⁾ は、都市内部の空間構造が固定であると仮定している。

高山³⁾ は、Henderson²⁾ 型の始業時刻選択モデルと

Alonso¹⁾ 型の居住地選択モデルを統合することで、経済活動の時間・空間分布の変化を記述できるモデルを構築している。しかし、都市人口が固定的であるとの仮定が導入されているため、経済活動の空間集積構造の変化を説明することができない。

そこで、本研究では、Alonso¹⁾ 型の居住地選択モデルと Henderson²⁾ 型の始業時刻選択モデルを統合した高山³⁾ の 1 都市モデルを拡張し、2 都市かつ空間集積の経済を考慮した都市システムモデルを開発する。そして、そのモデルにポテンシャル関数が存在することを利用し、均衡状態と社会的最適状態の特性を明らかにする。さらに、それらの特性の違いを明確化するとともに、社会厚生を向上させるための政策の特徴を示す。

本研究の構成は以下のとおりである。本章 (2) 節では、関連研究の成果と課題を整理した後、本研究の位置づけを述べる。2 章では、労働者の住宅立地・始業時刻選択行動をモデル化した上で、その均衡条件を定式化する。そして、3 章では、ポテンシャル関数の存在を証明し、均衡状態の特性分析を行う。4 章では、社会厚生関数を定義した上で、効率的な状態を達成するための政策を提案するとともに、3 章で得られた安定均衡状態と比較し、その効果を検証する。5 章では、数値解析を通じ、これまでの結果を確認した上で、時間・空間集積による生産性向上効果の関係を明らかにする。そして、その結果から時差出勤普及の影響を議論する。最後に、6 章で結論を述べる。

(2) 関連研究と本研究の位置づけ

都市経済学分野では、交通・土地利用の相互作用を考慮した、都市内空間構造の規則性に関する理論 (e.g., Alonso¹⁾, Fujita⁴⁾, Arnott⁵⁾, Brinkman⁶⁾) が長年に渡り蓄積されている。土木計画学分野では、これらの理論の応用・拡張により、交通・土地利用パターンの定量的な予測・評価に用いることができる交通・立地統合モデルに関する研究が膨大に蓄積されている (e.g., 小池ら⁷⁾, 尹ら⁸⁾, 上田ら⁹⁾).

土地利用パターンの変化を考慮していない始業時刻と交通混雑に関連する研究も発展してきた。Henderson²⁾ は静学的な交通混雑モデルを拡張することで、労働者に対して時差出勤を普及するメリットがあるかを評価する経済的枠組みを構築している。このモデルを改良・発展させた既存研究である吉村ら¹⁰⁾, 吉村・奥村¹¹⁾, Arnott et al.²⁰⁾, 小林ら¹²⁾ でも、静学モデルに基づく交通混雑表現を採用している。一方, Yoshimura and Okumura¹³⁾, Mun and Yonekawa¹⁴⁾, 佐藤・赤松¹⁵⁾, Takayama¹⁶⁾, Fosgerau and Small¹⁷⁾ はボトルネックモデルによりピーク時の交通渋滞を表現している。

しかし、始業時刻分布と土地利用パターンとの関係を考慮した研究は、Wilson¹⁸⁾, 高山¹⁹⁾³⁾に限られる。Wilson¹⁸⁾では、時間集積の経済・不経済を考慮しておらず、さらに、労働者の始業時刻・人口分布が効用関数・企業の利潤関数・交通費用関数に依存するという理論的知見しか得られていない。高山¹⁹⁾は、時間集積経済・不経済を考慮した枠組みを構築しているが、2箇所の居住地間に単一のボトルネックが存在するというシンプルな空間構造しか分析されていない。高山³⁾は、ボトルネックモデルの代わりに、Henderson²⁾型の交通混雑モデルを用いることで、前述の課題を解決しているものの、単一都市しか考慮していないという課題が残っている。

これらの研究と比較すると、本研究には、2都市の居住地・混雑する道路が存在する空間構造 (図-1) 下での時空間集積の経済・不経済の影響を分析することができるモデルを構築している点に特徴がある。さらに、ポテンシャル関数の存在を利用した手法より、その特性を理論的に解明している。そして、次のような知見を得ることに成功している：1) 始業時刻集中による生産性向上効果 (異なる企業の業務スケジュールの同期の必要性) の低下は一方の都市への人口集中をもたらす。2) 安定均衡状態から、居住地毎の始業時刻を分散、都市内・都市間の人口分布を集中させるような政策導入により、社会厚生が増大する。

2. 始業時刻・立地選択の同時均衡

(1) 都市と交通条件の設定

本研究では、図-1に示すような、2箇所の単一中心都市で構成されている空間構造を考慮する。それらの内部の居住地分布は単方向の線形分布であると仮定する。それぞれの居住地数は A^I と A^{II} である。都市の集合を $D = \{I, II\}$ と表す。居住地は、CBD から近い順にインデックスをつけ、それぞれの集合を $A^d \equiv \{1, 2, \dots, A^d\}$ と表す。各居住地の面積はすべて同一で、 L であると仮定する。

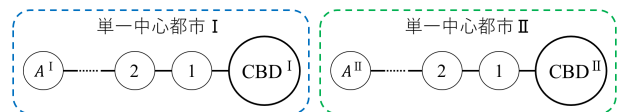


図-1: 2箇所の単一中心都市の空間構造

本モデルでは、全ての企業は CBD に立地し、2箇所の都市の始業時刻選択は同一で、 T 種類の時刻 $\{t_1, t_2, \dots, t_T\}$ から選択できると仮定する。¹以降では、 $\mathcal{I} \equiv \{1, 2, \dots, T\}$ は企業の集合である。CBD^d に立地しており、始業時刻が t_i の企業を “企業 $(d, i) \in \mathcal{I}$ ” と呼ぶ。この選択可能な始業時刻は、全て同一の時間間隔 τ で並んでおり、 $i \in \mathcal{I} \setminus \{1\}$ に対し、 $t_i = t_{i-1} + \tau$ が成立する。また、全企業の労働時間 H は同一かつ一定値であり、さらに、ある時間帯には必ず全企業が同時に業務を行っている (i.e., $t_T \leq t_1 + H$) と仮定する。

労働者は全て均質であり、都市 d の労働者総数はそれぞれ N^d であり、2箇所の都市の労働者総数は固定的に $N = N^I + N^{II}$ である。労働者は、都市 $d \in D$, 居住地 $a \in A^d$, 時刻 i に始業する企業 $i \in \mathcal{I}$ を選択する。労働者の選択集合は $\mathcal{I} \times (A^d \times D)$ である。都市・居住地・始業時刻別の労働者数 (以降、人口・始業時刻分布と呼ぶ) を $\mathbf{n} = (n_{a,i}^d)_{d \in D, a \in A^d, i \in \mathcal{I}}$ と表す。企業はすべて CBD に立地しているため、労働者は居住地から CBD へ通勤する。さらに、労働者は居住している都市の CBD へしか通勤しないと仮定する。

各居住地を結ぶ道路はすべて均質であり、居住地 $a-1$ と a の間の道路を “道路 a ” と呼ぶ。都市 d に居住する始業時刻 t_i の労働者の道路 a の交通量 $x_{a,i}^d$ は、以下の

¹ 本稿では、企業が選択できる始業時刻は連続的でなく、離散的であると仮定している。これは、ほとんどの始業時刻が、8:00, 8:30, 9:00 のように、幾つかの時刻に集中している状況を反映するためのものである。

ように表される：²

$$x_{a,i}^d = \sum_{b=a}^{A^d} n_{b,i}^d. \quad (1)$$

そして、都市 d に居住する始業時刻が t_i の労働者が道路 a を通過する際にかかる交通費用は、Henderson²⁾ と同様、非負、 $x_{a,i}^d$ の単調増加、かつ狭義凸関数 $c(x_{a,i}^d)$ で表されると仮定する。

(2) 主体の行動

a) 労働者の財消費行動

前節において仮定した通り、2 箇所の都市の労働者は全て均質であるため、同一の効用関数を適用する。したがって、これらの労働者は、都市 $d \in \mathcal{D}$ 、居住地 $a \in \mathcal{A}^d$ 、労働を供給する企業 $i \in \mathcal{I}$ により特徴付けられ、合成財（住宅以外の全ての財）の消費量 $z_{a,i}^d$ と住宅面積 y_a^d を選択する。これらの労働者の効用関数は、財消費に関する合成財の消費量 $z_{a,i}^d$ 、住宅面積 y_a^d の準線形関数 $u(z_{a,i}^d, y_a^d)$ を通じ、与えられると仮定する：

$$u(z_{a,i}^d, y_a^d) = z_{a,i}^d + f(y_a^d). \quad (2)$$

ここで、関数 $f(x)$ は狭義単調増加、凹、かつ $x > 0$ の範囲で 2 階微分可能である。さらに、 $f(x)$ の導関数 $f'(x) = df(x)/dx$ に関しては、 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty$ が成立すると仮定する。合成財をニューメレールとし、各都市の予算制約は以下で与えられる：

$$w_i^d = z_{a,i}^d + r_a^d y_a^d + \sum_{b=1}^a c(x_{b,i}^d). \quad (3)$$

ここで、 w_i^d は都市 d にある企業 i から支払われる賃金、 r_a^d は都市 d 付近の居住地 a の地代である。

また、財消費に関する効用最大化問題の一階条件より、次の関係が得られる：

$$\begin{cases} f'(y_a^d) = r_a^d & \text{if } y_a^d > 0 \\ f'(y_a^d) \leq r_a^d & \text{if } y_a^d = 0 \end{cases} \quad \forall a \in \mathcal{A}^d. \quad (4)$$

前述の仮定より、 $y_a^d = 0$ の場合、 $f'(y_a^d) = \infty$ であるため、常に $y_a^d > 0$ が成立する。したがって、地代 r_a^d を住宅面積 y_a^d に応じ、以下のように表す。

$$r_a^d = f'(y_a^d) > 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}^d. \quad (5)$$

次に、都市 d の居住地 a の総労働者数を N_a^d と表示し、居住地 a の土地供給量が L 、土地需要量が $N_a^d y_a^d$ で与えられるため、需給均衡条件より、 $y_a^d = L/N_a^d$ が得られる。なお、 N_a^d は以下で与えられる：

$$N_a^d = \sum_{i \in \mathcal{I}} n_{a,i}^d. \quad (6)$$

² $x_{a,i}^d$ は、都市 d の企業 i の労働者が通勤する時間帯（以降、時間帯 i ）の交通量を捉えることができる。なお、ボトルネック渋滞を考慮したモデルを分析した研究（e.g., Takayama¹⁶⁾）で示されているように、First in First Work が成立する状況では、同様の解析が可能である。

以上の関係より、間接効用関数 $v_{a,i}^d$ を以下の通り表す：

$$v_{a,i}^d = w_i^d - \sum_{b=1}^a c(x_{b,i}^d) + h(N_a^d). \quad (7)$$

ここで、 $h(N_a^d) = f(y_a^d) - r_a^d y_a^d = f(\frac{L}{N_a^d}) - \frac{L}{N_a^d} f'(\frac{L}{N_a^d})$ である。この $h(N_a^d)$ は、 $f(y_a^d) - r_a^d y_a^d$ と表されるため、住宅消費により得られる効用増分を示している。また、

$$h'(N_a^d) = \frac{L^2 f''(\frac{L}{N_a^d})}{N_a^{d^3}} < 0. \quad (8)$$

より、 $h(N_a^d)$ は N_a^d の単調減少関数であることがわかる。

b) 企業の生産行動

企業は全て CBD に立地しており、完全競争下で一単位の労働を投入すれば財を生産すると仮定する。この財の生産に関して、本研究では、Henderson²⁾、Arnott et al.²⁰⁾ と同様の生産性効果を導入する。すなわち、ある企業のある時点での生産性は、すでに始業している企業の総労働者数が多ければ多いほど、高まると仮定する。この生産性効果を示すために、企業のある時刻 t での“瞬間的”生産関数 $g(t)$ を次のように定義する：

ある企業の時刻 t での瞬間的生産高 $g(t)$ は、その時刻までに始業している企業の総労働者数 $N(t)$ の増加関数で与えられる：

$$g(t) = \alpha N(t). \quad (9)$$

ここで、 α は、生産性効果の大きさを表すパラメータである ($\alpha > 0$)。各企業の労働時間が一定値 H であり、 t_i に始業する企業の一日の生産高 G_i は、始業時刻 t_i から終業時刻 $t_i + H$ まで、瞬間的生産関数 $g(t)$ を積分したものととなる：

$$G_i^d = \int_{t_i}^{t_i+H} g^d(t) dt = \alpha \int_{t_i}^{t_i+H} N^d(t) dt. \quad (10)$$

ここで、都市 d の t_i に始業する企業の総労働者数 M_i^d は以下で与えられる：

$$M_i^d = \sum_{a \in \mathcal{A}^d} n_{a,i}^d. \quad (11)$$

次に、 $t_i = t_{i-1} + \tau$ であるため、 $N(t)$ は次ように与えられる。図-2 は時刻別の労働者数を示すものである。

$$N^d(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^i M_j^d & \text{if } t \in [t_i, t_{i+1}), \\ N^d & \text{if } t \in [t_T, t_1 + H), \\ \sum_{j=(i+1)}^T M_j^d & \text{if } t \in [t_i + H, t_{i+1} + H). \end{cases} \quad (12)$$

各企業の労働投入量は固定的に一単位であると仮定し、都市 d の始業時刻が t_i の総企業数を M_i^d 、時刻 t が労働時間に含まれる総企業数を $N^d(t)$ と表す。この関係より、空間集積の経済性を無視した都市 d の始業時刻が t_i の企業の一日の生産高 g_i^d が始業時刻分布 $\mathbf{M} =$

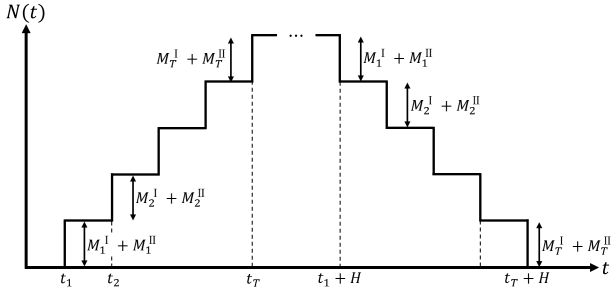


図-2: 時刻別の労働者数

$(M_i^d)_{d \in \mathcal{D}, i \in \mathcal{I}}$ (人口・始業時刻分布 \mathbf{n}) の関数で次のように与えられる:

$$g_i^d(\mathbf{M}) = \alpha \sum_{j \in \mathcal{I}} \phi^{|i-j|} M_j^d. \quad (13)$$

ここで, $\phi \in [0, 1]$ は始業時刻集中による生産性向上効果 (異なる企業の業務スケジュールの同期の必要性) の強さを表し, ϕ が大きいほど時間集積による生産性向上効果が低いと示される.

また, 式 (13) に基づき, 空間集積の経済性を考慮し, t_i に始業する企業がどちらの都市に立地しているかを表すパラメータ ψ_{dc} を追加する. 企業は同一都市に立地する場合, $\psi_{dc} = 1$. 異なる都市に立地する場合, $\psi_{dc} = \psi \in [0, 1]$. ここで, ψ は都市間人口の空間集中による生産性向上効果 (異なる企業立地の集積必要性) の強さを表し, ψ が大きいほど, 都市間空間集積による生産性向上効果が低いと示される. したがって, 空間集積の経済性を考慮する企業の一日生産高 G_i^d を以下の通り表す:

$$G_i^d(\mathbf{M}) = \sum_{c \in \mathcal{D}} \psi_{dc} g_i^c(\mathbf{M}), \quad (14a)$$

$$\psi_{dc} = \begin{cases} 1 & \text{if } d = c, \\ \psi \in [0, 1] & \text{if } d \neq c. \end{cases} \quad (14b)$$

すると, 式 (13) を式 (14a) に代入し, $G_i^d(\mathbf{M})$ を以下のように表す.

$$G_i^d(\mathbf{M}) = \alpha \sum_{c \in \mathcal{D}} \sum_{j \in \mathcal{I}} \psi_{dc} \phi^{|i-j|} M_j^c. \quad (15)$$

以上の生産関数の下では, 都市 d に立地している各企業の利潤 π_i^d は以下で与えられる:

$$\pi_i^d = G_i^d(\mathbf{M}) - w_i^d. \quad (16)$$

(3) 均衡条件の定式化

本モデルにおいて, 企業は都市・始業時刻, 労働者は都市・居住地・労働を供給する企業を選択する. その結果, 均衡状態における人口・始業時刻分布 \mathbf{n}^* が決まる. 本節では, この均衡状態が満たす均衡条件を定式化する.

次の 3 条件は, 均衡状態が満たす均衡条件である:

$$\begin{cases} v^* = w_i^d - \sum_{b=1}^a c(x_{b,i}^d) + h(N_a^d) & \text{if } n_{a,i}^d > 0, \\ v^* \geq w_i^d - \sum_{b=1}^a c(x_{b,i}^d) + h(N_a^d) & \text{if } n_{a,i}^d = 0, \end{cases} \quad (17a)$$

$$\begin{cases} \pi^* = G_i^d(\mathbf{M}) - w_i^d & \text{if } \sum_{a \in \mathcal{A}^d} n_{a,i}^d > 0, \\ \pi^* \geq G_i^d(\mathbf{M}) - w_i^d & \text{if } \sum_{a \in \mathcal{A}^d} n_{a,i}^d = 0, \end{cases} \quad (17b)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{D}} \sum_{a \in \mathcal{A}^k} \sum_{i \in \mathcal{I}} n_{a,i}^k = N. \quad (17c)$$

ここで, v^* は労働者の均衡効用, π^* は企業均衡利潤である.

均衡条件 (17a), (17b) にそれぞれ労働者・企業の始業時刻選択均衡条件を表す. 具体的には, 条件 (17a) は, 均衡状態では, 単一の労働者が選択を変更するとしても, 自らの効用を改善できないことを示している. 条件 (17b) は, 労働者が企業 i に雇用されている場合, その企業 i の均衡利潤は π^* であり, そうでなければ企業 i の利潤は π^* より低下すると表す.

本モデルでは, 企業の参入・退出が自由であると仮定するため, $\pi^* = 0$ となる. したがって, 均衡条件 (17) を以下の条件で表す:

$$\begin{cases} v^* = v_{a,i}^d(\mathbf{n}) & \text{if } n_{a,i}^d > 0, \\ v^* \geq v_{a,i}^d(\mathbf{n}) & \text{if } n_{a,i}^d = 0, \end{cases} \quad (18a)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{D}} \sum_{a \in \mathcal{A}^k} \sum_{i \in \mathcal{I}} n_{a,i}^k = N. \quad (18b)$$

ここで, $v_{a,i}^d(\mathbf{n})$ は都市 d の居住地 a に居住する始業時刻が t_i の企業の労働者の効用水準を表す:

$$v_{a,i}^d(\mathbf{n}) = G_i^d(\mathbf{M}) - \sum_{b=1}^a c(x_{b,i}^d) + h(N_a^d). \quad (19)$$

3. 均衡状態の特性分析

本章では, 前述したモデルの均衡状態の特性を調べる. 具体的には, まず構築したモデルにポテンシャル関数が存在することを表したうえで, その性質を用い, 均衡状態の一意性・安定性を分析する. 次に, 均衡条件を用い, 均衡状態における居住地・始業時刻別の労働者分布の特性を明らかにする.

(1) ポテンシャルゲーム

本節では, 均衡状態の特性を分析するために, 均衡状態における人口・始業時刻分布 \mathbf{n} が (プレイヤーが労働者の) ポテンシャルゲームの Nash 均衡状態とみなすことができることを示す必要がある. 本モデルの均衡状態は, 均衡条件 (18) より, プレイヤーの集合が $S \equiv [0, N]$, 戦略集合が $\mathcal{I} \times (\mathcal{A}^d \times \mathcal{D})$ 及び利得関数が

$\mathbf{v}(\mathbf{n}) = (v_{a,i}^d(\mathbf{n}))_{d \in \mathcal{D}, a \in \mathcal{A}^d, i \in \mathcal{I}}$ の population game の Nash 均衡状態と一致する。以降では、このゲームをゲーム $S = \{\mathcal{S}, \mathcal{I} \times (\mathcal{A}^d \times \mathcal{D}), \mathbf{v}\}$ と表記する。

このゲーム S は、Sandholm²¹⁾ により、任意の

$$\mathbf{n} \in \Delta \equiv \left\{ \mathbf{n} \left| \sum_{k \in \mathcal{D}} \sum_{a \in \mathcal{A}^k} \sum_{i \in \mathcal{I}} n_{a,i}^k = N, n_{a,i}^d \geq 0 \right. \right. \\ \left. \left. \forall d \in \mathcal{D}, a \in \mathcal{A}^d, i \in \mathcal{I} \right\}$$

に対し、次の条件を満たすポテンシャル関数 $P(\mathbf{N})$ が存在すれば、ポテンシャルゲームである：

$$\frac{\partial P(\mathbf{n})}{\partial n_{a,i}^d} = v_{a,i}^d(\mathbf{n}) \quad \forall d \in \mathcal{D}, a \in \mathcal{A}^d, i \in \mathcal{I}. \quad (20)$$

この条件は、Sandholm²¹⁾ により、“externality symmetry” と呼ばれる次の条件と等価であることが示されている：

$$\frac{\partial v_{a,i}^d(\mathbf{n})}{\partial n_{b,j}^c} = \frac{\partial v_{b,j}^c(\mathbf{n})}{\partial n_{a,i}^d} \\ \forall \{d, c\} \in \mathcal{D}, \{a, b\} \in \mathcal{A}^{\{d,c\}}, \{i, j\} \in \mathcal{I} \text{ and } \mathbf{n} \in \Delta. \quad (21)$$

本モデルの $\frac{\partial v_{a,i}^d(\mathbf{n})}{\partial n_{b,j}^c}$ は、式 (19) より、以下のように表される：

$$\frac{\partial v_{a,i}^I(\mathbf{n})}{\partial n_{b,j}^I} = \alpha \phi^{|i-j|} - \sum_{q=1}^{\min\{a,b\}} \frac{\partial c(x_{q,i}^I)}{\partial x_{q,j}^I} + h'(N_a^I) \frac{\partial N_a^I}{\partial n_{b,j}^I}, \quad (22a)$$

$$\frac{\partial v_{a,i}^{II}(\mathbf{n})}{\partial n_{b,j}^{II}} = \alpha \phi^{|i-j|} - \sum_{q=1}^{\min\{a,b\}} \frac{\partial c(x_{q,i}^{II})}{\partial x_{q,j}^{II}} + h'(N_a^{II}) \frac{\partial N_a^{II}}{\partial n_{b,j}^{II}}, \quad (22b)$$

$$\frac{\partial v_{a,i}^I(\mathbf{n})}{\partial n_{b,j}^{II}} = \alpha \psi \phi^{|i-j|}, \quad (22c)$$

$$\frac{\partial v_{a,i}^{II}(\mathbf{n})}{\partial n_{b,j}^I} = \alpha \psi \phi^{|i-j|}. \quad (22d)$$

したがって、ゲーム S は条件 (21) を満たすことにより、次の命題が得られる。

命題 1 ゲーム S は次のポテンシャル関数 $P(\mathbf{n})$ を持つポテンシャルゲームである：

$$P(\mathbf{n}) = P_1(\mathbf{n}) - P_2(\mathbf{n}) - P_3(\mathbf{n}). \quad (23)$$

ここで、 $P_1(\mathbf{n}), P_2(\mathbf{n}), P_3(\mathbf{n})$ はそれぞれ生産性効果、通勤混雑、土地消費に与える影響を表す凸関数であり、次の関係を満たす：

$$P_1(\mathbf{n}) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{D}} \sum_{i \in \mathcal{I}} M_i^k G_i^k(\mathbf{n}), \quad (24a)$$

$$\frac{\partial P_2(\mathbf{n})}{\partial n_{a,i}^d} = \sum_{b=1}^a c(x_{b,i}^d), \quad (24b)$$

$$P_3(\mathbf{n}) = - \sum_{k \in \mathcal{D}} \sum_{a \in \mathcal{A}^k} N_a^k f\left(\frac{L}{N_a^k}\right). \quad (24c)$$

証明 付録 I 参照。

ゲーム S がポテンシャルゲームであるため、その均衡状態は、次の最適化問題の Karush-Kuhn-Tucker(KKT) 条件を満足する \mathbf{n}^* の集合と一致する：

$$\max_{\mathbf{n}} P(\mathbf{n}) = P_1(\mathbf{n}) - P_2(\mathbf{n}) - P_3(\mathbf{n}) \quad (25a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{n} \in \Delta. \quad (25b)$$

この事実は、上記の問題の KKT 条件が、均衡条件 (18) と完全に一致することより容易に確認できる。

(2) 均衡状態の一意性と安定性

均衡状態の一意性は、式 (25) より、ポテンシャル関数 $P(\mathbf{n})$ の形状により確認できる。具体的には、 $P(\mathbf{n})$ が単峰であればゲーム S の均衡状態は一意である。 $P(\mathbf{n})$ が単峰でなければ、ゲーム S の均衡状態は必ずしも一意ではない。この性質と $P_1(\mathbf{n}), P_2(\mathbf{n}), P_3(\mathbf{n})$ の凸性より、次の命題が得られる：

命題 2 ゲーム S の均衡状態は、必ずしも一意ではない。

証明 $P_1(\mathbf{n})$ が凸関数であるため、 $P(\mathbf{n})$ は必ずしも凹関数ではなく、凸関数になる可能性もある。そのため、 $P(\mathbf{n})$ は必ずしも単峰と言えない。

命題 2 より、均衡状態が複数存在可能であることが示された。したがって、均衡選択のため、ゲーム S の均衡状態の局所的な漸進安定性を分析する必要がある。まず、ここで \mathbf{n} の変化速度を表す均衡状態への調整ダイナミクス $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{V}(\mathbf{n})$ を定義する。本研究では、このダイナミクスとして、次の 2 条件を満たす admissible dynamics を考える：

(PC) $\mathbf{V}(\mathbf{n}) \neq 0$ の時は常に、

$$\mathbf{V}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{n}) = \sum_{k \in \mathcal{D}} \sum_{a \in \mathcal{A}^k} V_{a,i}^k(\mathbf{n}) v_{a,i}^k(\mathbf{n}) > 0. \quad (26)$$

(NS) $\mathbf{V}(\mathbf{n}) = 0$ であれば、 \mathbf{n} はゲーム S の均衡状態。

条件 (PC) は positive correlation と呼ばれ、調整ダイナミクスと利得 (効用) 関数が正の相関を持つことを要求している。また、条件 (NS) は Nash stationarity と呼ばれ、調整ダイナミクスの定常状態がゲーム S の Nash 均衡状態と一致することを要求している。なお、この admissible dynamics は、best response dynamic, Brown-von Neumann-Nash dynamic, projection dynamic を特殊ケースとして含んでいる。

ポテンシャルゲーム S の均衡状態 \mathbf{n}^* の安定性は、Sandholm²¹⁾ により、次の特性を持つ：

ポテンシャルゲーム S において、ポテンシャル関数 $P(\mathbf{n})$ を局所的に最大化する均衡状態 \mathbf{n}^* は、admissible dynamics の下で (局所的に) 安定である。それ以外の均衡状態 \mathbf{n}^u は、不安定である。

したがって、ポテンシャルゲーム S の均衡状態の安定性確認は、ポテンシャル関数の形状のみからであることがわかる。

式 (25) で与えられるポテンシャル関数 $P(\mathbf{n})$ の形状は、 $P_1(\mathbf{n})$ (生産性効果による時間集積の経済)、 $P_2(\mathbf{n})$ (交通混雑による時間集積の不経済)、 $P_3(\mathbf{n})$ (土地消費による空間集積の不経済) によって決まる。すなわち、安定均衡状態が、本モデルに含まれる時間集積の経済・不経済、空間集積の不経済のバランスに応じて決まる。実際、第 1 項 $P_1(\mathbf{n})$ が卓越し、ポテンシャル関数 P が凸となる場合、始業時刻が集中した状態が安定均衡状態となる。また、第 2, 3 項 $P_2(\mathbf{n}), P_3(\mathbf{n})$ が卓越し、 P が凹となる場合、人口・始業時刻分布が分散した状態が唯一の均衡状態となる。

ポテンシャル関数の性質より、状態 \mathbf{n}^0 を初期状態とした場合に達する安定均衡状態は、初期状態 \mathbf{n}^0 からポテンシャル関数の局所最大状態 \mathbf{n}^* を探索することにより得られる。すなわち、局所的に簡単な最適化問題を解けば、容易に安定均衡状態が得られることがわかる。そこで、第 5 章では、その性質を用いた上で、数値解析を実施する。

(3) 均衡状態における都市内人口・始業時刻分布

これまで、均衡解の一意性と安定性について議論してきた。本節では、均衡状態における都市内人口・始業時刻分布の特性を分析する。式 (19) より、居住地 a ・企業 i の労働者の効用関数を以下のように与えられる：

$$v_{a,i}^d(\mathbf{n}) = v_{a-1,i}^d(\mathbf{n}) - c(x_{a,i}^d) + h(N_a^d) - h(N_{a-1}^d). \quad (27)$$

したがって、均衡状態 \mathbf{n}^* の台 $\text{supp}(\mathbf{n}^*) = \{(a, i)^d | n_{a,i}^* > 0, d \in \mathcal{D}, a \in \mathcal{A}^d, i \in \mathcal{I}\}$ を用い、次の関係が得られる：

$$v_{a,i}^d(\mathbf{n}^*) \begin{cases} = v^* - c(x_{a,i}^*) + h(N_a^*) - h(N_{a-1}^*) \\ \quad \text{if } (a-1, i)^d \in \text{supp}(\mathbf{n}^*), \\ \leq v^* - c(x_{a,i}^*) + h(N_a^*) - h(N_{a-1}^*) \\ \quad \text{if } (a-1, i)^d \notin \text{supp}(\mathbf{n}^*). \end{cases} \quad (28)$$

ここで、均衡状態における各変数は上付き添え字 $*$ で表す。この関係を用い、命題 3 が得られる：

命題 3 均衡状態 \mathbf{n}^* は次の性質を持つ：

- (a) $N_a^* > 0$ かつ $\forall (a-1, i)^d, (a-1, j)^d \in \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ であれば、 $\forall (a, i)^d, (a, j)^d \in \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ かつ $x_{a,i}^* > x_{a,j}^* > 0$ が成立する。
- (b) $N_a^* > 0$ かつ $\forall (a-1, i)^d \notin \text{supp}(\mathbf{n}^*)$, $\forall (a-1, j)^d \in \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ であれば、 $n_{a,i}^* \leq n_{a,j}^*$ かつ $x_{a,i}^* \leq x_{a,j}^*$ が成立する。

証明 付録 II 参照。

この命題は、均衡状態における都市内人口・始業時刻分布が次の性質を持つことを示している：

- CBD の近くに居住する労働者ほど、始業時刻の分布幅が狭い。すなわち、以下の関係が成立する：

$$\text{supp}((n_{a-1,i}^*)_{i \in \mathcal{I}}) \subseteq \text{supp}((n_{a,i}^*)_{i \in \mathcal{I}}). \quad (29)$$
- CBD から遠い郊外部に居住する労働者ほど始業時刻の時差が大きい。

$(a, i)^d, (a-1, i)^d \in \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ であれば、 $v_{a,i}^d(\mathbf{n}^*) = v_{a-1,i}^d(\mathbf{n}^*)$ となる。この条件から以下の関係が得られる：

$$h(N_a^*) - h(N_{a-1}^*) = c(x_{a,i}^*) > 0. \quad (30)$$

したがって、次の命題が得られる：

命題 4 均衡状態において $N_a^* > 0$ かつ $N_{a-1}^* > 0$ であれば、 $N_a^* < N_{a-1}^*$ となる。すなわち、居住地は CBD から遠ければ遠いほど人口が減少する。

(4) 均衡状態での 1 都市への人口集中が起こる条件

条件 (18a), (18b) より、以下の関係が与えられる：

$$\begin{cases} v^* \geq v_{a,i}^d(\mathbf{n}) \\ w_i^d \geq G_i^d(\mathbf{M}) \end{cases} \quad \text{if } n_{a,i}^d = 0. \quad (31)$$

また、式 (7) を式 (31) に代入し、次の関係が得られる：

$$\begin{aligned} v^* &\geq G_i^{\text{II}}(\mathbf{M}) - \sum_{b=1}^a c(x_{a,i}^{\text{II}}) + h(N_a^{\text{II}}), \\ G_i^{\text{I}}(\mathbf{M}) - \sum_{b=1}^a c(x_{b,i}^{\text{I}}) + h(N_a^{\text{I}}) &\geq G_i^{\text{II}}(\mathbf{M}) - \sum_{b=1}^a c(x_{a,i}^{\text{II}}) + h(N_a^{\text{II}}). \end{aligned} \quad (32)$$

さらに、 $v_{a,i}^{\text{I}}$ を最大にするため、 $i = i^*$ ($i^* \equiv \text{argmax}_i G_i^{\text{I}}$), $a = 1$ と容易にわかる。したがって、 v^* と $\max_{a,i} v_{a,i}^{\text{II}}$ が次の式で与えられる：

$$\begin{aligned} v^* &= \max_{a,i} v_{a,i}^{\text{I}} \\ &= v_{1,i^*}^{\text{I}} \\ &= G_{i^*}^{\text{I}}(\mathbf{M}) - c(x_{1,i^*}^{\text{I}}) + h(N_1^{\text{I}}), \end{aligned} \quad (33a)$$

$$\begin{aligned} \max_{a,i} v_{a,i}^{\text{II}} &= \max_i \left\{ G_i^{\text{II}}(\mathbf{M}) - \sum_{b=1}^a c(x_{a,i}^{\text{II}}) + h(N_a^{\text{II}}) \right\} \\ &= G_{i^*}^{\text{II}}(\mathbf{M}) - c^* + h^* \end{aligned}$$

$$= \psi G_{i^*}^I(\mathbf{M}) - c^* + h^*. \quad (33b)$$

本節では、均衡状態での 1 都市への人口集中が起こる (i.e., $N^I = N$, $N^II = 0$) 条件を求めため、 $v^* \geq \max_{a,i} v_{a,i}^{II}$ がわかる。したがって、

$$v^* \geq \max_{a,i} v_{a,i}^{II}$$

$$G_{i^*}^I(\mathbf{M}) - c(x_{1,i^*}^I) + h(N_1^I) \geq \psi G_{i^*}^I(\mathbf{M}) - c^* + h^* \\ G_{i^*}^I(\mathbf{M}) \geq \frac{c(x_{1,i^*}^I) - h(N_1^I) - c^* + h^*}{1 - \psi}. \quad (34)$$

この関係から、 ψ が大きいほど、均衡状態下の企業の一日生産高 $G_{i^*}^I(\mathbf{M})$ が増加することが分かる。すなわち、企業が空間的分散するほど、企業の生産性が高まることができる。

式 (15) を式 (33b) に代入し、 ψ と ϕ の関係式が与えられる：

$$\alpha \sum_{j \in I} \phi^{|i^*-j|} M_j^I \geq \frac{1}{1 - \psi} [c(x_{1,i^*}^I) - h(N_1^I) - c^* + h^*] \\ \psi \leq 1 - \frac{c(x_{1,i^*}^I) - h(N_1^I) - c^* + h^*}{\alpha \sum_{j \in I} \phi^{|i^*-j|} M_j^I}. \quad (35)$$

この関係から、時間的分散力 ϕ と空間的分散力 ψ が正の相関を持つことが分かる。したがって、次の命題が得られる：

命題 5 均衡状態においては、都市間の空間的な相互作用が困難 (ψ が低い)、時間的な相互作用が容易 (ϕ が高い) ほど、1 都市への人口集中が生じる。

この命題は、都市間人口の空間集中による生産性向上効果が高ければ、始業時刻が異なる企業でも、相互作用が容易である (i.e., 始業時刻が分散しても生産性が下がりにくい) ことを示している。つまり、時間集積の経済が、経済活動の空間分布にも影響を与えると示される。

4. 政策分析

本研究で構築したモデルの均衡状態は、外部性 (時間集積の経済・不経済、空間集積の経済・不経済) の存在により、一般には効率的とは言いきれない。そこで、本章では、社会厚生関数を定義した上で、効率的な状態を実現するための政策とその効果を検証する。

(1) 社会厚生関数の定義

社会厚生関数は、生産者余剰と消費者余剰の和であると定義する。そのため、社会厚生最大化問題は以下の通り表現することができる：

$$\max_{\mathbf{n}} W(\mathbf{n}) = W_1(\mathbf{n}) - W_2(\mathbf{n}) - W_3(\mathbf{n}) \quad (36a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{n} \in \Delta. \quad (36b)$$

ここで、 $W_1(\mathbf{n})$, $W_2(\mathbf{n})$, $W_3(\mathbf{n})$ は次のように与えられる。それぞれ、生産性効果、交通混雑、土地消費がもたらす影響を項である：

$$W_1(\mathbf{n}) = \sum_{k \in \mathcal{D}} \sum_{i \in \mathcal{I}} M_i^k G_i^k(\mathbf{N}) = 2P_1(\mathbf{n}), \quad (37a)$$

$$W_2(\mathbf{n}) = \sum_{k \in \mathcal{D}} \sum_{a \in \mathcal{A}^k} \sum_{i \in \mathcal{I}} x_{a,i}^k c_{a,i}^k(x_{a,i}^k), \quad (37b)$$

$$W_3(\mathbf{n}) = - \sum_{k \in \mathcal{D}} \sum_{a \in \mathcal{A}^k} N_a^k f\left(\frac{L}{N_a^k}\right) = P_3(\mathbf{n}). \quad (37c)$$

この社会厚生関数 $W(\mathbf{n})$ は、 $W_1(\mathbf{n}) = 2P_1(\mathbf{n})$ が凸関数であるため、複数の極大点が存在する可能性がある。すなわち、 $W(\mathbf{n})$ を大域的に最大化する社会的最適状態 \mathbf{n}^{so} 以外にも、 $W(\mathbf{n})$ を局所的に最大化する局所最適状態 \mathbf{n}^o が存在する可能性がある。本研究では、大域的最適化を扱うことが一般には困難であることから、局所最適状態 \mathbf{n}^o を達するための政策に注目する。

(2) 局所最適状態における都市内人口・始業時刻分布

局所最適状態 \mathbf{n}^o は、社会厚生関数 $W(\mathbf{n})$ の局所最大化点であることから、以下に表す最適化問題 (36) の KKT 条件を満たす：

$$\begin{cases} \hat{v}^* = \hat{v}_{a,i}^d(\mathbf{n}^o) & \text{if } n_{a,i}^{do} > 0, \\ \hat{v}^* \geq \hat{v}_{a,i}^d(\mathbf{n}^o) & \text{if } n_{a,i}^{do} = 0, \end{cases} \quad (38a)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{D}} \sum_{a \in \mathcal{A}^k} \sum_{i \in \mathcal{I}} n_{a,i}^{ko} = N. \quad (38b)$$

次に、 $\hat{v}_{a,i}^d(\mathbf{n})$ は以下で得られる：

$$\hat{v}_{a,i}^d(\mathbf{n}) = v_{a,i}^d(\mathbf{n}) + G_i^d(\mathbf{M}) - \sum_{k \in \mathcal{D}} \sum_{b=1}^a c'(x_{b,i}^k) x_{b,i}^k. \quad (39)$$

ここで、局所最適状態における各変数は上付き添え字 o で表す。

この KKT 条件を用い、3.3 節と同じ手順の解析により、次の命題が得られる：

命題 6 局所最適状態 \mathbf{n}^o は次の関係を満たす：

- (a) $N_a^{do} > 0$ かつ $\forall (a-1, i)^d, (a-1, j)^d \in \text{supp}(\mathbf{n}^o)$ であれば、 $\forall (a, i)^d, (a, j)^d \in \text{supp}(\mathbf{n}^o)$ かつ $x_{a,i}^o = x_{a,j}^o > 0$ が成立する。さらに、 $N_a^{do} > 0$ かつ $\forall (a-1, i)^d \notin \text{supp}(\mathbf{n}^o), \forall (a-1, j)^d \in \text{supp}(\mathbf{n}^o)$ であれば、 $n_{a,i}^o \leq n_{a,j}^o$ かつ $x_{a,i}^o \leq x_{a,j}^o$ が成立する。
- (b) $N_a^{do} > 0$ かつ $N_{a-1}^{do} > 0$ であれば、 $N_a^{do} < N_{a-1}^{do}$ となる。

この命題により、局所最適状態の都市内人口・始業時刻分布の特徴は、均衡状態と一致することがわかる。すなわち、以下の 3 点の性質を満たす：

- CBD の近くに居住する労働者ほど、始業時刻分布幅が集中する。
- 時差出勤する労働者は、CBD から遠い郊外部に居住する。
- CBD から遠い居住地ほど人口が少ない。

また、居住地 a ・企業 i の労働者に対し、人口・始業時刻分布 \mathbf{n} に応じた課金/補助金を以下のように表す：

$$p_{a,i}^d(\mathbf{n}) = G_i^d(\mathbf{M}) - \sum_{b=1}^a c'(x_{b,i}^d) x_{b,i}^d. \quad (40)$$

局所最適状態は、この課金/補助金を導入した状況下の局所安定均衡状態と一致する。この点は、効用関数 $\hat{v}_{a,i}^d(\mathbf{n}) = v_{a,i}^d(\mathbf{n}) + p_{a,i}^d(\mathbf{n})$ で与えられた時、そのポテンシャル関数が社会厚生関数 $W(\mathbf{n})$ となることから容易に確認できる。

(3) 都市内における政策導入の影響分析

本節では、都市内の人口・始業時刻分布 \mathbf{n} に応じた課金/補助金政策 $p_{a,i}^d(\mathbf{n})$ を実施することの影響を検証する。具体的には、均衡状態 \mathbf{n}^* を初期状態とする場合、以下の 2 点の通り、政策の導入が人口分布・始業時刻分布に与える影響を分析する。

1. 人口分布に与える影響

$\forall(a, i)^d, (a-1, i)^d \in \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ の場合、

$$\hat{v}_{a,i}^d(\mathbf{n}) - \hat{v}_{a-1,i}^d(\mathbf{n}) = -c'(x_{a,i}^*) x_{a,i}^* < 0. \quad (41)$$

が成立する。すなわち、 $\hat{v}_{a,i}^d(\mathbf{n}^*) < \hat{v}_{a-1,i}^d(\mathbf{n}^*)$ となることがわかる。

2. 始業時刻分布に与える影響

ここで、 $\forall(a, i)^d, (a, i+1)^d \in \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ となる $\forall(a, i)^d, (a, i+1)^d$ に焦点に当てる。この際に、 $\hat{v}_{a,i}^d(\mathbf{n}^*) = \hat{v}_{a,i+1}^d(\mathbf{n}^*)$ を満たすため、

$$\begin{aligned} \hat{v}_{a,i}^d(\mathbf{n}^*) - \hat{v}_{a,i+1}^d(\mathbf{n}^*) &= \sum_{b=1}^a \{c_{b,i}^d(x_{b,i}^*) - c'(x_{b,i}^*) x_{b,i}^*\} \\ &\quad - \{c_{b,i+1}^d(x_{b,i+1}^*) \\ &\quad \quad - c'(x_{b,i+1}^*) x_{b,i+1}^*\}. \end{aligned} \quad (42)$$

が成立する。さらに、

$$\frac{\partial\{c(x) - c'(x)x\}}{\partial x} = -c''(x)x < 0. \quad (43)$$

より、 $M_i^{d*} > M_{i+1}^{d*}$ であれば、 $\hat{v}_{a,i}^d(\mathbf{n}^*) < \hat{v}_{a,i+1}^d(\mathbf{n}^*)$ となる。これは、命題 3 より、均衡状態において $M_i^{d*} > M_{i+1}^{d*}$ であれば、次の 2 条件が成立するためである：

$$\begin{cases} x_{a,i}^* \geq x_{a,i+1}^* & \forall a \in \mathcal{A}^d, \\ \text{there exists } a \in \mathcal{A}^d \text{ such that } x_{a,i}^* \geq x_{a,i+1}^*. \end{cases} \quad (44)$$

命題 7 均衡状態 \mathbf{n}^* において、政策 (40) を導入する状況を考慮する。この時、次の条件が成立する：

- (a) $\forall(a, i)^d, (a-1, i)^d \in \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ に対して、 $\hat{v}_{a,i}^d(\mathbf{n}^*) < \hat{v}_{a-1,i}^d(\mathbf{n}^*)$ が成立する。
- (b) $M_i^{d*} > M_{i+1}^{d*}$ であれば、任意の $(a, i)^d, (a, i+1)^d \in \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ に対して、 $\hat{v}_{a,i}^d(\mathbf{n}^*) < \hat{v}_{a,i+1}^d(\mathbf{n}^*)$ が成立する。

命題 7 (a) は、均衡状態 \mathbf{n}^* を初期状態としたとき、課金/補助金政策 $p_{a,i}^d(\mathbf{n})$ の導入が CBD 付近の人口分布に増加効果をもたらすことを示している。一方、命題 7 (b) は、課金/補助金政策 $p_{a,i}^d(\mathbf{n})$ の導入が居住地毎の労働者の始業時刻分布を分散化させることを示している。

ここで注意が必要なのは、始業時刻 (\mathbf{M}) の分布そのものが分散化するとは限らない点である。なぜなら、居住地毎の始業時刻が分散する (命題 7 (b)) 一方で、(始業時刻が他の居住地より集中する) CBD 付近の人口が増加する (命題 7 (a)) ためである。実際、第 5 章の図-7 (c) では、局所最適状態での始業時刻分布 (\mathbf{M}^o) が安定均衡状態の始業時刻分布 (\mathbf{M}^*) より集中することが確認される。

(4) 政策導入後の 1 都市への人口集中が起こる条件

$$\begin{aligned} \hat{v}^* &\geq 2G_i^{\text{II}}(\mathbf{M}) - \sum_{b=1}^a [c(x_{b,i}^{\text{II}}) + x_{b,i}^{\text{II}} c'(x_{b,i}^{\text{II}})] + h(N_a^{\text{II}}) \\ &2G_i^{\text{I}}(\mathbf{M}) - \sum_{b=1}^a [c(x_{b,i}^{\text{I}}) + x_{b,i}^{\text{I}} c'(x_{b,i}^{\text{I}})] + h(N_a^{\text{I}}) \\ &\geq 2G_i^{\text{II}}(\mathbf{M}) - \sum_{b=1}^a [c(x_{b,i}^{\text{II}}) + x_{b,i}^{\text{II}} c'(x_{b,i}^{\text{II}})] + h(N_a^{\text{II}}). \end{aligned} \quad (45)$$

さらに、 $\hat{v}_{a,i}^{\text{I}}$ を最大にするため、 $i = i^*$ ($i^* \equiv \text{argmax}_i G_i^{\text{I}}$)、 $a = 1$ と容易にわかる。したがって、 \hat{v}^* と $\max_{a,i} \hat{v}_{a,i}^{\text{II}}$ が式 (33) で与えられる：

$$\begin{aligned} \hat{v}^* &= \max_{a,i} \hat{v}_{a,i}^{\text{I}} \\ &= \hat{v}_{1,i^*}^{\text{I}} \\ &= 2G_{i^*}^{\text{I}}(\mathbf{M}) - [c(x_{1,i^*}^{\text{I}}) + x_{1,i^*}^{\text{I}} c'(x_{1,i^*}^{\text{I}})] + h(N_1^{\text{I}}), \end{aligned} \quad (46a)$$

$$\begin{aligned} \max_{a,i} \hat{v}_{a,i}^{\text{II}} &= \max_i \left\{ 2G_i^{\text{II}}(\mathbf{M}) - \sum_{b=1}^a [c(x_{b,i}^{\text{II}}) \right. \\ &\quad \left. + x_{b,i}^{\text{II}} c'(x_{b,i}^{\text{II}})] + h(N_a^{\text{II}}) \right\} \\ &= 2G_{i^*}^{\text{II}}(\mathbf{M}) - c^* + h^* \\ &= 2\psi G_{i^*}^{\text{I}}(\mathbf{M}) - c^* + h^*. \end{aligned} \quad (46b)$$

本節では、局所最適状態での 1 都市への人口集中が起

こる (i.e., $N^I = N, N^II = 0$) 条件を求めるため, $\hat{v}^* \geq \max_{a,i} \hat{v}_{a,i}^II$ がわかる. したがって,

$$G_{i^*}^I(\mathbf{M}) \geq \frac{c(x_{1,i^*}^I) + x_{1,i^*}^I c'(x_{1,i^*}^I) - h(N_1^I) - c^* + h^*}{2(1-\psi)}. \quad (47)$$

この関係から, 政策導入後, 安定均衡状態と同様, ψ が大きいほど, 均衡状態下の企業の一日生産高 $G_{i^*}^I(\mathbf{M})$ が高まること分かる.

式 (15) を式 (47) に代入し, τ と ψ の関係式が与えられる:

$$\psi \leq 1 - \frac{c(x_{1,i^*}^I) + x_{1,i^*}^I c'(x_{1,i^*}^I) - h(N_1^I) - c^* + h^*}{2\alpha \sum_{j \in \mathcal{I}} \phi^{i^*-j} M_j^I}. \quad (48)$$

命題 8 局所最適状態においては, 都市間の空間的な相互作用が困難 (ψ が低い), 時間的な相互作用が容易 (ϕ が高い) ほど, 1 都市への人口集中が生じる.

この命題により, 局所最適状態の時空間集積の特徴は, 均衡状態と一致することが分かる. すなわち, 時間集積による生産性向上効果の低下は, 都市内混雑の緩和をもたらす, 一方の都市への人口集中を生じさせる.

5. 数値解析

本章では, 数値解析により前章までの解析結果の特徴を具体的に検証する. ここで, 居住地数を $A^I = A^II = 10$, 始業時刻数を $I = 10$ に設定し, $f(x), c(x)$ を以下のように採用する:

$$f(x) = -\frac{\mu}{x}, \quad (49a)$$

$$c(x) = t(1 + x^\beta). \quad (49b)$$

さらに, パラメータの値を以下のように採用する:

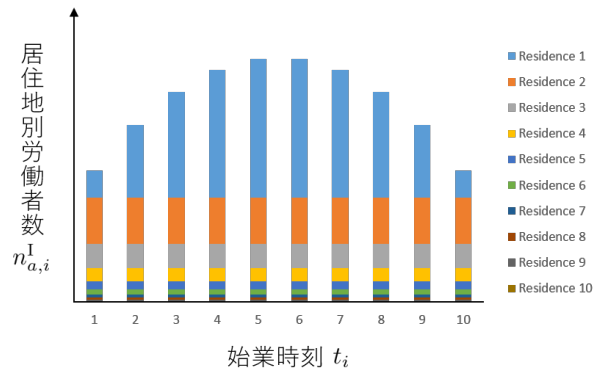
$$\begin{aligned} N &= 1000, \psi = 0.95, \phi = 0.95, L = 1.0, \\ \alpha &= 10.0, \mu = 2.0, t = 5.0. \end{aligned} \quad (50)$$

(1) 安定均衡状態

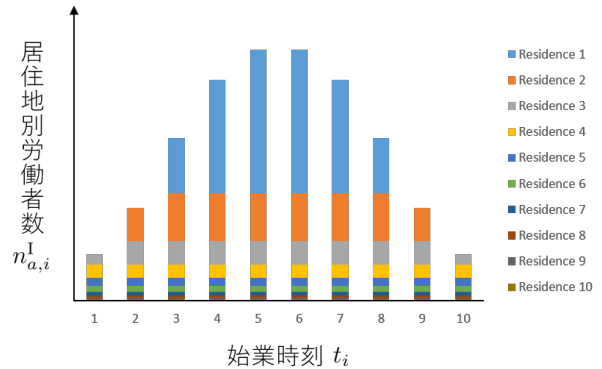
本節では, β の減少に伴って (交通混雑の緩和により) 実現する安定均衡状態の推移を調べる. そして, その結果と前章で得られた理論解析結果と一致するかを確認しよう. 数値解析のより得られた都市 I の安定均衡状態 n^s における始業時刻 t_i 別の労働者数は, 図-3 のとおりである (都市 II は同様であるため, 以下では都市 II の結果を省略する). この結果を通じ, 命題 3 (a), (b) と整合したパターンが確認できる. また, “CBD の近くに居住する労働者ほど, 始業時刻分布が集中する” 傾向と一致する. 都市 I の安定均衡状態における居住地別の労働者数 $N^s = (N_a^{d^s})_{d \in \mathcal{D}, a \in A^d}$ は, 図-4 のとお

りである. この結果より, 命題 4 の “CBD から遠い居住地ほど人口が少ない” ことが確認できる.

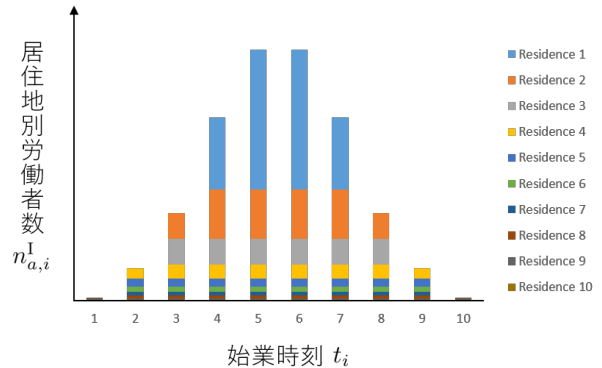
次に, 交通混雑緩和 (β の減少) の影響を確認しよう. 図-4, 5 より, 交通混雑を緩和する際に, CBD から遠い郊外部での人口が増加し, 始業時刻分布がより集中することが分かる. すなわち, 通勤費用低下が “労働者が郊外部の広い住宅に居住する” ・ “企業が生産効率向上のために始業時刻を集中させる (時間的集積の経済)” などの効果をもたらしたためである.



(a) $\beta = 1.40$



(b) $\beta = 1.20$



(c) $\beta = 1.05$

図-3: 安定均衡状態における始業時刻別の労働者数

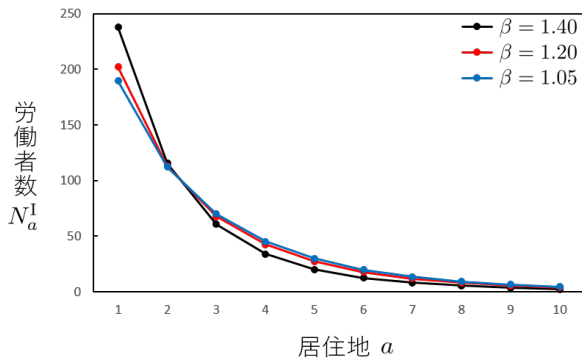


図-4: 安定均衡状態における人口分布: $N^s = (N_a^{d^s})_{d \in \mathcal{D}, a \in \mathcal{A}^d}$

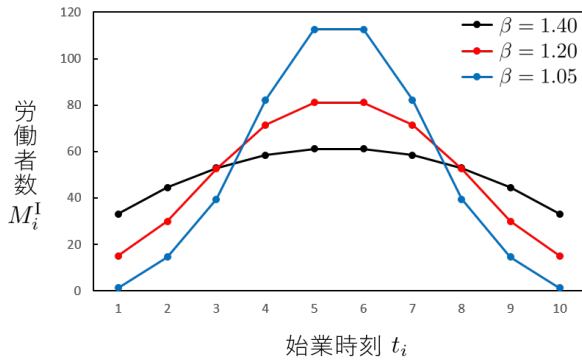


図-5: 安定均衡状態における始業時刻分布: $M^s = (M_i^{d^s})_{d \in \mathcal{D}, i \in \mathcal{I}}$

(2) 局所最適状態

本節では、前節と同様の解析を行い、局所最適状態の特徴を調べよう。まず理論解析結果との整合性を確認する。β = 1.05 の場合での都市 I の局所最適状態 n^o における始業時刻 t_i 別の労働者数は、図-6 に示すとおりである。なお、本稿では、違う交通混雑状態での局所最適状態における始業時刻別の労働者数・人口分布・始業時刻分布を確認しており、それらの結果が命題 6 と一致している。

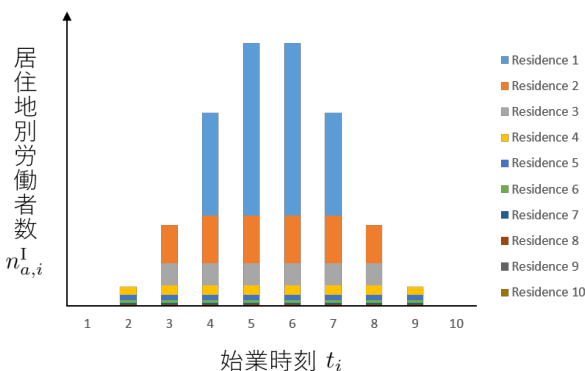


図-6: 局所最適状態における始業時刻別の労働者数 (β = 1.05)

(3) 安定均衡状態と局所最適状態の比較

a) 都市内人口・始業時刻分布

2 都市の総人口分布は図-7 (a) に示すとおりである。これらの結果より、命題 5 (a), (b) と整合した人口・始業時刻分布 (i.e., 安定均衡状態と同様の性質) が確認できる。なお、本稿ではその他のパラメータでも β = 1.05 のケースと同様の結果が得られることを確認している。

次に、安定均衡状態と局所最適状態を比較した図-7 (b) を調べる。これらの結果より、“局所最適状態は安定均衡状態より CBD 付近の人口が集中する”・“局所最適状態における居住地毎の始業時刻分布は、安定均衡状態より分散する”ことが分かり、命題 7 で示した政策導入効果と一致している。

そして、政策導入は都市全体の始業時刻分布の分散化をもたらすかについて調べよう。安定均衡状態と局所最適状態における、各始業時刻の総労働者数は図-7 (c) のとおりである。これら結果より、β = 1.05 の場合、政策導入後の始業時刻分布は安定均衡状態より集中することが分かる。したがって、“安定均衡状態では、局所最適状態により、始業時刻の分布が分散化するとは限らない”ことが分かり³、命題 7 の注意点が確認できる。

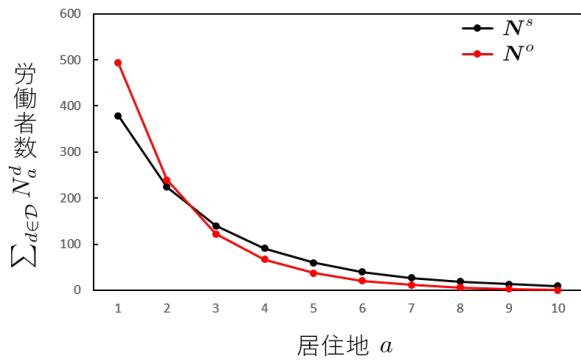
b) 都市間人口分布

本章のこれまでの節では、数値解析を通じて高山³⁾の理論を 2 都市のケースでも適用することを証明した。本節では、時間集積による生産性向上効果 (φ) と空間集積による生産性向上効果 (ψ) の関係を確認し、それが人口の時空間分布に与える影響を調べる。まず β = 1.05 のケースで φ と ψ の関係は人口が 2 都市間の分布への影響を調べよう。ここで、初期状態を (0,0) とする。

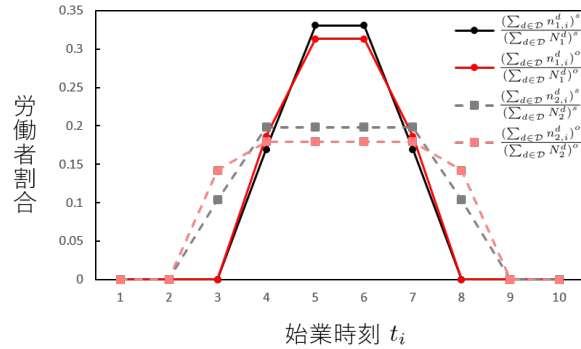
具体的には、初期状態 (0,0) から縦軸 (φ) に沿って前の点の推定結果を用いて推定し、初期状態の縦軸の各点から横軸に沿って前の点に対応する推定結果を用いて計算する。推定結果は図-8 (a) に示すとおりである。そして、この推定結果を用い、局所最適状態における ψ と φ の関係を調べ、安定均衡状態の結果と比較しよう。局所最適状態の推定結果は図-8 (b) に示すとおりである。これらの結果より、局所最適状態は安定均衡状態より人口が一方の都市への集中をもたらす傾向がある。これは、政策導入の影響で、交通混雑が緩和され、人口が集中する傾向をもたらすことがわかる。なお、本稿では、その他の初期状態でも初期状態 (0,0) のケースと同様の結果が得られることを確認している。

そして、β = 1.05 と同様な推定方法を用いて β = 1.40 のケースを推定し、それを通じて本モデルの頑健性を確認しよう。β = 1.40 のケースの推定結果は図-9 (a)

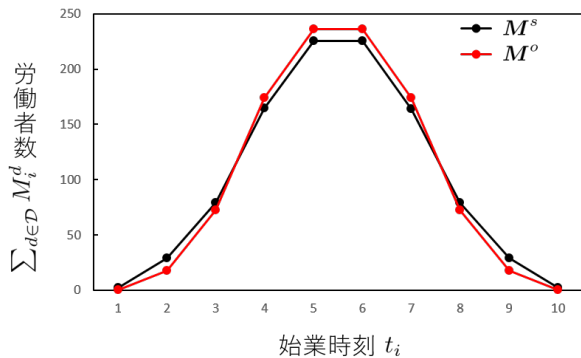
³ 局所最適状態により始業時刻分布が分散化するケースは、図-11 参照



(a) 人口分布 : N



(b) 各居住地における始業時刻シェア : $(\sum_{d \in \mathcal{D}} n_{a,i}^d / \sum_{d \in \mathcal{D}} N_a^d)_{i \in \mathcal{I}}$

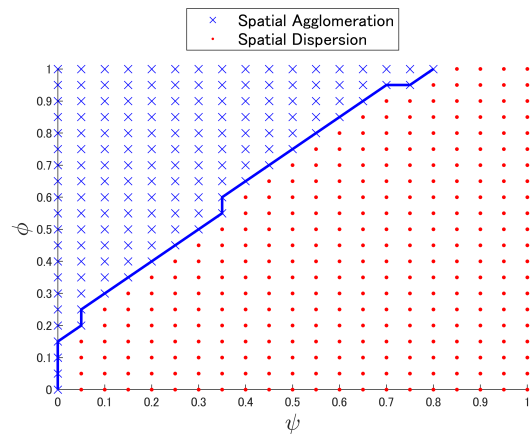


(c) 始業時刻分布 : M

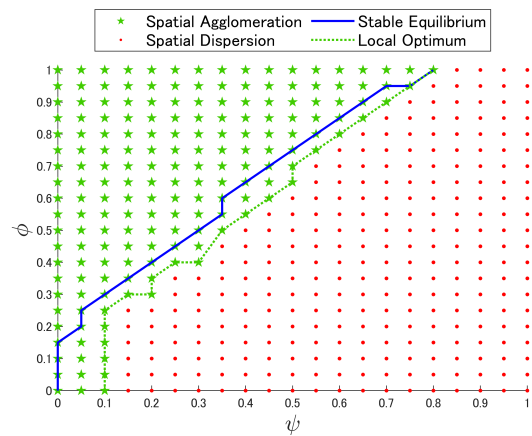
図-7: 安定均衡状態と局所最適状態の都市内人口・始業時刻分布の比較

に示すとおりである。そして、各初期状態のケースの推定結果を用いて、対応する局所最適状態における ψ と ϕ の関係を調べ、安定均衡状態の結果と比較しよう。推定結果は図-9 (b) に示すとおりである。これらの結果より、 $\beta = 1.05$ のケースの結論と同様であることが確認できる。

$\beta = 1.05$ と $\beta = 1.40$ のケースを比較し、交通が混雑するほど、人口が2都市間分散する傾向があることが分かる。また、2つのケースを通じ、空間集積による生産性向上効果 (ψ) が不変の場合、時間集積による生産性向上効果 (ϕ) の変化によって都市間人口分布が大きく変わる可能性がある；時間集積による生産性向上



(a) 安定均衡状態



(b) 局所最適状態

図-8: 安定均衡状態と局所最適状態の都市間人口分布の比較 ($\beta = 1.05$)

効果 (ϕ) が不変の場合、空間集積による生産性向上効果 (ψ) の変化によって都市間人口分布が大きく変わる可能性があることがわかる。なお、本稿では $\beta = 1.40$ のケースにおけるその他の初期状態でも初期状態 (0,0) のケースと同様の結果が得られることを確認している。

c) 始業時刻分布の分散状況

本節では、時空間集積による生産性向上効果が安定均衡状態と局所最適状態における始業時刻分布 M の分散状況に与える影響を調べよう。ここで、各 ψ と ϕ に対応する M の範囲 (i.e., $\max M - \min M$) を計算する。

$\beta = 1.05$ の時の安定均衡状態と局所における都市内人口分布 M の分散状況は図-10 に示すとおりである。影の範囲は人口が一方の都市への集中状態である。これらの結果より、政策導入にも関わらず、都市間人口分散状態の始業時刻分布は、都市間人口集中状態より集中することがわかる。これは、都市間人口が集中すれば、交通混雑が起こりやすいため、始業時刻分布が比較的分散することが明らかである。

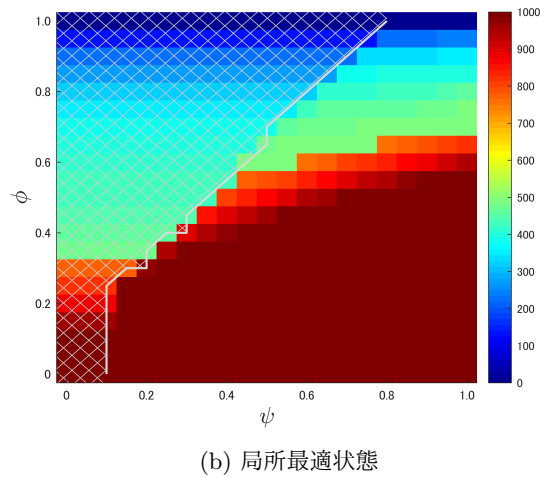
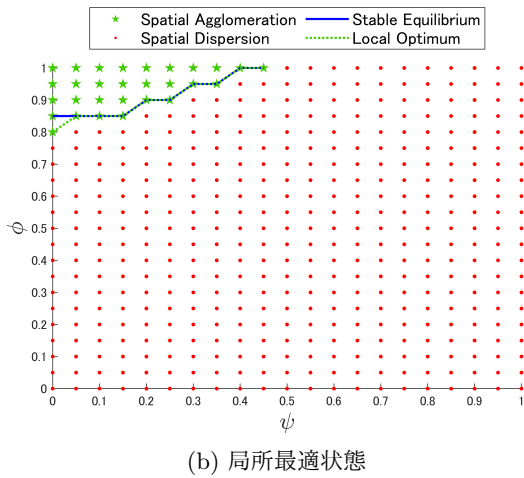
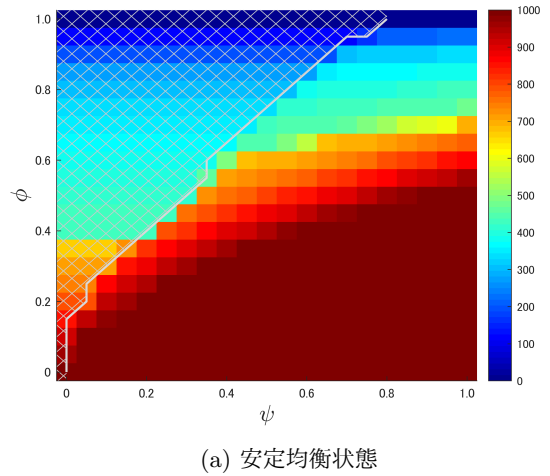
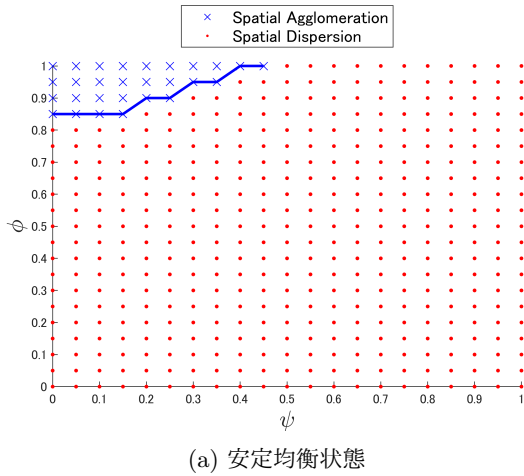


図-9: 安定均衡状態と局所最適状態の都市間人口分布の比較 ($\beta = 1.40$)

図-10: 始業時刻分布 (M) の分散状況 ($\beta = 1.05$)

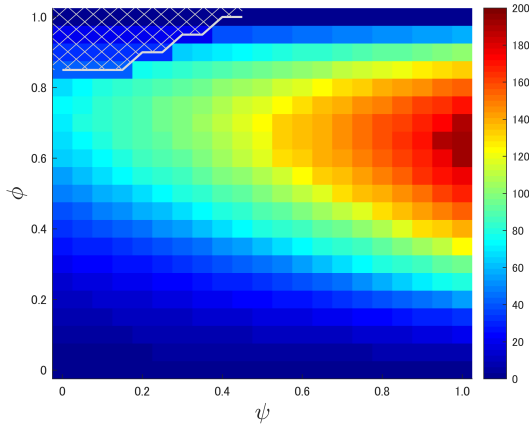
次に、 $\beta = 1.40$ のケースも調べよう。 $\beta = 1.40$ 時の安定均衡状態と局所における都市内人口分布 M の分散状況は図-11 のとおりである。影の範囲は人口が一方の都市への集中状態である。これらの結果は $\beta = 1.05$ のケースと同様、政策導入にも関わらず、都市間人口分散状態の始業時刻分布は、都市間人口集中状態より集中することがわかる。また、交通混雑が激しい前提で、政策の導入が交通混雑緩和への影響が著しいと言える。

6. おわりに

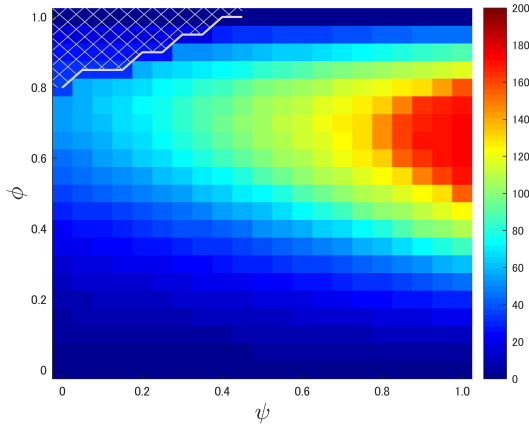
本研究では、Alonso¹⁾ 型の居住地選択モデルと Henderson²⁾ 型の始業時刻選択モデルを統合した 1 都市の住宅立地モデル (高山³⁾) を 2 都市、かつ空間集積の経済を考慮した枠組みに拡張した。そして、ポテンシャルゲームの性質を利用することで、モデルの均衡状態・局所最適状態の性質を理論的に明らかにした。さらに、時・空間分散力が都市間の人口分布、企業生産性に与える影響を明らかにした。その結果、以下に示

す知見が得られた：1) 始業時刻集中による生産性向上効果の低下は一方の都市への人口集中をもたらす。2) 安定均衡状態から、居住地毎の始業時刻を分散，都市内・都市間の人口分布を集中させるような政策導入により，社会厚生が増大する。

本稿では、都市内・都市間の人口・始業時刻分布の内生化を分析する枠組みの基礎構築を大きな目的の一つとしたため、2 都市の人口が動的に移動しない（各自都市の CBD のみに通勤する）と仮定し、分析を実施した。しかし、実際に、隣接都市間の人口の通勤移動は無視できないため、この仮定は、本研究で得られた結果に大きな影響を与えていると考えられる。また、本稿では、業種や労働者を同一に扱ったが、実際に、時空間集積の経済に関する推定結果がこれらの異質性に強く依存していると考えられる。それゆえ、本研究の成果を基盤にさらなる研究が蓄積されれば、より現実的に、異質な企業・労働者を考慮した多都市間の人口通勤移動における人口・始業時刻分布を分析することが可能になると期待できる。



(a) 安定均衡状態



(b) 局所最適状態

図-11: 始業時刻分布 (M) の分散状況 ($\beta = 1.40$)

謝辞: 本研究は国土交通省「道路政策の質向上に資する技術研究開発」の令和 2 年度研究助成 (テーマ名: 公共交通ターミナル整備の空間経済分析に関する研究開発) の助成を受けたものである。ここに記し, 感謝の意を表す。

付録 I. 命題 1 の証明

$P(\mathbf{n})$ がポテンシャル関数であることは, (20), (21) より確認できる。ここでは, $P_1(\mathbf{n}), P_2(\mathbf{n}), P_3(\mathbf{n})$ が凸関数であることを証明する。

まず, $P_1(\mathbf{n})$ の凸性を調べよう。 $P_1(\mathbf{n})$ の Hessian 行列 $\nabla^2 P_1(\mathbf{n}) = \sum_{d \in \mathcal{D}} \nabla F^d(\mathbf{n})$ は, 以下で与えられる:

$$\begin{aligned} \nabla^2 P_1(\mathbf{n}) &= 2\alpha \begin{bmatrix} \Phi & \Phi & \cdots & \Phi \\ \Phi & \Phi & \cdots & \Phi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi & \Phi & \cdots & \Phi \end{bmatrix} \\ &= 2\alpha(\mathbf{E} \otimes \Phi). \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

ここで, \otimes はクロネッカー積, \mathbf{E}_A はすべての要

素が 1 の $A \times A$ 行列, $\Phi \equiv \phi^D$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & T-1 \\ 1 & 0 & \cdots & T-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T-1 & T-2 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ である。

時間的分散力 Φ の正 (負) 定値性は, その逆行列 Φ^{-1} の正 (負) 定値性と一致するため, Φ^{-1} を考えよう:

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\zeta} \begin{bmatrix} 1 & -\phi & & & \\ -\phi & 1+\phi^2 & -\phi & & \mathbf{O} \\ & -\phi & 1+\phi^2 & -\phi & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathbf{O} & & & -\phi & 1+\phi^2 & -\phi \\ & & & & -\phi & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.2})$$

ここで, $\zeta \equiv 2\alpha(1-\phi^2)$ である。

Φ^{-1} の (i, j) 要素を \hat{d}_{ij} とし, Gershgorin の定理より, 任意の固有値 λ_i は

$$|\lambda_i - \hat{d}_{ii}| \leq R_i \quad i = 1, 2, \dots, T. \quad (\text{I.3})$$

の範囲に存在する。ここで, $R_i \equiv \sum_{j=1}^T |\hat{d}_{ij} - \hat{d}_{ii}|$ である。

これを利用すると, 時間的分散力の逆行列 Φ^{-1} の固有値 λ は, 次の範囲に存在する:

$$\frac{1}{2\alpha} \frac{1-\phi}{1+\phi} \leq \lambda \leq \frac{1}{2\alpha} \frac{1+\phi}{1-\phi}. \quad (\text{I.4})$$

固有値 λ の最小値は非負であるため, $\nabla^2 P_1(\mathbf{n})$ は, 半正定値であり, すなわち, $P_1(\mathbf{n})$ は凸関数である。

次に, $P_2(\mathbf{n})$ を考えよう。 $P_2(\mathbf{n})$ の Hessian 行列は以下のように表される:

$$\nabla^2 P_2(\mathbf{n}) = \begin{bmatrix} \eta^I & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \eta^{II} \end{bmatrix}, \quad (\text{I.5a})$$

$$\eta^d = \begin{bmatrix} \nabla c_{11}^d & \nabla c_{12}^d & \nabla c_{13}^d & \cdots & \nabla c_{1A}^d \\ & \nabla c_{22}^d & \nabla c_{23}^d & \cdots & \nabla c_{2A}^d \\ & & \nabla c_{33}^d & \cdots & \nabla c_{3A}^d \\ & & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & & & & \nabla c_{AA}^d \end{bmatrix}, \quad (\text{I.5b})$$

$$\nabla c_{xy}^d = \text{diag} \left\{ \left[\sum_{b=1}^a c'(x_{b,i}^d) \right]_{i \in \mathcal{I}} \right\}. \quad (\text{I.5c})$$

この関係から, $\nabla^2 P_2(\mathbf{n})$ は上三角形行列であり, その全ての対角要素 $c'(x) > 0$ であることが分かる。すなわち, $\nabla^2 P_2(\mathbf{n})$ は正定値であり, $P_2(\mathbf{n})$ は凸関数であることが確認できる。

最後に, $P_3(\mathbf{n})$ の凸性を調べよう。 $P_3(\mathbf{n})$ の Hessian

行列は以下のように表される：

$$\nabla^2 P_3(\mathbf{n}) = \begin{bmatrix} \kappa^I & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \kappa^{\text{II}} \end{bmatrix}, \quad (\text{I.6a})$$

$$\kappa^d = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^d & & & & & \\ & \mathbf{H}_2^d & & & & \mathbf{O} \\ & & \mathbf{H}_3^d & & & \\ & & & \ddots & & \\ \mathbf{O} & & & & & \mathbf{H}_A^d \end{bmatrix}, \quad (\text{I.6b})$$

$$\mathbf{H}_x^d = -h'(N_a^d) \mathbf{E}_I. \quad (\text{I.6c})$$

ここで、 \mathbf{E}_I はすべての要素が 1 の $T \times T$ 行列である。 $-h'(x) < 0$ であるため、 $\nabla^2 P_3(\mathbf{n})$ は正定値であり、 $P_3(\mathbf{n})$ が凸関数であることが確認できる。

付録 II. 命題 3 の証明

$\forall (a-1, i)^d, (a-1, j)^d \in \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ の場合、(18), (19) より

$$v_{a,i}^d(\mathbf{n}^*) - v_{a,j}^d(\mathbf{n}^*) = -c(x_{a,i}^{d,*}) + c(x_{a,j}^{d,*}). \quad (\text{II.1})$$

したがって、以下の関係が得られる：

$$\begin{cases} v_{a,i}^d(\mathbf{n}^*) > v_{a,j}^d(\mathbf{n}^*) & \text{if } x_{a,i}^{d,*} < x_{a,j}^{d,*}, \\ v_{a,i}^d(\mathbf{n}^*) = v_{a,j}^d(\mathbf{n}^*) & \text{if } x_{a,i}^{d,*} = x_{a,j}^{d,*}, \\ v_{a,i}^d(\mathbf{n}^*) < v_{a,j}^d(\mathbf{n}^*) & \text{if } x_{a,i}^{d,*} > x_{a,j}^{d,*}. \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

$(a-1, i)^d \notin \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ かつ $(a-1, j)^d$ の場合、

$$v_{a,i}^d(\mathbf{n}^*) - v_{a,j}^d(\mathbf{n}^*) \leq -c(x_{a,i}^{d,*}) + c(x_{a,j}^{d,*}). \quad (\text{II.3})$$

したがって、以下の関係が得られる：

$$v_{a,i}^d(\mathbf{n}^*) < v_{a,j}^d(\mathbf{n}^*) \quad \text{if } x_{a,i}^{d,*} > x_{a,j}^{d,*}. \quad (\text{II.4})$$

$N_a^{d,*} > 0$ であれば、必ずしも $x_{a,i}^{d,*} > 0$ を満たす i が存在することを利用し、(II.4) と (II.4) の関係より、 $(a-1, i)^d \in \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ のとき $x_{a,i}^{d,*} > 0$ となることが確認できる。そして、この事実と (II.2) より、命題 3(a) が得られる。

さらに、(II.4) より、 $(a-1, i)^d \notin \text{supp}(\mathbf{n}^*)$ かつ $(a-1, j)^d$ の場合、 $x_{a,i}^{d,*} \leq x_{a,j}^{d,*}$ が成立する。また、この事実と命題 3 (a) を組み合わせることで、 $n_{a,i}^{d,*} \leq n_{a,j}^{d,*}$ が成立することも確認できる。

参考文献

- 1) Alonso, W.: *Location and land use*, Harvard University Press, 1964.
- 2) Henderson, J. V.: The economics of staggered work hours, *Journal of Urban Economics*, Vol. 9, No. 3, pp. 349-364, 1981.
- 3) 高山雄貴：始業時刻分布を内生化した住宅立地均衡モデル, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol. 75, No. 2, pp. 59-69, 2019.
- 4) Fujita, M.: *Urban economic theory: land use and city size*, Cambridge University Press, 1989.

- 5) Arnott, R.: Congestion tolling with agglomeration externalities, *Journal of Urban Economics*, Vol. 62, No. 2, pp. 187-203, 2007.
- 6) Brinkman, J. C.: Congestion, agglomeration, and the structure of cities, *Journal of Urban Economics*, Vol. 94, pp. 13-31, 2016.
- 7) 小池淳司, 上田孝行, 小森俊文：ミクロ行動理論に基づく交通-立地モデルの開発, 土木計画学研究・論文集, Vol. 14, No. 2, pp. 259-267, 1997.
- 8) 尹鍾進, 青山吉隆, 中川大, 松中亮治：立地変動を考慮した実用的な土地利用・交通モデルの構築, 土木計画学研究・論文集, Vol. 17, pp. 247-256, 2000.
- 9) 上田孝行, 石川良文, 小池淳司, 石倉智樹, 小林優輔, 山崎清, 武藤慎一：Excel で学ぶ地域・都市経済分析, コロナ社, 2010.
- 10) 吉村充功, 奥村誠, 塚井誠人：都市内業務トリップにおける時間的集積の経済性, 都市計画論文集, Vol. 34, pp. 217-222, 1999.
- 11) 吉村充功, 奥村誠：ダイナミカルシステム論による鉄道時差出勤パターンの分析, 土木計画学研究・論文集, Vol. 17, No. 2, pp. 879-884, 2000.
- 12) 小林渉, 柳沼秀樹, 岩倉成志：企業への TDM 施策評価に向けた始業時刻選択モデルの構造推定, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol. 75, No. 6, pp. 455-462, 2020.
- 13) Yoshimura, M. and Okumura, M.: Optimal commuting and work start time distribution under flexible work hours system on motor commuting, *Proceedings of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*, Vol. 3, No. 2, pp. 455-469, 2001.
- 14) Mun, S.-i. and Yonekawa, M.: Flexitime, traffic congestion and urban productivity, *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 40, No. 3, pp. 329-358, 2006.
- 15) 佐藤慎太郎, 赤松隆：企業と家計の相互作用を考慮した始業・出発時刻均衡モデル, 土木計画学研究・論文集, Vol. 23, No. 4, pp. 903-910, 2006.
- 16) Takayama, Y.: Bottleneck congestion and distribution of work start times: The economics of staggered work hours revisited, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 81, No. 3, pp. 830-847, 2015.
- 17) Fosgerau, M. and Small, K.: Endogenous scheduling preferences and congestion, *International Economic Review*, Vol. 58, No. 2, pp. 585-615, 2017.
- 18) Wilson, P. W.: Residential location and scheduling of work hours, *Journal of Urban Economics*, Vol. 31, No. 3, pp. 325-336, 1992.
- 19) 高山雄貴：時間集積の経済を考慮した始業時刻・住宅立地選択モデル, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol. 74, No. 2, pp. 140-151, 2018.
- 20) Arnott, R., Rave, T., and Schöb, R.: *Alleviating Urban Traffic Congestion*, MIT Press, 2005.
- 21) Sandholm, W. H.: Potential games with continuous player sets, *Journal of Economic Theory* Vol. 97, No. 1, pp. 81-108, 2001.

(2020. 10. 2 受付)