

# ポテンシャル・ゲームに基づく 動的システム最適配分の確率安定性解析

佐津川 功季<sup>1</sup>・和田 健太郎<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 東北大学助教 未来科学技術共同研究センター (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)  
E-mail: satsukawa@tohoku.ac.jp (Corresponding author)

<sup>2</sup>正会員 筑波大学准教授 システム情報系社会工学域 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1)  
E-mail: wadaken@sk.tsukuba.ac.jp

本稿では、出発時刻が固定された動的システム最適配分状態の収束性と安定性について、ポテンシャル・ゲームに基づく解析を行う。具体的にはまず、動的システム最適配分問題を、車両が各自の動的限界費用を最小化するように経路を探索する戦略型ゲーム (DSO ゲーム) として定式化する。DSO ゲームはポテンシャル・ゲームであり、この性質を活用して、(局所あるいは大域的) 最適交通状態への収束性および確率安定性を示す。最後に、上述の結果および固定的な混雑課金制度との比較に基づき、限界費用課金の進化的な実装法についての考察を行う。

**Key Words:** *dynamic traffic assignment; system optimal; Nash equilibrium; potential game; weakly acyclic game; convergence; stochastic stability*

## 1. はじめに

動的システム最適 (dynamic system optimal; DSO) 配分は、交通システム全体の総旅行時間を最小化する規範的なフロー・パターンを求める配分原則である。DSO 配分問題の最適解は、効率的な交通システムを実現する交通管理・制御スキームを理論的に考察する基盤となる知見を提供する。また、目的関数である総旅行時間の値そのものも、管理・制御スキームを評価する際のベンチマークとしての意味を持つ。こうした重要性に触発され、Merchant and Nemhauser<sup>1),2)</sup> 以来、DSO 配分に関する多くの研究が行われてきた。

出発時刻が固定された DSO 配分に関して、既往研究には大きく分けて二種類の方向性が存在する。一つは、DSO 配分の数理計画問題、すなわち動的なネットワーク交通流モデルにおいて総旅行時間を最小化する問題を定式化し、その数理特性を解析するものである。この方向性において、いくつかの研究は最適状態における経路の社会的限界費用に着目した解析を行っている。Carey and Srinivasan<sup>3)</sup> や Nie<sup>4)</sup> は、単一終点ネットワークにおける (1 次) 最適性条件が社会的限界費用の均衡条件と対応することを示している。また、Ziliaskopoulos<sup>5)</sup> や Carey and Watling<sup>6)</sup> は、DSO 配分の凸緩和問題を示した上で、社会的限界費用の均衡状態がこの問題における最適性の十分条件をも満たすことを示している。もう一つの方向性は、比較的単純な構造を持つネットワークを対象として最適な交通流パターンを解析・導出する

とともに、そこから最適状態における制御ルールの特性を探るものである。例えば、Kuwahara et al.<sup>7)</sup> や Muñoz and Laval<sup>8)</sup>, Zhao and Leclercq<sup>9)</sup> らは、リンクが並行接続されたネットワークにおいて、累積図を用いた図式解法を通して最適制御ルールの性質を明らかにしている。また、Shen and Zhang<sup>10)</sup>, Zhang and Shen<sup>11)</sup> はそれぞれ、コリドーネットワークにおける最適混雑課金スキーム、および単心性の構造を持ったネットワークにおけるランプ制御の特性を明らかにしている。以上の既往研究を鑑みると、ある最適状態が実現しているときの、いわば静的な数理特性や制御ルールあるいはコスト・パターンについてはいくつかの有益な性質が明らかになってきているといえよう。

しかし、最適状態の静的性質については多くの研究が着目している一方、その状態を達成するための動的過程 (i.e. 進化ダイナミクスや反復アルゴリズム) の収束性や最適状態の安定性といった、いわば動的性質に関する理論的分析は数少ない。最適状態を計算するにあたっての heuristics な解法を提案している研究もあるが<sup>12),13),14),15)</sup>、解法の収束性は通常は保証されていない。こうした性質の理論解析の難しさは、主に動的なネットワーク交通流の表現に伴う DSO 配分問題の非凸性 (あるいは問題の写像の非単調性) に起因する<sup>16)</sup>。すなわち、非線形計画問題では最適性の 1 次の必要条件が十分条件と対応するとは限らず、その大域的最適解を得ることは極めて困難となる。そのため標準的な動的過程の収束性を確立することは難しい。加えて、こ

うした動的過程は総旅行時間最小化問題における局所的な最適状態（いわば、広い意味での DSO 状態）にさえ収束するとは限らない。これは、最適性の 1 次の必要条件を満たす状態には通常、極大値や鞍点までもが含まれるためである<sup>1</sup>。以上のような困難のため、その実現にあたり重要であるにも関わらず、最適状態の動的性質は明らかでないところが多い。

本稿は、出発時刻が固定された DSO 配分問題における収束性と安定性の解析を行う。この解析に際して、本稿では既存研究とは異なり、(i) 交通流の流体近似モデルを用いず、各車両（道路利用者）を分割不可能な粒子体として取り扱った上で、(ii) 各利用者が確率的に経路を変更する、確率進化ダイナミクスの動的過程の解析を行う。具体的には、まず DSO 配分問題を、各利用者が自身の社会的限界費用を最小化するよう経路を選択する戦略型ゲーム（これを「DSO ゲーム」と呼ぶ）として定式化する。DSO ゲームはポテンシャル・ゲームであり、この性質を活用することで、動的過程の最適状態への収束性およびその状態周りの安定性について理論的分析を行うことができる。本稿では、標準的な確率進化ダイナミクスである logit response dynamics における大域的最適状態の確率安定性<sup>17)</sup>を示す。加えて、前述したようなゆらぎが含まれない確定的な進化ダイナミクスである better/best response dynamics の局所的最適状態への収束性を示す。

本稿ではさらに、最適状態を達成する混雑課金スキームについての考察を行う。DSO ゲームにおける収束性と安定性に関する結果は、社会的限界費用課金が「進化的に」遂行される、i.e. 日々実現している状態に応じて課金額が調整される、ことにより交通状態が効率的な状態へと導かれることを示していると解釈される。これに対して本稿ではさらに、この進化的な混雑課金スキームが効率的な状態を実現するにあたり本質的に重要であるかどうかを検討する。このために、ある最適状態に応じて事前に課金額が設定される、典型的な「固定的」混雑課金スキームが実装された新たな戦略型ゲームを定義し、この収束性・安定性について解析を行う。これらの特性の比較考察を通して、効率的な状態の実現やその安定化にあたっての、進化課金スキームの重要な性質を明らかにする。

本稿の構成は次のとおりである。続く 2. では、DSO ゲームの定式化を行う。3. では、DSO ゲームがポテンシャル・ゲームであることを示し、その性質を用いて進化ダイナミクスの収束性および安定性を解析する。4. では、混雑課金の進化的遂行スキームと固定的遂行ス

キームとの比較考察を行う。5. では、数値計算を通して理論解析の結果を検証する。6. では、本研究のまとめと今後の課題を述べる。

## 2. DSO ゲームの定式化

本章では、動的システム最適 (DSO) 配分問題を戦略型ゲームとして定式化する（以降、このゲームを「DSO ゲーム」と呼ぶ）。DSO ゲームは「ネットワーク」「離散化された粒子体車両；あるいは道路利用者 (i.e. プレイヤー)」「各利用者の経路選択肢集合 (i.e. 戦略集合)」「動的なネットワーク交通流モデル (i.e. 利得関数)」から構成される。以下ではこれらの要素を説明した後、この戦略型ゲームの解である Nash 均衡状態について説明する。

### (1) DSO ゲームの要素

#### a) ネットワーク

本稿では、多起点多終点の OD ペアを持つ一般構造のネットワークを対象とする。ネットワークはノード集合  $N$ 、リンク集合  $\mathcal{L}$  から構成されている。あるノード  $a$  からノード  $b$  への、全ての acyclic な経路集合を  $\mathcal{R}(a,b)$  と表す。なお、ノード  $a$  からノード  $b$  への経路が存在しないときは  $\mathcal{R}(a,b) = \emptyset$  となる。

各リンクは三角形型、あるいは台形型の区分線形近似された fundamental diagram (FD) を持つものとする。あるリンク  $l \in \mathcal{L}$  の自由流速度、後進波速度、および飽和交通流率を、それぞれ  $v_l, w_l, q_l$  と表す。リンク  $l$  の長さは  $L_l$  と表される。各リンクは終端部にボトルネックを持つものとし、その容量を  $\mu_l (\leq q_l)$  で表す。なおボトルネック容量と飽和交通流率は、リンク上で待ち行列遅れが発生しないように、無限大の値に設定することができるものとする；本稿ではこのようなリンクを「自由流リンク」、それ以外の（待ち行列遅れが発生しうる）リンクを「ボトルネックリンク」と呼び、必要があればこれらを明示的に区別して取り扱う。

#### b) プレイヤー、戦略集合および利得関数

DSO ゲームのプレイヤーは、離散化された粒子体の車両である（利用者とも呼ぶ）。利用者の集合を  $\mathcal{P}$ 、利用者数を  $|\mathcal{P}|$  と表す。利用者  $i \in \mathcal{P}$  の起点、終点および出発時刻を、それぞれ  $o_i, d_i$  および  $s_i$  と表す。これらは外生的に与えられるものとする。また、同一起点から出発する利用者は、異なる出発時刻を持つものとする。

各利用者は自身の起点と終点を結ぶ任意の acyclic な経路を選択できる。利用者  $i$  の経路選択肢集合を  $\mathcal{R}_i (= \mathcal{R}(o_i, d_i))$  と表す。この集合は、利用者  $i$  が経路を利用しない (i.e. 利用者  $i$  がネットワークに配分されない) ことを表す選択肢  $\phi$  も含まれる。各利用者が

<sup>1</sup> 動的過程の仕組み上、こうした極小値以外の点に収束することは起こりがたいと主張することもできる。しかしながら、理論的分析を行う上では最適性の 1 次の必要条件を満たす状態からこれらの状態を排除することはできない。

選択した経路を並べたベクトル (i.e. 戦略プロファイル) を、「経路プロファイル」あるいは単に「交通状態」と呼び、 $\mathbf{r} \equiv \{r_1, \dots, r_i, \dots, r_{|\mathcal{P}|}\} \in \mathcal{R}$  と表す。なお、 $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_1 \times \dots \times \mathcal{R}_{|\mathcal{P}|}$  である。ある経路プロファイル  $\mathbf{r}$  について、利用者  $i$  以外の選択経路を並べたものを  $\mathbf{r}_{-i} \equiv \{r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_{|\mathcal{P}|}\}$  と表す。 $\mathbf{r} = (r_i, \mathbf{r}_{-i})$  のように  $r_i$  と  $\mathbf{r}_{-i}$  を束ねた記述も行う。

DSO ゲームでは、各利用者の利得は、選択経路の社会的限界費用の符号を逆にしたもので与えられる：すなわち、限界費用課金 (あるいはピグー的課税) スキーム導入下において各利用者が自身の一般化交通費用を最小化しようとする行動する状況を考える。ある利用者の社会的限界費用は、選択した経路の旅行時間 (i.e. 私的費用) と、経路を利用したときの他の利用者の旅行時間増分 (i.e. 外部費用) の和として定義される。数学的には、ある利用者  $i$  が経路  $r_i \in \mathcal{R}_i$  を選択したときに得る利得は、この利用者以外の経路選択  $\mathbf{r}_{-i}$  を与件として次のように表される：

$$U_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) = -C_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) - E_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}), \quad (1)$$

$$\text{where } E_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) = \sum_{i' \in \mathcal{P} \setminus \{i\}} \{C_{i'}(r_i, \mathbf{r}_{-i}) - C_{i'}(\phi, \mathbf{r}_{-i})\}. \quad (2)$$

ここで、 $C_i(r_i, \mathbf{r}_{-i})$  および  $E_i(r_i, \mathbf{r}_{-i})$  は、それぞれ利用者  $i$  の経路旅行時間 (私的費用) と外部費用を表している。また  $C_{i'}(\phi, \mathbf{r}_{-i})$  は、利用者  $i$  がネットワークに配分されないときの利用者  $i'$  の経路旅行時間を表している。

ある経路プロファイルにおける各利用者の経路旅行時間は、動的なネットワーク交通流モデルに基づき一意に求められる。動的交通流モデルは「リンクモデル」および「ノードモデル」の二つのサブモデルから構成されている。まずリンクモデルはいわゆる粒子交通流の追従モデルであり、このモデルでは各利用者の各リンクにおける流出および流入「可能」時刻が求められる。前者は下流リンクに利用者が存在しないときの最早リンク流出時刻である；一方後者は、飽和交通流率から定まる最小車頭間隔の制限を満たした上での最早リンク流入時刻である。すなわち、リンクモデルは各リンクにおける各利用者の (実際の) 流入・流出時刻が満たすべき境界条件を導出している。そして、ノードモデルはこの境界条件と整合的な流入・流出の実時刻を導出する。このフレームワークは要するに、Daganzo<sup>18),19)</sup> の「demand/supply アプローチ」を粒子モデルへと適用したものとなる。

本稿では、動的な交通流を表現するための適切な条件 (e.g. First-In-First-Out (FIFO) 原則, 因果律) を満たすものであれば任意のリンクモデルを採用できるものとする。ノードモデルについては、任意の境界条件が与えられた際に確定的にリンク流入出時刻が定まるようなモデルを採用するものとする。

## (2) Nash 均衡

利用者の経路選択行動の均衡状態として、(純粋戦略) Nash 均衡状態を考える。数学的には、均衡状態は次を満たす交通状態  $\mathbf{r}^*$  として表される：

$$U_i(r_i^*, \mathbf{r}_{-i}^*) = \max_{r_i \in \mathcal{R}_i} U_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}^*), \quad \forall i \in \mathcal{P}. \quad (3)$$

均衡状態では、各利用者の選択経路は均衡経路プロファイルに対する最適反応となっている；このような経路を「最適反応経路」と呼ぶ。特に、ある均衡経路プロファイルについて、各利用者の最適反応経路が唯一である (i.e. 選択可能な他の経路より厳密に利得が高い) とき、 $\mathbf{r}^*$  は狭義 Nash 均衡状態であるという。

ここで、式 (2) を (3) に得ることで次を得る：

$$\sum_{i' \in \mathcal{P}} C_{i'}(r_i^*, \mathbf{r}_{-i}^*) = \min_{r_i \in \mathcal{R}_i} \sum_{i' \in \mathcal{P}} C_{i'}(r_i, \mathbf{r}_{-i}^*), \quad \forall i \in \mathcal{P}. \quad (4)$$

この関係式は、均衡状態では、いかなる利用者が単独で経路を変更しても総旅行時間が減少しないことを示している。すなわち各均衡状態は、総旅行時間を最小化する問題における局所あるいは大域的最適解と対応することになる。このように DSO ゲームでは、対象とする交通システムの最適状態が均衡状態として特徴付けられている。

## 3. DSO ゲームの収束性と安定性

本章では、DSO ゲームにおける収束性、安定性を解析する。解析に先立ち、まず、DSO ゲームがポテンシャル・ゲームであることを示す。次にこの特性を活用し、経路選択の進化ダイナミクス (evolutionary dynamics) の局所的最適状態への収束性を示す。そして、経路選択にゆらぎが生じうる確率進化ダイナミクス (perturbed evolutionary dynamics) が適用された状況における、大域的最適状態の確率安定性を示す。

### (1) DSO ゲームとポテンシャル・ゲーム

ポテンシャル・ゲームとは、任意のプレイヤーが戦略を変えたときの利得の変化が、戦略プロファイルの関数として定義されるポテンシャルの変化と一致するゲームである。形式的には、ポテンシャル・ゲームは次のように定義される：

定義 1. ある  $n$  人のプレイヤー、 $\{\mathcal{R}_i\}_{i=1}^n$  の戦略空間、および  $\{U_i\}_{i=1}^n$  の利得関数から構成される有限ゲームを考える。このゲームにおいて、次を満たすポテンシャル関数  $\Pi: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が存在するとき、このゲームをポテンシャル・ゲームと呼ぶ：

$$U_i(r_i', \mathbf{r}_{-i}) - U_i(r_i'', \mathbf{r}_{-i}) = \Pi(r_i', \mathbf{r}_{-i}) - \Pi(r_i'', \mathbf{r}_{-i}), \quad (5)$$

$$\forall i \in \mathcal{P}, \forall \mathbf{r}_{-i} \in \mathcal{R}_{-i}, \forall r_i', r_i'' \in \mathcal{R}_i.$$

この定義から DSO ゲームとポテンシャル・ゲームの関係を示す次の定理が導かれる：

**定理 1.** DSO ゲームはポテンシャル・ゲームであり、そのポテンシャルは総旅行時間の負の値となる：

$$\Pi(\mathbf{r}) = - \sum_{i \in \mathcal{P}} C_i(\mathbf{r}). \quad (6)$$

**証明.** ある任意の利用者  $i \in \mathcal{P}$  が経路を変更した前後の経路プロファイル  $(r_i, \mathbf{r}_{-i})$  と  $(r'_i, \mathbf{r}_{-i})$  を考えよう。このとき利用者  $i$  の利得変化は次のように変形される：

$$\begin{aligned} & U_i(r'_i, \mathbf{r}_{-i}) - U_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) \\ &= -C_i(r'_i, \mathbf{r}_{-i}) - E_i(r'_i, \mathbf{r}_{-i}) - \{-C_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) - E_i(r_i, \mathbf{r}_{-i})\} \\ &= - \sum_{i \in \mathcal{P}} C_i(r'_i, \mathbf{r}_{-i}) - \left\{ - \sum_{i \in \mathcal{P}} C_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) \right\} \\ &= \Pi(r'_i, \mathbf{r}_{-i}) - \Pi(r_i, \mathbf{r}_{-i}). \end{aligned}$$

以上から、利用者  $i$  の利得変化が総旅行時間の変化、すなわちポテンシャルの変化と一致することが示される。従って、DSO ゲームはポテンシャル・ゲームである。□

これは、DSO ゲームでは各利用者が効用を改善するように経路を選択（変更）したとき、これに伴い総旅行時間も常に改善されることを意味している。

## (2) 収束性

DSO ゲームがポテンシャル・ゲームである事実を活用して、このゲームにおける均衡状態の動的な性質について調べていこう。以降では、DSO ゲームが繰り返し行われ、各利用者が過去の経験に基づき日々の選択経路を変更する状況を考える、i.e. DSO ゲームを進化ゲームとして動学化する。各日付 (day) を表す離散的な変数を  $\tau \in \{1, 2, \dots\}$  で表し、day  $\tau$  で利用者  $i$  が選択する経路を  $r_i^\tau$ 、経路プロファイルを  $\mathbf{r}^\tau$  と表す。そして、day ごとにランダムに一人の利用者が選ばれ、この利用者が特定の行動ルールに従い経路を変更するものとする。こうした day-to-day の交通状態の進展を進化ダイナミクスと呼ぶ。

DSO ゲームにおける収束性について、次の二つの進化ダイナミクスを調べよう：better response dynamics および best response dynamics。まず better response dynamics では、各利用者は現在の経路より良い利得を獲得できる経路が存在する場合、その経路を新たに選択する。数学的には、ある day  $\tau$  の経路プロファイルが  $\mathbf{r}^\tau$  であり利用者  $i$  が経路変更の機会を持つとき、次の経路選択肢集合  $D_i(\mathbf{r}^\tau)$  からランダムに一つの経路を選択するものとする：

$$D_i(\mathbf{r}^\tau) := \left\{ r_i^* \mid r_i^* \in \mathcal{R}_i \text{ s.t. } U_i(r_i^*, \mathbf{r}_{-i}^\tau) > U_i(r_i^\tau, \mathbf{r}_{-i}^\tau) \right\}. \quad (7)$$

ただし空集合である (i.e. より良い利得を獲得できる経路が存在しない) 場合、現在の経路を引き続き選択するものとする。

この進化ダイナミクスの収束性は、DSO ゲームがポテンシャル・ゲームであるという事実から容易に導くことができる：

**定理 2.** DSO ゲームにおいて各利用者が better response dynamics に従い経路を選択する状況を考える。このとき初期経路プロファイルに関わらず、交通状態は均衡状態 (i.e. 局所または大域的最適状態) にほとんど確実に (almost surely) に収束し、かつ均衡状態における総旅行時間は初期状態より小さい。

**証明.** DSO ゲームはポテンシャル・ゲームであるので、better response dynamics により利用者が利得を改善することで交通状態はポテンシャルの局所または大域的最大化状態 (i.e. 均衡状態) へと収束することは明らか。さらにポテンシャル関数が総旅行時間の負の値であり、利得を改善することで総旅行時間が改善されるため、初期状態より総旅行時間が増加することはない。従って、定理が成立する。□

この定理は better response dynamics が、総旅行時間の観点から初期状態より良い交通状態へと必ず収束することを示している。

一方、best response dynamics では、各利用者は現在の選択経路とは無関係に、自身の利得を最大化する経路 (i.e. 最適反応経路) を選択する。すなわち、現在の経路プロファイルが  $\mathbf{r}^\tau$  であるとき、利用者  $i$  は次の最適反応経路の集合からランダムに経路を選択する：

$$B_i(\mathbf{r}^\tau) := \left\{ r_i^* \mid r_i^* \in \mathcal{R}_i \text{ s.t. } \max_{r \in \mathcal{R}_i} U_i(r, \mathbf{r}_{-i}^\tau) \right\}. \quad (8)$$

Best response dynamics は状態空間が  $\mathcal{R}$  であるマルコフ連鎖であり、次の性質を持つ：現在の経路プロファイルが均衡状態であっても、それが吸収状態であるとは限らない。これは、best response dynamics ではある利用者が複数の最適反応経路を持つとき、その最適反応経路間で経路を変更することが可能であるためである。DSO ゲームにおいて最適反応経路は同一の社会的限界費用を持つため、これはつまり交通状態が、総旅行時間が同一である複数の経路プロファイル間で変化しうることを意味している。以上の性質からは、best response dynamics の収束先を考察する上で重要な次の系が導かれる：

**系 1.** DSO ゲームにおいて、best response dynamics の閉じた連結類 (closed communication class) は、総旅行時間が同一の Nash 均衡状態から構成される。

**証明.** 異なる総旅行時間を有する交通状態は互いに到達可能でないことは明らか：総旅行時間が小さい状態か

ら大きい状態へ best response により到達することはできない。従って、任意の状態集合が互いに到達可能である（連結している）とき、この状態集合は総旅行時間が同一の交通状態から構成されなければならない。

さらに、ある連結類において Nash 均衡でない交通状態 (i.e. 少なくとも一人の利用者が利得を改善できる状態) が存在する場合、その状態集合は閉じていないことも明らかである：利得を改善して別の交通状態へと遷移した場合、元の連結類へは戻り得ない。従って全ての閉じた連結類は総旅行時間が同一の Nash 均衡状態から構成される。 □

この系より、best response dynamics の収束性に関する次の定理が導かれる：

**定理 3.** DSO ゲームにおいて各利用者が best response dynamics に従い経路を選択する状況を考える。このとき初期状態に関わらず、交通状態は総旅行時間が同一の Nash 均衡状態集合へとほとんど確実に収束し、かつこれらの状態における総旅行時間は初期状態より小さい。

**証明.** あらゆるマルコフ連鎖は閉じた連結類へ確率 1 で収束する。この事実と系 1 より、best response により交通状態が総旅行時間が同一である均衡状態の集合へと収束することがわかる。さらに DSO ゲームはポテンシャル・ゲームであるため、定理 2 と同様に、初期状態より総旅行時間は必ず小さくなる。以上から定理が証明される。 □

これらの進化ダイナミクスの収束性を比較すると、better response dynamics ではある一つの交通状態へと収束するのに対し、best response dynamics ではある均衡集合内で交通状態が遷移し続けうることがわかる。Best response dynamics のこの性質は、収束性の観点からは一見望ましくないものに見えるが、実は総旅行時間の観点からは次のように良い性質となる：交通状態が、better response dynamics の収束先（候補）である局所的最適状態から逸脱することが可能となる。

まず best response dynamics では、交通状態は総旅行時間が同一の異なる交通状態へと遷移することができる。すると遷移後では、いずれかの利用者が自身の利得をさらに改善できる経路を見つける可能性があり、そうした経路への best response が行われる場合は総旅行時間も改善される。すなわち現在の交通状態が均衡状態であったとしても、総旅行時間が同一である別の交通状態を経由した best response により、総旅行時間をさらに改善できる。しかし better response dynamics では、交通状態はそもそも均衡状態から逸脱できない：何故ならば、各利用者は利得を「厳密に」改善できる経路へのみ変更できるためである。言い換えれば、better

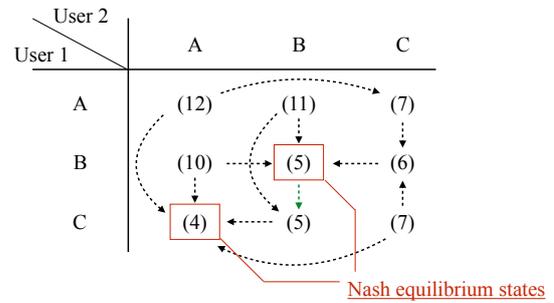


図-1 2 プレイヤー 3 戦略の DSO ゲームの利得行列。各要素は総旅行時間を表しているものとする。また、各点線矢印は best response の候補を表している。

response dynamics に対応するマルコフ連鎖では全ての均衡状態が吸収状態となっている。

こうした性質の違いを具体例で示しておこう。図 1 は 2 プレイヤー 3 戦略の DSO ゲームの利得行列を表している。このゲームには (B, B) および (A, C) の二つの Nash 均衡状態が存在している。ここで利用者が better response dynamics に従い経路を選択する場合、これらの均衡状態はいずれも吸収状態となり、どちらかの状態に達した後は交通状態は変化し得ない。一方 best response dynamics に従う場合は、交通状態は均衡状態 (B, B) から (B, C) へと遷移することができる。その結果このゲームでは、交通状態はより小さい総旅行時間を持つ均衡状態 (A, C) へと収束していくことがわかる。

従って、best response dynamics の「利得を厳密に改善する必要がない」性質によって、交通状態が局所的最適状態に達した後も、さらにその近傍を探索できる。その結果、better response dynamics より良い総旅行時間を持つ交通状態へと収束することが期待できることがわかる。

### (3) 安定性

#### a) 確率安定性の定義

DSO ゲームにおける安定性に関して、本稿では「確率安定性」について解析する<sup>2</sup>。まず、収束性の解析で取り扱ったような、戦略選択にゆらぎを含まない確定的な進化ダイナミクス (unperturbed evolutionary dynamics) を考えよう。これは戦略空間が状態空間  $\mathcal{R}$  と対応するマルコフ連鎖であり、‘unperturbed Markov chain’ とも呼ばれる。このマルコフ連鎖の遷移確率行列を  $\mathbf{P}^0$  と表す；また、状態 (i.e. 経路プロファイル)  $\mathbf{r}$  から  $\mathbf{r}'$  への遷移確率を  $p_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}$  で表す。

次に、あるパラメータ  $\epsilon$  に特徴付けられた確率で戦略選択にゆらぎが生じる (e.g. 利得を改善しない経路へと変更しうる) 確率進化ダイナミクス (perturbed evolu-

<sup>2</sup> 確率安定性についての詳細な定義・説明については Young<sup>17)</sup> を参照のこと。

tionary dynamics) を考えよう；このマルコフ連鎖は一般に ‘perturbed Markov chain’ と呼ばれる。ゆらぎのパラメータ  $\epsilon$  はある適当な正の実数区間  $(0, a]$  のいずれかの値を取るものとし、あるパラメータにおける遷移確率行列を  $\mathbf{P}^\epsilon$  と表す。さらに、このマルコフ連鎖は次の条件を満たすものとする：

非周期かつ再帰的, i.e. エルゴード性を持つ (9)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} p_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^\epsilon = p_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^0 \quad (10)$$

and  $p_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^\epsilon > 0$  for some  $\epsilon$  implies  $\exists c(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}') \geq 0$  (11)

$$\text{s.t. } 0 < \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-c(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}')} p_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^\epsilon < \infty.$$

条件 (9) は、このマルコフ連鎖が唯一の定常分布  $\mu^\epsilon$  を持つことを意味している。条件 (10) は、極限を取ることにより、マルコフ連鎖がゆらぎのないマルコフ連鎖へと収束する (i.e.  $\mathbf{P}^\epsilon \rightarrow \mathbf{P}^0$ ) ことを意味している。条件 (11) は、ある一定の収束率で指数収束することを表している。ここで、スカラー  $c(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}')$  は遷移  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$  に必要なコストを表しており、確定的な進化ダイナミクスにおいて遷移可能である (i.e. 遷移にゆらぎを必要としない) とき、 $c(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}') = 0$  となる。これらの条件を満たす perturbed Markov chain を unperturbed Markov chain の ‘regular perturbation’ と呼ぶ。

Unperturbed Markov chain は複数の定常分布を持ちうる一方、perturbed Markov chain は唯一の定常分布を持っている。そしてこの唯一の定常分布は、ゆらぎをゼロに近づけることで unperturbed Markov chain の定常分布のどれか一つへと収束することが示されている<sup>17)</sup>。この定常分布  $\mu^\epsilon$  から、ゆらぎが十分小さくなったときにどの状態周辺に定常分布が収束するのか、i.e. どの状態が実現しやすいのか、を調べることができる。以上をまとめる形で、確率安定性の概念は次のように定義される：

**定義 2.** ある確率進化ダイナミクスに従いプレイヤーが戦略を選択する状況を考える。このマルコフ連鎖の定常分布を  $\mu^\epsilon$  で表す。  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_{\mathbf{r}}^\epsilon > 0$  を満たす状態  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$  を確率安定状態と呼ぶ。

すなわち、ゆらぎが十分小さいときに観測頻度が高くなる、ゆらぎに対して頑健な状態が確率安定状態と解釈される。

#### b) DSO ゲームにおける確率安定性

本稿では、確率進化ダイナミクスとして logit response dynamics<sup>20)</sup> を採用したときの、DSO ゲームにおける確率安定性について調べる。Logit response dynamics は best response dynamics の regular perturbation であり、各利用者が次の確率に従い経路を選択するダイナミクスで

ある：

$$p_i^\beta(r, \mathbf{r}^\tau) = \frac{\exp(\beta U_i(r, \mathbf{r}_{-i}))}{\sum_{r' \in \mathcal{R}_i} \exp(\beta U_i(r', \mathbf{r}_{-i}))} \quad (12)$$

ここで、 $\beta \in (0, \infty)$  はゆらぎパラメータである；また、 $p_i^\beta(r, \mathbf{r}^\tau)$  は経路プロファイルが  $\mathbf{r}^\tau$  であるときに、利用者  $i$  が経路  $r$  を選択する確率を表している。なお  $\beta \rightarrow \infty$  により、logit response dynamics は best response dynamics へと収束する (これが前述した  $\epsilon \rightarrow 0$  に相当する)。

ポテンシャル・ゲームに logit response dynamics が適用されるとき、その確率安定状態はポテンシャル関数を最大化する状態であることが知られている<sup>21)</sup>。これを活用することで、DSO ゲームにおける確率安定性は次のように導かれる：

**定理 4.** DSO ゲームにおいて、利用者が logit response dynamics に従い経路を選択する状況を考える。このとき、確率安定状態は総旅行時間を最小化する大域的最適状態と一致する。

以上より、道路利用者の利得が社会的限界費用の負の値と一致するような状況下では、logit response dynamics により大域的最適状態が安定化することが示された。

## 4. 進化的・固定的な混雑課金スキームの比較

DSO 配分の直接的な、そして最も重要な応用の一つは、最適状態を利用者の選択結果である均衡状態として分権的に達成するための限界費用課金スキームに関する洞察を得ることである。この観点から、前節までの DSO ゲームにおける解析を解釈し直すと、これらは限界費用課金を「進化的」に遂行する状況下における均衡状態の動的性質を解析したものを見做すことができよう。すなわち、実現した交通状態に応じて課金額を日々調整するときの、局所および大域的最適状態への収束性と安定性を示したものと解釈できる。

本節では混雑課金のこうした進化的遂行が、最適状態を達成するにあたり本質的に必要であるかどうかを考察する。具体的には、混雑課金の「固定的遂行」、i.e. ある最適状態を均衡状態として達成することを目標に課金額を固定して実装する、が行われたときの進化ダイナミクスの収束性・安定性について調べる。そして、進化的に課金を実施されたときの特性と比較し、効率的な交通状態を安定的に実現するにあたっての重要な違いを明らかにしていく。

以降、(1) および (2) では、固定的な混雑課金スキームが実装された新たな戦略型ゲーム、およびそのゲームの理論的解析を行う対象となるネットワークを定義する。このゲームは、各利用者が固定課金 (fixed congestion pricing) を考慮して自身の利得を最大化するよう

に経路を選択する特殊な動的利用者均衡 (dynamic user equilibrium; DUE) 配分問題と位置付けられる; 本稿ではこのゲームを「DUE-FCP ゲーム」と呼ぶ. 次に (3) において, このゲームの収束性および安定性を示す. そして (4) において, DSO ゲームの特性との比較を通して, 進化的および固定的な混雑課金スキームの特性考察を行う.

(1) DUE-FCP ゲームの定式化とその性質

DUE-FCP ゲームでは, ある利用者  $i$  が経路  $r_i$  を選択するときの利得は, この利用者以外の経路プロフィール  $\mathbf{r}_{-i}$  を与件として次のように表される:

$$U_i^F(r_i, \mathbf{r}_{-i}) = -C_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) - T_i(r_i). \quad (13)$$

ここで  $T_i(r_i)$  は, 利用者  $i$  が経路  $r_i$  を利用するときを支払う混雑料金である. DUE-FCP ゲームの均衡状態  $\mathbf{r}^*$  は, DSO ゲームと同様に Nash 均衡状態として定義され, 利得関数 (13) を用いて次のように表される:

$$U_i^F(r_i^*, \mathbf{r}_{-i}^*) = \max_{r \in \mathcal{R}_i} U_i^F(r, \mathbf{r}_{-i}^*), \quad \forall i \in \mathcal{P}. \quad (14)$$

DUE-FCP ゲームでは, 均衡となる交通状態は課せられる混雑料金によって特徴付けられる. 具体的には, 固定の課金額を調整することで, 次に示すようにある特定の交通状態を均衡状態にすることができる:

**命題 1.** DUE-FCP ゲームにおいて, 任意の経路プロフィール  $\mathbf{r}^* \in \mathcal{R}$  を考えよう. このとき,  $\mathbf{r}^*$  が狭義 Nash 均衡状態となる混雑課金パターン  $\mathbf{T}^*$  が必ず存在する. すなわち, 次を満たす  $\mathbf{T}^*$  が存在する:

$$U_i^F(r_i^*, \mathbf{r}_{-i}^*) > U_i^F(r, \mathbf{r}_{-i}^*), \quad \forall r \in \mathcal{R}_i \setminus \{r_i^*\}, \forall i \in \mathcal{P}. \quad (15)$$

**証明.** ある利用者の経路に対する課金額は, 他の利用者の利得に影響を及ぼすことはないことは明らか. そのため, ある利用者  $i$  の各経路に課す混雑料金を次のように設定することで, 他の利用者の利得を変えないことなく,  $\mathbf{r}^*$  における利用者  $i$  の最適反応経路を唯一にすることができる:

$$-C_i(r_i^*, \mathbf{r}_{-i}^*) - T_i^*(r_i^*) > -C_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}^*) - T_i^*(r_i), \quad (16) \\ \forall r_i \in \mathcal{R}_i \setminus \{r_i^*\}.$$

各利用者についてこのように課金額を設定することにより,  $\mathbf{r}^*$  が狭義 Nash 均衡状態となる DUE-FCP ゲームを定式化することができる. □

特に, ある最適状態 (i.e. DSO ゲームにおける均衡状態) における各利用者の限界費用と一致するように各経路の課金額を設定 (i.e.  $T_i(r_i) = E_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}^*)$ ) すれば, DUE-FCP ゲームにおける均衡状態をこの最適状態と一致させることができる. このように, ある最適状態を目標状態とする最適混雑課金が課された DUE-FCP ゲー

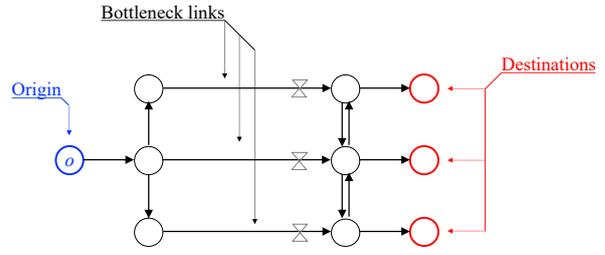


図-2 SBPR-1 ネットワークの例

ムの解析を通して, 固定的な混雑課金スキームの特性を調べることができる.

(2) SBPR-1 ネットワークにおける DUE-FCP ゲーム

本稿では DUE-FCP ゲームの解析にあたり, 単一起点の単経路-ボトルネックの構造を持つネットワーク (single-bottleneck-per-route network with a single origin; SBPR-1 ネットワークと呼ぶ) に着目する. これは, 各経路に 2 章で定義したボトルネックリンクが一つのみ含まれており, それ以外のリンクは自由流リンクであるようなネットワークである (例を図 2 に示す). 以降で示すように, このネットワークでは DUE-FCP ゲームにおける均衡状態の性質を理論的に解析することが可能となる.

なお, SBPR-1 ネットワークはそれ単独では非現実的なネットワークのように見える. しかしこうしたネットワークは, 様々なネットワークにサブ・ネットワークとして含まれる構成要素と見做せる. そのため, SBPR-1 ネットワークにおける DUE-FCP ゲームの性質は, より一般的なネットワークにおける交通流においても発現しうるものと考えられる.

SBPR-1 ネットワークの重要な性質が, 外部性の方向を特徴付ける次の「順序特性」である:

**命題 2.** SBPR-1 ネットワークにおける DUE-FCP ゲームを考えよう. ある利用者の任意の経路の利得は, この利用者より遅く (同一起点を) 出発するいかなる利用者の経路選択にも影響されない.

**証明.** DUE-FCP ゲームにおける各利用者の利得は経路旅行時間および混雑料金から構成されており, このうち利用者の経路選択により変化しうるのは経路旅行時間のみである. 自由流リンクの旅行時間は変化しないため, 命題を示すには, 任意の利用者のボトルネックリンク旅行時間が, より遅く出発する利用者の経路選択に影響されないことを示せば十分である.

自由流リンクでは待ち行列遅れが発生しないため, ある利用者はより遅く出発する利用者より早く任意のボトルネックリンクに流入する. 一方, 動的交通流モデルは FIFO 原則と因果律を満たしているため, ある利用者

のリンク旅行時間は、そのリンクにより早く流入する車両のみに影響されることが保証される。従って、ある任意の利用者のボトルネックリンク旅行時間は、より遅く出発する利用者の経路選択には影響されない。よって命題が成立する。□

順序特性を用いることで、DUE-FCP ゲームにおける均衡状態の一意性、特にある最適混雑料金パターン導入下においては対応する最適状態が唯一の均衡状態となることを示すことができる：

系 2. SBPR-1 ネットワークにおける DUE-FCP ゲームを考えよう。そして、任意の経路プロファイル  $\mathbf{r}^* \in \mathcal{R}$ 、およびこの経路プロファイルを狭義 Nash 均衡状態にする混雑課金パターン  $\mathbf{T}^*$  を考える。このとき、 $\mathbf{r}^*$  はこのゲームにおける唯一の Nash 均衡状態となる。

証明. 背理法により証明する。ある別の経路プロファイル  $\mathbf{r}^{**}$  が均衡状態であるとしよう。  $\mathbf{r}^*$  と  $\mathbf{r}^{**}$  とで異なる経路を選択している利用者のうち、起点から一番早く出発する利用者を  $i$  と表す。このとき、命題 2 と利用者  $i$  より早く出発する利用者が全員同じ経路を選択している事実より、次の関係式が成立することがわかる：

$$U_i^F(r, \mathbf{r}_{-i}^*) = U_i^F(r, \mathbf{r}_{-i}^{**}), \quad \forall r \in \mathcal{R}_i. \quad (17)$$

しかし、この関係式と式 (16) を組み合わせると、次の関係式が成立することになる：

$$U_i^F(r_i^{**}, \mathbf{r}_{-i}^{**}) = U_i^F(r_i^{**}, \mathbf{r}_{-i}^*) < U_i^F(r_i^*, \mathbf{r}_{-i}^*) = U_i^F(r_i^*, \mathbf{r}_{-i}^{**}).$$

これは明らかに  $\mathbf{r}^{**}$  が Nash 均衡状態であることと矛盾する。従って、背理法より命題が成立する。□

このように、順序特性は均衡の性質を調べるにあたり有用な性質であり、既存研究でも同様の特性を用いた解析が行われている<sup>22),23),24),25)</sup>。特に Satsukawa et al.<sup>26)</sup> は、この特性と ‘weakly acyclic ゲーム’ というゲーム・クラスにおける知見を活用し、DUE 配分問題における均衡状態の動的性質を解析している。以下では同様の手順を通して、SBPR-1 ネットワークでの DUE-FCP ゲームにおける進化ダイナミクスの収束性・安定性を解析していく。

### (3) DUE-FCP ゲームと weakly acyclic ゲーム

Weakly acyclic ゲームの定義には ‘better response path’ という概念を用いる。これは簡単に言えば better response dynamics によって生成される戦略プロファイルの連続 (path) であり、数学的には次のように定義される：ある時間の流れに沿って連続した戦略プロファイル  $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \dots, \mathbf{r}^L$  を考える。この path における任意の連続した戦略プロファイル  $\mathbf{r}^t, \mathbf{r}^{t+1}$  について、一人の利用者が利得を改善するように戦略を変更しているとき、すなわ

ち次の条件が成立しているとき、これを better response path と呼ぶ：

$$\begin{cases} r_{i^*}^t \neq r_{i^*}^{t+1}, & \text{s.t. } r_{i^*}^{t+1} \in D_{i^*}(\mathbf{r}^t), \\ r_j^t \neq r_j^{t+1}, & j \in \mathcal{P} \setminus \{i^*\}. \end{cases} \quad (18)$$

これを用いて、weakly acyclic ゲームは次のように定義される<sup>17),21)</sup>：

定義 3. 戦略空間  $\mathcal{R}$  を持つ有限ゲームを考える。全ての戦略プロファイル  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$  から、このゲームのいずれかの Nash 均衡状態に到達できる better response path が存在するとき、このゲームを weakly acyclic と呼ぶ。

Satsukawa et al.<sup>26)</sup> は、順序特性が存在する交通量配分ゲームが weakly acyclic game であることを示している。さらに weakly acyclic game における進化ダイナミクスの均衡状態への収束性や、確率安定均衡状態の存在性を示している。これらを応用することで、DUE-FCP ゲームに関する次の一連の定理や命題を得ることができる<sup>3)</sup>：

定理 5. SBPR-1 ネットワークにおける DUE-FCP ゲームは weakly acyclic ゲームである。

命題 3. SBPR-1 ネットワークにおける DUE-FCP ゲームを考える。また、任意の経路プロファイル  $\mathbf{r}^* \in \mathcal{R}$ 、およびこの経路プロファイルを狭義 Nash 均衡状態にする混雑課金パターン  $\mathbf{T}^*$  を考える。このとき、初期値に関わらず、better/best response dynamics は  $\mathbf{r}^*$  にほとんど確実に収束する、i.e.  $\mathbf{r}^*$  は大域的漸近安定状態である。

命題 4. SBPR-1 ネットワークにおける DUE-FCP ゲームを考える。また、任意の経路プロファイル  $\mathbf{r}^* \in \mathcal{R}$ 、およびこの経路プロファイルを狭義 Nash 均衡状態にする混雑課金パターン  $\mathbf{T}^*$  を考える。Logit response dynamics が適用されているとき、 $\mathbf{r}^*$  は確率安定状態となる。

### (4) 固定・進化的混雑課金スキームの性質の比較考察

では、DSO ゲームと DUE-FCP ゲームに関する性質の比較考察を通して、(SBPR-1 ネットワークにおける) 進化的・固定的な混雑課金スキームの違いについて見ていこう。まず、これらのゲームにおける均衡状態の動的性質からは、いずれの課金スキームにおいても自然な進化ダイナミクスにより最適状態が達成されることが示される。しかし、その最適状態を達成するメカニズムには、次の二つの大きな違いが存在する。

第一の相違点は、各課金スキーム導入下における外部性の構造の違いであり、これは進化ダイナミクスの収束過程に影響を与えうる。まず固定課金スキーム（あるいは DUE-FCP ゲーム）では、命題 2 の順序特性によ

<sup>3)</sup> 証明の詳細は Satsukawa et al.<sup>27)</sup> を参照されたい。

り、ある利用者の経路選択行動がより遅く出発する利用者の利得に影響を与える一方、より早く出発する利用者には影響を与えなくなる。このように利用者間の相互作用に時間的な非対称性がある場合、より早く出発する利用者ほど早い段階で事後的な (i.e. 均衡時の) 最適反応経路を選択する傾向にある<sup>26)</sup>：すなわち、交通状態の均衡状態への収束は、基本的に出発時刻が早い利用者の事後的な最短経路への変更を経て達成される。しかし各利用者の利得変化が総旅行時間と紐づけられていないために、収束過程において総旅行時間が減少していくとは限らないこともわかる。対照的に、進化課金スキーム (あるいは DSO ゲーム) では、外部性が完全に内部化されている。そのため、出発時刻に関係なく利得を改善できる、すなわち総旅行時間を改善できる任意の利用者の経路選択を通して、交通状態が均衡状態へと収束する。この違いからは、進化課金スキームでは総旅行時間がよりスムーズに減少しうることがわかる。

第二の相違点は、価格設定の明白な違いと関連する。すなわち、進化課金スキームでは課金額が日々調整されるのに対して、固定課金スキームではある既知の目標最適状態に応じて事前に設定される点である。この違いは、どの交通状態が安定化されるかに強く影響する。まず進化課金スキームでは、定理 4 で示されるように、最も効率的な大域的最適状態が安定化されるようになる。すなわち、複数の均衡状態 (i.e. 局所最適状態) が存在していても、そうした非効率的な状態への収束をゆらぎにより回避できることがわかる。一方固定課金スキームでは、命題 4 で示されるように、目標最適状態が唯一の均衡状態となり、かつ確率安定状態となる<sup>4</sup>。これは、(i) 大域的最適状態に関する情報が事前に知られていない限り非効率的な最適状態が常に安定化され、(ii) この場合ゆらぎにより非効率的な状態への収束を回避できないなど、ゆらぎが効率的な状態の達成に本質的な役割を果たさないことを意味している。こうした違いからは、たとえ効率的な状態に関する正確な情報が得られなくとも、進化スキームではより効率的な状態が実現しやすくなることがわかる。

以上をまとめると、進化課金スキームでは効率的な状態へと (総旅行時間の観点から) スムーズに収束し、かつその状態を事前の知識なしに安定化できることがわかる。従って、効率的な状態の達成にあたり、進化課金スキームは本質的に重要な役割を果たしていると結論づけられよう。

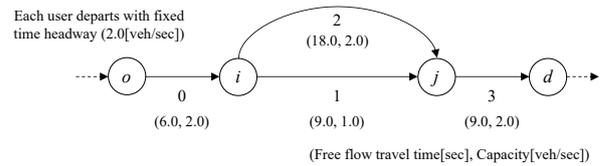


図-3 並行接続された2本のリンクから構成されたネットワーク

## 5. 数値実験

本章では、前章の進化・固定課金スキームに関する考察の妥当性を確認するために、DSO ゲームおよび DUE-FCP ゲームにおける確率進化ダイナミクスの数値実験を行う。

### (1) 数値計算設定

図-3 に本章で取り扱うネットワークを示す。このネットワークは1つの起終点ペアと2つの並行接続されたリンクから構成されている。各リンクは終端部にボトルネックを持ち、その容量および自由旅行時間は図中の括弧書きにまとめている。なお、リンク1を通る経路は最短距離の経路であり、これを「最短距離経路」と呼ぶ。利用者の総数は400人とし、これらは0.5 sec/vehの車頭間隔でネットワークに流入するものとする。

動的なネットワーク交通流について、リンクモデルは Newell の追従モデル<sup>30)</sup>を採用している。またノードモデルとしては、Daganzo のモデル<sup>19)</sup>を粒子体に拡張したものを用いている：合流ノードにおいて、下流側リンクに (複数存在する) 上流側リンクから同時に流入しようとする利用者が複数存在する場合、上流側リンクからの流出交通量がボトルネック容量の比率を満たすように、下流側に流入できる利用者を決定する。

本稿では、ゆらぎパラメータ  $\beta$  を固定し、DSO および DUE-FCP ゲームのそれぞれにおいて logit response dynamics を規定回数繰り返す。ただし DUE-FCP ゲームでは、目標状態と対応する混雑課金パターン  $\mathbf{T}$  を事前に設定する必要がある。これについては、まず DSO ゲームの数値計算を行い、これから得られる均衡経路プロファイル  $\mathbf{r}^*$  を目標状態とし、その状態における外部費用を固定課金額として設定する、i.e.  $T_i(r) = E_i(r, \mathbf{r}_i^*)$ 。より詳細な設定 (e.g. 初期経路プロファイルや  $\beta$  の値) については、以下で逐次説明する。

### (2) 数値計算結果 1：最適状態への収束過程

まず、各ゲームでの確率過程について、サンプルパスを見てみよう。ここでは、全利用者が最短距離経路を通る状態を初期状態とし、 $\beta = 2.0$  の logit response dynamics を 50,000 回繰り返す。固定課金スキームの目

<sup>4</sup> Sandholm<sup>28),29)</sup> は、静的な交通量配分を対象として、進化・固定課金スキーム導入下における均衡状態の安定性について同様の結論を得ている。混雑課金スキームの実装に際しての情報の非対称性に関する議論など、興味がある読者はこれらの文献を参照されたい。

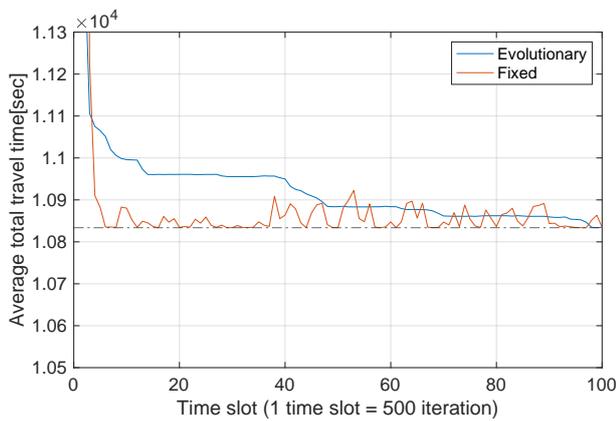


図-4 進化 (evolutionary)・固定 (fixed) 課金スキームにおける総旅行時間の挙動 (1 time slot = 500 回の繰り返し)

標状態は DSO ゲームで実現した均衡経路プロファイルのうち旅行時間が最小のものとしている。

図-4 に、各ゲームにおける総旅行時間の挙動を表すサンプルパスを示す；ただし、500 回の繰り返しごとに平均を取っている。図中の黒点線は、目標状態とした均衡経路プロファイルにおける総旅行時間を示している。まず固定課金スキーム (i.e. DUE-FCP ゲーム) を見ると、総旅行時間は比較的早く減少し目標状態における値へ近づいていることが見て取れる。しかし、目標状態の値近辺で振動し、悪化と改善を頻繁に繰り返していることがわかる。一方進化課金スキーム (i.e. DSO ゲーム) では、総旅行時間は大きく悪化することなく、およそ単調に減少した。これらの結果からは、進化課金スキームでは総旅行時間の観点において、交通状態がゆらぎに対してロバストである (i.e. 振動しない) ことがわかる。

導入した課金スキームに応じたこれらの違いは、前章で説明した第一の相違点、すなわち外部性の構造に起因するものと考えられる。具体的には、進化課金スキームでは利用者の利得変化が総旅行時間変化と紐づけられているため、経路選択にゆらぎが生じない限り総旅行時間は単調に減少する。そして、ゆらぎによりある利用者が総旅行時間を悪化させる経路を選択しても、悪化した総旅行時間を改善しようと全利用者が経路の変更を試みることになる。そのため総旅行時間がゆらぎにより大きく悪化することはない。一方固定課金スキームでは、利用者が利得改善経路を選択しても総旅行時間が改善されるとは限らない。加えて順序特性のために、ゆらぎにより交通状態が均衡状態から離れた場合、均衡に戻るためには再び出発時刻別に、利用者が最適反応経路を選択する必要がある。このために、交通状態が元の状態にスムーズに戻ることが難しくなり、ゆらぎに対してロバストでなくなると考えられる。

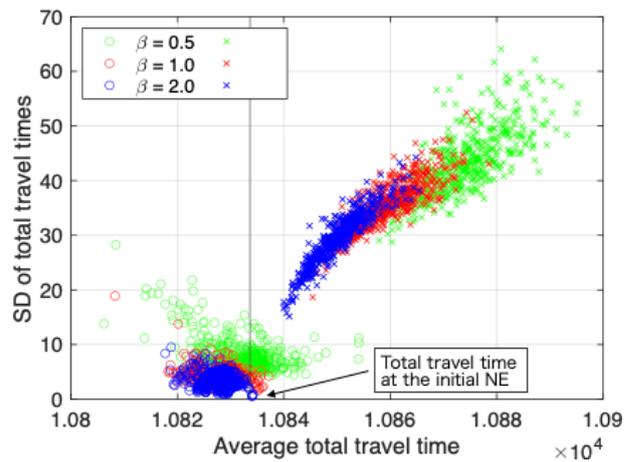


図-5 均衡状態周辺における総旅行時間の挙動の集計値。各点があるサンプルパスにおける総旅行時間の平均値および標準偏差の関係を表す。丸：進化課金スキーム、バツ：混雑課金スキーム

### (3) 数値計算結果 2：最適状態周辺での挙動

各課金スキームにおける総旅行時間のロバスト性を確認するために、最適状態周辺での挙動を見ていこう。ここでは、前節で目標状態とした均衡経路プロファイルを初期状態とした上で、logit response dynamics を 20,000 回繰り返す。こうしたサンプルパスを 500 パターン生成し、総旅行時間の挙動を分析する。なお、ゆらぎのパラメータについては次の 3 パターンを考える： $\beta = 2.0$ 、1.0 および 0.5。

図-5 に、各サンプルパスで実現した (20,000 の) 交通状態について、総旅行時間の平均値と標準偏差の関係をプロットした散布図を示す。この図からは、進化課金スキームでは、固定課金スキームより総旅行時間の標準偏差が小さいことがわかる。なおこの傾向はゆらぎが大きくなる ( $\beta = 2.0$  から  $\beta = 0.5$ ) ほど顕著となる。これは、進化課金スキームでは総旅行時間がゆらぎに対してロバストであるという、先ほどの考察結果と整合するものである。

次に総旅行時間の平均値について見てみると、固定課金スキームでは (この数値計算では) 必ず初期状態より大きくなっていることがわかる。対照的に、進化課金スキームでは、多くの場合、初期状態より小さくなっていることも見て取れる。これらの結果は、前章で説明した第二の相違点から導かれた考察を裏付けるものとみなせる。すなわち、固定課金スキームではゆらぎが効率的な状態の実現に寄与することなく交通状態を悪化させる一方で、進化課金スキームではゆらぎを導入することで、初期状態より効率的な交通状態へと遷移しやすくなっている。

各スキームにおけるゆらぎの影響を調べるために、フロー・パターン (経路プロファイル) がゆらぎによりどのように変化しているのかを見てみよう。このために、

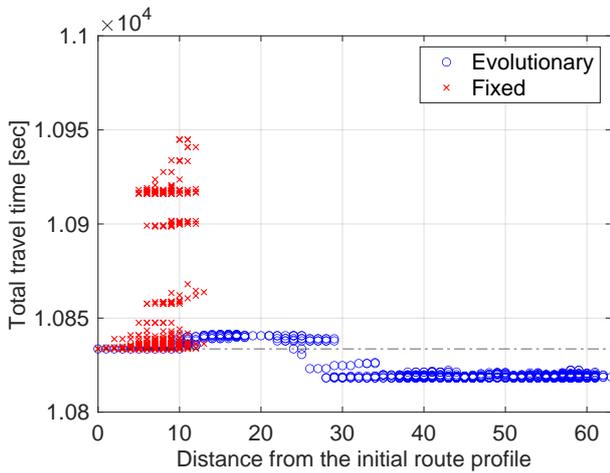


図-6 初期状態からの乖離度と総旅行時間の関係

各スキームからサンプルパスを一つずつ抽出し、そのパスで実現した各経路プロファイル  $r^r$  において、何人の利用者が初期状態と異なる経路を選択しているかを表す乖離度を求める。そして、乖離度と総旅行時間との関係について考察を行なう。

結果を図-6に示す。この図からまずわかることは、進化課金スキームでは、固定課金スキームと比較して乖離度が大きい経路プロファイルが実現できていることである。また総旅行時間との関係を見てみると、乖離度が小さいとき総旅行時間は初期状態より大きいが、乖離度が大きいとき総旅行時間は初期状態から改善されていることが見て取れる。この結果からは、進化課金スキームでは、ゆらぎを導入することで初期の局所最適状態から抜け出し、非効率的な状態を経た後より効率的な交通状態へと遷移できることがわかる。

一方、固定課金スキームでは、乖離度が小さい経路プロファイルのみ実現していることがわかる。これは、課金額が固定されることで初期均衡状態が安定化するために、経路プロファイルが総旅行時間を改善するほど初期状態から乖離していかないことを示している。そのため、固定課金スキームでは総旅行時間がただ増加する経路プロファイルを行き来せざるを得なくなり、結果として総旅行時間が改善されないことがわかる。こうした数値実験からも、効率的な状態を達成するにあたり進化課金スキームが重要な役割を果たしていることが確認できる。

## 6. 終わりに

本稿では、粒子体の利用者を想定した DSO 配分問題を考え、その収束性と安定性を解析した。まず、DSO 配分問題を、各利用者が自身の社会的限界費用を最小化するように経路を選択する戦略型ゲームとして定式化した。次にこの DSO ゲームがポテンシャル・ゲーム

であり、各均衡状態が総旅行時間を最小化する最適化問題の局所あるいは大域的最適状態と対応することを示した。そして、ポテンシャル・ゲームにおいて蓄積された知見を用いて、確定的な進化ダイナミクスである better/best response dynamics の最適状態への収束性、および確率進化ダイナミクスの logit response dynamics における大域的最適状態の確率安定性を示した。

さらに、この解析の応用として、限界費用課金の進化的・固定的遂行スキームの特性を比較考察した。具体的には、各利用者が固定課金パターンを考慮して自身の利得を最大化する経路を選択する DUE-FCP ゲームを定式化し、このゲームの weakly acyclicity より最適状態への収束性および確率安定性を示した。そして DSO ゲームと DUE-FCP ゲームにおける外部性の構造および安定状態の違いから、固定課金スキームに対する進化課金スキームの次の特性を明らかにした：(i) 総旅行時間がスムーズに (i.e. 単調に) 減少していくこと、および (ii) より効率的な状態が安定しうること。

最後に、これらの考察を検証するために数値実験を行ない、その結果から各考察の妥当性および進化課金スキーム導入下での総旅行時間のロバスト性および効率性を確認した。また、固定課金スキームでは特定の交通状態が安定化しすぎた結果、効率的な状態へと遷移することが容易でなくなり、総旅行時間が改善されていないことを示した。これらの結果から、効率的な交通状態の実現にあたり進化課金スキームの重要性を明らかにした。

今後の研究の方針としては、まず、理論解析と系統的な数値実験を通して、最適状態におけるフロー・パターンの特性を明らかにすることが重要である。そのためには、大規模ネットワークにおける最適状態を計算できる効率的な数値計算アルゴリズムの確立が必要となるだろう。また、出発時刻選択を組み合わせたより一般的な DSO 配分への、本稿の解析アプローチの適用可能性を探ることも重要となるだろう。

さらには、最適状態を達成するための別種類のスキーム、例えば、自動運転走行システムを介した道路利用者の制御スキームなどを追求することも興味深い。DSO ゲームは全利用者が自動運転車である場合には直接適用することができる。しかし、通常車両が混在した交通システムなど、現実にはより複雑な状況も存在する。このような状況を戦略型ゲームとして定式化し、その理論的性質を導入することは、今後の研究の重要な課題である。

謝辞： 本研究は、日本学術振興会 科学研究費補助金、基盤研究 (A) (課題番号：20H00265) および基盤研究 (B) (課題番号：JP20H02267) の助成を受けた研究の一

部である。

#### 参考文献

- 1) Merchant, D. K. and Nemhauser, G. L.: A model and an algorithm for the dynamic traffic assignment problems, *Transportation Science*, Vol.12, No.3, pp.183–199, 1978.
- 2) Merchant, D. K. and Nemhauser, G. L.: Optimality conditions for a dynamic traffic assignment model, *Transportation Science*, Vol.12, No.3, pp.200–207, 1978.
- 3) Carey, M. and Srinivasan, A.: Externalities, average and marginal costs, and tolls on congested networks with time-varying flows, *Operations Research*, Vol.41, No.1, pp.217–231, 1993.
- 4) Nie, Y. M.: A cell-based Merchant-Nemhauser model for the system optimum dynamic traffic assignment problem, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.45, No.2, pp.329–342, 2011.
- 5) Ziliaskopoulos, A. K.: A linear programming model for the single destination system optimum dynamic traffic assignment problem, *Transportation Science*, Vol.34, No.1, pp.36–49, 2000.
- 6) Carey, M. and Watling, D.: Dynamic traffic assignment approximating the kinematic wave model: System optimum, marginal costs, externalities and tolls, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.46, No.5, pp.634–648, 2012.
- 7) Kuwahara, M., Yoshii, T., and Kumagai, K.: An analysis on dynamic system optimal assignment and ramp control on a simple network, *Journal of Japan Society of Civil Engineers*, Vol.2001, No.667, pp.59–71 [In Japanese], 2001.
- 8) Muñoz, J. C. and Laval, J. A.: System optimum dynamic traffic assignment graphical solution method for a congested freeway and one destination, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.40, No.1, pp.1–15, 2006.
- 9) Zhao, C.-L. L. and Leclercq, L.: Graphical solution for system optimum dynamic traffic assignment with day-based incentive routing strategies, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.117, No.15, pp.87–100, 2018.
- 10) Shen, W. and Zhang, H. M.: On the morning commute problem in a corridor network with multiple bottlenecks: Its system-optimal traffic flow patterns and the realizing tolling scheme, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.43, No.3, pp.267–284, 2009.
- 11) Zhang, H. M. and Shen, W.: Access control policies without inside queues: Their properties and public policy implications, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.44, No.8-9, pp.1132–1147, 2010.
- 12) Ghali, M. and Smith, M.: A model for the dynamic system optimum traffic assignment problem, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.29, No.3, pp.155–170, 1995.
- 13) Qian, Z. S., Shen, W., Zhang, H. M., Sean, Z., Shen, W., and Zhang, H. M.: System-optimal dynamic traffic assignment with and without queue spillback: Its path-based formulation and solution via approximate path marginal cost, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.46, No.7, pp.874–893, 2012.
- 14) Shen, W., Nie, Y., and Zhang, H. M.: On path marginal cost analysis and its relation to dynamic system-optimal traffic assignment, *Proceedings of the 17th international symposium on transportation and traffic theory*, (Ed. by R. E. Allsop, M. G. H. Bell, and B. Heydecker), pp. 327–360, London, England, 2007, Elsevier.
- 15) Zhang, P. and Qian, S.: Path-based system optimal dynamic traffic assignment: A subgradient approach, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.134, pp.41–63, 2020.
- 16) Carey, M.: Nonconvexity of the dynamic traffic assignment problem, *Transportation Research Part B*, Vol.26, No.2, pp.127–133, 1992.
- 17) Young, H. P.: The evolution of conventions, *Econometrica*, Vol.61, No.1, pp.57–84, 1993.
- 18) Daganzo, C. F.: The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.28, No.4, pp.269–287, 1994.
- 19) Daganzo, C. F.: The cell transmission model, part II: Network traffic, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.29, No.2, pp.79–93, 1995.
- 20) Blume, L. E.: The statistical mechanics of strategic interaction, *Games and Economic Behavior*, Vol.5, No.3, pp.387–424, 1993.
- 21) Marden, J. R. and Shamma, J. S.: Revisiting log-linear learning: Asynchrony, completeness and payoff-based implementation, *Games and Economic Behavior*, Vol.75, No.2, pp.788–808, 2012.
- 22) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Dynamic equilibrium assignment with queues for a one-to-many OD pattern, *Proceedings of the 12th International Symposium on the Theory of Traffic Flow and Transportation*, (Ed. by C. F. Daganzo), pp. 185–204, Berkeley, 1993, Elsevier.
- 23) Akamatsu, T., Wada, K., and Hayashi, S.: The corridor problem with discrete multiple bottlenecks, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.81, No.3, pp.808–829, 2015.
- 24) Iryo, T. and Smith, M. J.: On the uniqueness of equilibrated dynamic traffic flow patterns in unidirectional networks, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.117, pp.757–773, 2018.
- 25) Wada, K., Satsukawa, K., Smith, M. J., and Akamatsu, T.: Network throughput under dynamic user equilibrium: Queue spillback, paradox and traffic control, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.126, pp.391–413, 2019.
- 26) Satsukawa, K., Wada, K., and Iryo, T.: Stochastic stability of dynamic user equilibrium in unidirectional networks: Weakly acyclic game approach, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.125, pp.229–247, 2019.
- 27) Satsukawa, K., Wada, K., and Watling, D. P.: Dynamic system optimal traffic assignment with atomic users: Convergence and stability, *Working paper*, 2020.
- 28) Sandholm, W. H.: Evolutionary implementation and congestion pricing, *Review of Economic Studies*, Vol.69, No.3, pp.667–689, 2002.
- 29) Sandholm, W. H.: Pigouvian pricing and stochastic evolutionary implementation, *Journal of Economic Theory*, Vol.132, No.1, pp.367–382, 2007.
- 30) Newell, G. F.: A simplified car-following theory: A lower order model, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.36, No.3, pp.195–205, 2002.

(2020. 9. 30 受付)

A POTENTIAL GAME APPROACH TO THE ANALYSIS OF CONVERGENCE AND  
STOCHASTIC STABILITY OF DYNAMIC SYSTEM OPTIMAL ASSIGNMENT

Koki SATSUKAWA and Kentaro WADA