最大固有値を用いた道路ネットワーク接続性向上に関する研究

安藤　宏恵[1]・倉内　文孝[2]・朝倉　康夫[3]・中西　航[4]

[1]正会員　東京工業大学研究員　環境・社会理工学院（〒152-8552 東京都目黒区大岡山2-12-1）
E-mail:ando.h.ag@m.titech.ac.jp

[2]正会員　岐阜大学教授　工学部社会基盤工学科（〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸1-1）
E-mail:kurauchi@gifu-u.ac.jp

[3]正会員　東京工業大学教授　環境・社会理工学院（〒152-8552 東京都目黒区大岡山2-12-1）
E-mail:asakura@plan.cv.titech.ac.jp

[4]正会員　東京工業大学助教　環境・社会理工学院（〒152-8552 東京都目黒区大岡山2-12-1）
E-mail:nakanishi@plan.cv.titech.ac.jp

社会を支える交通システムにおいて重要な役割を担う道路ネットワーク評価手法はこれまでにも多く研究されており，近年，ネットワーク固有の接続形態に基づく指標による道路ネットワーク連結性・接続性に関する研究がおこなわれている．本研究はその一つとして，有向グラフに適用可能であり，対象とするネットワークにおいて唯一である最大固有値に基づく指標を用いた道路ネットワーク接続性評価の検討をおこなう．重み付き有向グラフにおける最大固有値の定義を示すとともに，重みの分布や接続状況に対して最大固有値が持つ特性を明らかにする．また，新たに重みを加えることによってリンクの補強を表現し，重みの追加がネットワークにもたらす影響について最大固有値指標に基づいた評価の傾向を把握する．

Key Words : *road network, largest eigenvalue, eigen vector, connectivity*

1. はじめに

社会の経済活動や日常生活の維持において道路が果たす役割は非常に大きく，安全かつ円滑な交通を確保するための重要なインフラ設備のひとつである．しかしながら，交通渋滞や事故などによって発生する大幅な遅延や通行止めなどは依然として課題である．さらに，近年わが国では台風，豪雨，地震等の大規模災害が頻発しており，災害発生後の状況下では避難経路の確保や重症な被災者の搬送，物資輸送，復旧復興支援のための輸送に使用されるなど，平常時より増して重要性が高まる道路の整備は喫緊の課題であるといえる．

このような背景のもと道路ネットワーク分析に関する研究は多く実施されている．災害時に有用な指標としては，ノードペア間が移動可能な確率によって評価する連結信頼性[1]や平常時の最短経路に対して許容できる迂回長の範囲において，OD間移動が可能な確率により評価するOD間連結度指標[2]が提案されている．また，接続脆弱性[3]はノードペア間を接続する経路のうち共有するリンクを持たない独立な経路を数え上げることで評価する．事象の生起確率に依存せず影響の大きさを評価する脆弱性は，D'Este and Taylor[4]によって“ネットワークの弱さ”を測る指標として定義され，少数のリンク途絶によりアクセシビリティが大きく低下するノードや，途絶した際に深刻なアクセシビリティの低下を引き起こすリンクをそれぞれ脆弱なノード，重要なリンクとしている．平常時の道路ネットワーク信頼性評価では，Bell and Iida[5]によって任意の時間内において目的地に到達可能な確率により評価する時間信頼性が提案され，Ngら[6]はN番目までの移動時間分布のみを活用し移動時間信頼性の最悪なケースを明らかにする手法を示している．さらに，潜在的な旅行需要を満たすことができる確率によって定義される需要満足度信頼性[7]，道路ネットワーク上を流れる交通需要を交通容量内で捌くことができるかどうかにより評価する容量信頼性[8]などがある．

以上のような従来の交通工学的手法が多く存在する一

方，推定が困難な災害時の需要パターンや事象の生起確率を必要とせず，簡便な計算アルゴリズムによって評価可能であるという観点から，Network Scienceの知見を援用した道路ネットワーク評価手法も多く研究され始めている．例えば，Mattoson and Jenelius[9] は全てのノードペア間のユークリッド距離と道路上の最短距離の比較によるネットワーク接続効率性指標を提案している．また中心性指標を用いた道路ネットワーク分析に関する研究も活発であり，Duanら[10] は次数中心性と媒介中心性を用いて中心性指標が道路ネットワーク頑健性に効果的であることを示した．Curacittiら[11] は4つの中心性指標（近接中心性，媒介中心性，Straightness 中心性，Informap 中心性）を用いた階層的クラスタリング手法によって9都市の道路ネットワークを分類し，中心性指標の組み合わせにより都市全体の構造的類似性が明らかになることを示した．

Network Scienceに基づく研究のなかでも固有値による分析に着目すると，Laplacian 行列（次数行列−隣接行列）の第二最小固有値によって定義される代数的連結度，それに対応する固有ベクトル（Fiedler ベクトル）を用いて道路ネットワークの連結性，接続性が評価されている[12),13)]．Fiedlerベクトルの符号が異なるノードを接続するリンクはネットワーク内の連結が脆弱となるカットセットを特定する．代数連結度を用いたリンク追加によるネットワーク接続性向上に関する研究として，Wang and Van Mieghem[14] はランダムネットワークとBAモデルネットワーク[15] を対象にFiedler ベクトルの差の絶対値が大きなノードペアへのリンク追加が及ぼす影響を接続性評価の観点から検証している．

無向グラフを前提とするLaplacian 行列に基づく指標に対し，有向グラフの分析が可能な隣接行列の最大固有値に対応する固有ベクトル（固有ベクトル中心性）[16] によるネットワーク接続性評価がおこなわれている．例えばWang and Cullinane[17] は配送ネットワークを対象に港のアクセス性を固有ベクトル中心性指標により評価している．道路ネットワークでは，有向グラフが適用可能なことにより，重み付きネットワークにおいて非対称な隣接行列となり得る交通現象を重みの属性として扱うことができる．したがって，車線数，交通量，混雑度等の上下線で値が異なる特徴の考慮が可能である．さらに，一方通行道路を含むことが可能であることに加え，交通事故や災害による片方向交通止めの影響評価などが有向グラフ活用例として考えられる．安藤ら[18] は道路整備による経年的なネットワークの変化に対して，交通容量を重みとする固有ベクトル中心性により道路ネットワークの接続性が評価可能であることを示した．固有ベクトル中心性は重要なノードと接続しているノードと多く隣接している場合に中心性が高くなるという指標であり，重要度の高いノードと接続することでより重要度が増すという性質を持つ．隣接ノードだけではなく周辺ノードからもたらされる伝播的な影響を考慮可能である利点がある一方，ネットワーク内の相対的な評価にとどまるため，リンクやノードの欠損または追加等の影響を評価しづらいという欠点を持つ．そのため本研究では，固有ベクトル中心性の基となり，対象とするネットワークに唯一である最大固有値の指標に着目し，道路ネットワーク接続性評価の可能性について検証する．

最大固有値に基づくネットワーク接続性の観点では，Cheungら[19] は港湾ネットワークを対象に接続性向上に大きく寄与する単独追加リンクの特定をおこなっている．また，道路ネットワークの評価としては，重みなし無向グラフのみを対象とし，隣接行列の最大固有値の二進対数によって表されるNetwork Entropyの値と平均非重複経路数[20] に正の相関があることが明らかにされている[21]．全ノードペア間の平均非重複経路数が多いほどネットワークは頑健であるといえるため，最大固有値に基づくNetwork Entropyの値の頑健性指標としての可能性が示されている．有向グラフを対象とした最大固有値について，他のネットワーク指標との比較により解釈を考察するものは管見の限り行われていない．本研究では，先述した有向グラフを対象とする道路ネットワーク評価の利点に着眼し，最大固有値の指標が道路ネットワークの補強を考える際にどのような活用が可能であるのか検討する．具体的には重み付き有向グラフにおける最大固有値の定義を示し，重みの分布と接続状況に対して最大固有値が持つ特性について整理する．さらに，最大固有値の指標に基づいたリンク補強案が示す傾向を明らかにする．

2. 有向グラフにおける最大固有値

ここでは，重み付き有向グラフにおける最大固有値とそれに対応する固有ベクトルの性質について説明する．あるネットワークが$G=(\mathbf{V},\mathbf{E},\mathbf{w})$で表現されるものとする．ただし，$\mathbf{V}$はノードの集合，$\mathbf{E}$はリンクの集合，そして$\mathbf{w}$は各リンクに紐付けられた重み（$>0$）$n=|\mathbf{V}|$とする．このとき隣接行列$\mathbf{A}_G$は，大きさ$n\times n$であり，以下を要素に持つ行列である．

$$a_{ij}=\begin{cases} w_e & \text{if } e=(i,j)\in\mathbf{E}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

つまり，ネットワーク上のノードiからjに向けてリンクがある場合，そのリンクに対応する重みw_eを要素に持つ．重みを考慮しない場合は，$w_e=1$とする．本研究で対象とするネットワークGは有向グラフであり，その隣接行列$\mathbf{A}_G$はすべての成分が非負実数である非負行列$\mathbf{R}$に対し$\mathbf{A}_G\in\mathbf{R}$とする．

ネットワークGが有向グラフであるとき，その連結性

について考える．Gの2頂点$i, j \in \mathbf{V}$を方向を持ついくつかのリンク$e \in \mathbf{E}$でつないだものを有向路という．

定理1：有向グラフ$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$の任意の頂点$i, j \in \mathbf{V}$を結ぶ有向路が存在するときは，$G$は強連結であるという．ネットワーク$G$が強連結であるとき，その隣接行列$\mathbf{A}_G$は既約行列である．

証明1：既約でない行列は可約行列といわれる．行列$\mathbf{A}$を可約行列だと仮定すると以下の形に区分できる．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \tag{2}$$

ただし，$\mathbf{A}_{11} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}$，$\mathbf{A}_{22} \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_2}$，$n_1 + n_2 = n$である．このとき，対応するネットワークではノード集合$\mathbf{v}_1 = \{1, \ldots, n_1\}$とノード集合$\mathbf{v}_2 = \{n_1 + 1, \ldots, n\}$を互いに接続するリンクが存在しない．したがって$\mathbf{v}_2$から$\mathbf{v}_1$への有向路が存在しないためこのネットワークは強連結でないといえる．これより，ネットワークGが強連結である限り隣接行列$\mathbf{A}_G$は既約行列であることがわかる．■

定理2：非負かつ既約である行列$\mathbf{A}_G$に対しPerron-Frobeniusの定理より以下のことが成立する．

1. $\mathbf{A}_G$は正，かつ実数の最大固有値λ^*をもつ．
2. 最大固有値λ^*の代数的重複度は1であり，$\mathbf{A}_G$の固有方程式の単純根である．
3. 最大固有値λ^*に対応する固有ベクトル$\mathbf{x}^*$の成分はすべて正（またはすべて負）である．

すべての成分が正（またはすべて負）となる固有ベクトル$\mathbf{x}^*$はスカラー倍である$\mathbf{c}\mathbf{x}^*$（$\mathbf{c}$：定数）を除いて唯一である．また，ベクトル成分の絶対値の総和が1となる固有ベクトルをPerronベクトルと呼ぶ．

証明2：非負かつ既約を満たす行列におけるPerron-Frobenius定理の成立についてはMeyer[22] Section 8.3 Nonnegative Maticesによって証明されている．

本研究ではネットワーク内の既存リンクに重みを追加または新規リンクの追加による影響を検証することを目的の一つとしているため，重み追加時の最大固有値について以下に述べる．なお，ネットワーク内のリンクの有無にかかわらず重みを追加するノードペア(i, j)の集合を$\mathbf{S}$とする．

定理3：非負かつ規約である行列$\mathbf{A}$に対し，非負行列$\mathbf{B} = \{B_{ij} > 0 \; if \; (i, j) \in \boldsymbol{S},\; B_{ij} = 0 \; otherwise\}$があるとき，行列$(\mathbf{A} + \mathbf{B})$の最大固有値は行列$\mathbf{A}$の最大固有値よりも大きい[18]．

証明3：隣接行列$\mathbf{A}$の最大固有値を$\lambda^*_{\mathbf{A}}$，それに対応する固有ベクトルを$\mathbf{x}^*$とおくと，定理2で述べたPerron-Frobeniusの定理より$\lambda^*_{\mathbf{A}} > 0$，$\mathbf{x}^* > 0$，$\|\mathbf{x}^*\| = 1$である以下の式が成り立つ．

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda^* \mathbf{x} \tag{3}$$

ここで隣接行列$\mathbf{A}$に非負行列$\mathbf{B} = \{B_{ij} > 0 \; if \; (i, j) \in \boldsymbol{S},\; B_{ij} = 0 \; otherwise\}$を加えた行列を$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$とする．$\mathbf{A}$が示すネットワークが強連結であるとき，$\mathbf{C}$を隣接行列とするネットワークも必ず強連結となるため，$\mathbf{C}$は既約行列である．このとき，

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} > A_{ij} \quad (i, j) \in \boldsymbol{S} \tag{4}$$

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = A_{ij} \quad (i, j) \notin \boldsymbol{S} \tag{5}$$

となる．ここで，隣接行列$\mathbf{A}$の任意の固有値をλとするとすべての$i = 1, \ldots, n$に対し以下が成り立つ．

$$\lambda x_i = \textstyle\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \tag{6}$$

$$|\lambda||\mathbf{x}_i| = \left|\textstyle\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j\right| \le \textstyle\sum_{j=1}^{n} A_{ij}|x_j| \le \textstyle\sum_{j=1}^{n} C_{ij}|x_j| \tag{7}$$

式(4)，(5)より，$\boldsymbol{S}$に属するノードペア(i, j)が存在する限り，

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} A_{ij}|x_j| < \textstyle\sum_{j=1}^{n} C_{ij}|x_j| \tag{8}$$

$$\lambda^*_{\mathbf{A}} < \lambda^*_{\mathbf{C}} \tag{9}$$

したがって，行列$(\mathbf{A} + \mathbf{B})$の最大固有値は行列$\mathbf{A}$の最大固有値よりも大きくなる．■

本研究では，上記の性質を持つ重みつき有向グラフの最大固有値に基づくネットワーク接続性の評価について検証をおこなう．

3. リンク増強時の最大固有値の性質

本章では，重み付き有向グラフにおいて既存または新規のリンクに重みを追加する際，最大固有値がどのような挙動を示すのか簡単なテストネットワークを用いて検証する．用いるネットワークは図-1に示すようにノード数5，有向リンク数10の強連結なネットワークである．重みの最小値50，最大値100，平均値77，最大固有値λ^*は160.922である．

(1) 既存リンクへの重みの追加

まず，既存リンクへの重み追加時における最大固有値の挙動について確認する．重みを追加するノードペア(i, j)の集合を$\mathbf{S} = \{(i, j) \in \mathbf{V}: A_{ij} > 0\}$とする．追加する重みの値を最小値，平均値，最大値として，各リンク1本ずつに追加した際の最大固有値の変動傾向について検証した．それぞれの重みの値を追加した3つケースにおいて，重み追加後の最大固有値に基づく10本の既存リンクの順位は等しい結果となった．つまり，最大固有値を高める効果が高いリンクは，追加する重みの値によって変化することはないといえる．例として追加する重みを100としたケースでは，最も最大固有値が大きい結果となったリンク1（ノード1→2）への追加時において最大固有値は191.691，次点がリンク6の187.196，リンク7の184.349と続いた．また，3つのケースすべてにおいて最大固有値が最も大きい結果となったリンク1では，追加する値50のとき176.927，77のとき185.040，100のとき

191.691となり，追加する重みの値が大きくなるにつれて最大固有値の増加していることがわかる．この傾向は他のリンクすべてにおいても同様であった．つぎに，複数の既存リンクへ同時に重みを追加した際の最大固有値の挙動を示す．10本の既存リンクの中から3本を選択し，それぞれの100ずつの重みを追加したとき，120パターンのうち最大固有値が高くなる上位5パターンの結果を**表-1**に示す．各リンク番号の括弧内の数字は，上記の各リンク1本ずつに重みを追加した際の最大固有値の順位を示す．最大固有値が最も大きくなる3本の組み合わせはリンク1，6，7であり1本ずつ重みを追加した際の上位3本と一致する．しかしながら3本同時重み追加時に2位となったリンク1，4，6の組み合わせは単独の重み追加時には5位であったリンク4も含まれていることから，必ずしも1本ずつ重みを追加した際の順位通りの組み合わせではなく，同時に追加することの相乗効果により最大固有値が大きくなるリンクの組み合わせが存在することがわかった．

(2) 重みをもつ新規リンクの追加

ネットワーク上に重みをもつ新たなリンクを加えることによる最大固有値の挙動を確認する．重みを追加するノードペア(i,j)の集合を$\mathbf{S} = \{(i,j) \in \mathbf{V}: A_{ij} = 0\}$とする．試算に使用したネットワークでは$\mathbf{S}$の要素であるノードペアは 10 であった．追加する重みは既存リンクへの追加時と同様に，ネットワーク内の重みの最小値 50，最大値 100，平均値 77 とする．それぞれのノードペア 1 つずつに重みを追加し最大固有値を求めた結果，傾向は既存リンクへの重み追加時と同じく，新規リンクが持つ重みの大きさによって最大固有値に及ぼす効果が変化することはなかった．また，新規リンクを構成する 10 ノードペアすべてにおいて，追加する重みが増加するにつれて最大固有値の値も増加する傾向が確認された．つぎに，複数の新規リンク追加時の最大固有値が示す挙動について検証する．10 個のノードペアから 3 ペアを選択しそれぞれ 100 の重みをもつ新規リンクとしてネットワーク内に追加する．このとき，最大固有値が最大となるパターンを**図-1** 中の赤いリンクで示し，それに対して 1 ペアずつ追加した際の上位 3 ノードペアを点線リンクで示す．単独追加時に最も最大固有値が大きくなるノードペア (3,2) は 3 ペア同時追加時に最大となるパターンにも含まれる．しかし，単独追加時の上位 3 つのペアが同時に追加されるパターンは 120 パターン中 55 番目の最大固有値であり，既存リンクへの重み追加時と同じく同時に接続することにより最大固有値が増加するノードペアの組み合わせが存在することがわかった．

新たに追加する複数リンクの重みを均一ではなく分配した際の最大固有値の変化を**図-2** に示す．ここでは合わせて 100 の重みをもつ 2 本の新規リンクをネットワークに加えることとし，パターン 1 としてノードペア (2, 5)(3,2) の 2 本を，パターン 2 としてノードペア (3,4)(4, 1) の 2 本を追加する．パターン 1 では**図-2** 中の赤で示す動きより，$w_{(2,5)} = 0$，$w_{(3,2)} = 100$ の時の最大固有値 190.850 が最も大きく$w_{(3,2)}$ の値が小さくなるほど最大固有値も単調に減少していることがわかる．一方パターン 2 では$w_{(3,4)} = 50$，$w_{(4,1)} = 50$ の時の最大固有値 181.184 が最も大きく，2 本のリンクの間で均等に重みを配分することにより最大固有値を大きくなる．ここで示すノードペア(3,2)のように 1 本で非常に大きな影響をもつ新規リンク候補もあれば，追加する重みの合計値は変わらずともいくつかのリンクに分配し追加するほうが最大固有値への効果が大きくなる候補も存在することがわかった．

以上の簡易ネットワークを用いたリンク増強時の最大固有値の性質に関する検証により，単独リンクへの重み追加は既存，新規に関わらず追加する重みの値が大きい

表-1 最大固有値上位 5 パターンの組み合わせ

順位	最大固有値	リンク A	リンク B	リンク C
1	257.070	1 (1)	6 (2)	7 (3)
2	253.791	1 (1)	4 (5)	6 (2)
3	252.294	1 (1)	6 (2)	8 (4)
4	249.977	1 (1)	4 (5)	8 (4)
5	247.401	4 (5)	6 (2)	8 (4)

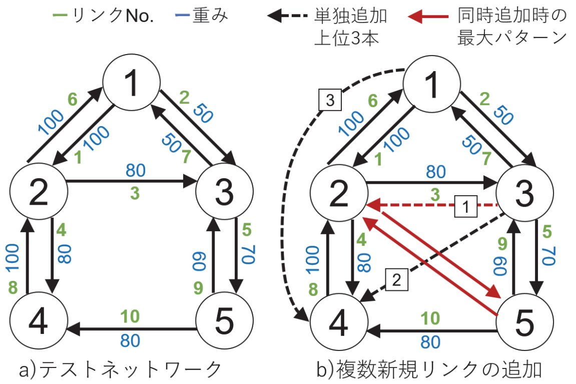


図-1 試算に使用したネットワークと計算結果

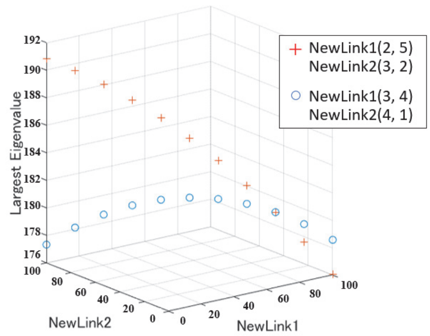


図-2 複数リンク追加時の重み配分と最大固有値

ほど最大固有値は単調に増加すること，複数リンクを増強する場合には同時に重みを追加することでより影響が大きくなる組み合わせが存在すること，総追加重みの値は同じでも組み合わせ内の重み分布によって最大固有値は変化することが確認できた．

4. 重みの分布・配置と最大固有値の関係

本章では，道路ネットワークの特徴を持つ重み付き有向グラフにおける重みの分布や接続状況が最大固有値とどのような関係を持つのか，SiouxFalls network，実道路ネットワークを用いて検証する．図-4に示す一方通行道路を含むSiouxFalls network（ノード数24，リンク数67）において総重み量670000となる条件のもと，各リンク5000から15000までの範囲内でランダムな重みを1000パターン作成した．ここでの重みは交通容量を想定した値とし，ノードペア間では両方向同一の値を持つこととしている．このときの重みの中央値，範囲（最大値−最小値）と最大固有値の散布図を図-3に示す．中央値，範囲どちらにおいても最大固有値との強い相関はみられないことがわかる．総重み量が定められている条件において，重み分布の偏りが最大固有値に直接的に影響を及ぼすことはないといえるため，それらがどのように接続しているのかが重要になると考えられる．ランダムに設定された重み1000パターンのうち，最大固有値が最も大きい例（36822.68）と最も小さい例（28891.30）の重み分布と対応するノードの固有ベクトルの順位配置を図-4，図-5に示す．なお，全てのリンクの重みを10000とする均一な重み分布における最大固有値は30781.59であり，均一な重みを持つネットワークほど最大固有値が高く評価されるという傾向はない．図-4の最も大きい例の重み分布をみると，固有ベクトルが高いノード（赤）が集中していることからもわかるようにノード16周辺に大きな重みを持つリンクが互いに接続されていることがわかる．反対に最も小さい例では固有ベクトルの高いノードは散在しており，大きな重みを持つリンク同士が接続している箇所が多くないかつ集中していないことがわかる．このことから，ネットワーク内に非常に強く接続する部分が集中することにより最大固有値が大きくなるのではと推測される．

ネットワーク内において強く接続する部分の補強が最大固有値に及ぼす影響が大きいという仮説を検証するため，最も最大固有値が大きくなるリンクを1本ずつ加える，あるいは既存リンクであればその分重みを追加し，それらがどのように配置されるのかを確かめる．計算手順は，予め追加する重みの値を任意に設定し，全ノードペアを対象に1ペアずつ重みを追加し最大固有値を計算

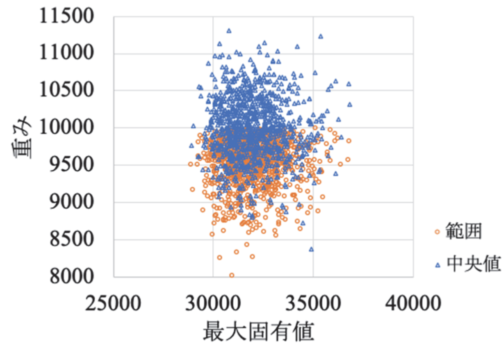


図-3 重みの範囲・中央値と最大固有値

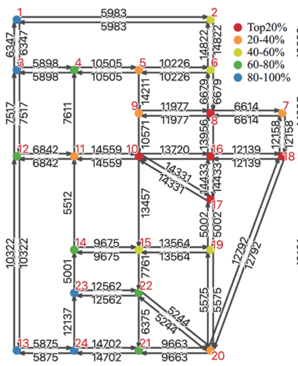


図-4 重み分布（最大）

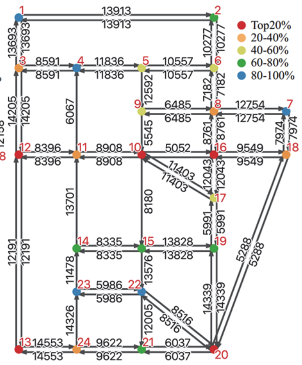


図-5 重み分布（最小）

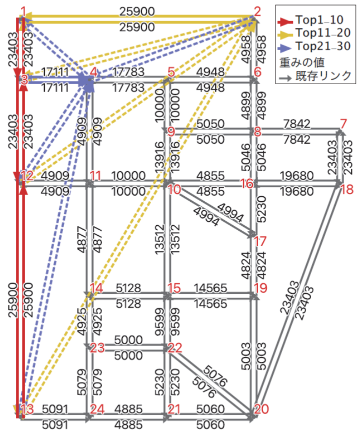


図-6 既存・新規リンクへの重み追加上位 30 ノードペア

する．最も最大固有値が大きくなるノードペアを特定し，実際に重みを追加する．すでに重みを追加したノードペアを除く残りのペアを対象に1本ずつ重みを追加し最大固有値を計算し，次に追加すべきノードペアを特定し追加するという手順を繰り返す．既存の重みを持つSiouxFalls Networkを対象に，追加する重みの値を既存の重みの平均値である10247として計算した結果，上位30ノードペアを接続したリンクを図-6に示す．各リンクの値は既存の重み値，点線リンクは新規リンクを表す．上位10番目までのリンクはノード1，3，12，13を互いにかつ重なり合って接続する既存リンクと新規リンクで構成されている．これらのリンクは既存の重みがすでに大きな値であるという特徴をもつ．また，上位1から4番目までのノードペアはそれぞれ(12,3)(3,12)(1,3)(3,1)となっており，既存の重みが大きいことに加えて，ノードペ

ア両端のノードがどちらも大きな重みを持つリンクと接続するという特徴がある．上位30番目までのノードペアの傾向をみると，ノード1，3，12，13を基にノード2，つぎにノード4との接続をより強固にするような重みの追加をしていることがわかる．このことからも，最大固有値を大きくするためのリンク補強は，強く接続する部分をさらに補強かつ拡張させているといえる．実際の道路ネットワークへの適用例として，岐阜県の県道以上を対象とした道路ネットワーク（ノード数1,460，リンク数4,578）において同様の手順で計算した際の結果を**図−7**に示す．重みの値として交通容量を使用し，追加する重みは既存容量の平均値である13435とした．特に既存の容量が大きな高規格道路のみではなく，中心市街地をはじめとして順に重みが追加されている点に着目すると，大きな重みを持つリンクと複数接続することに基づく接続性強化が最大固有値によって評価されていると考えられる．

5. 最大固有値最大化問題の構築

ここまでの検証により，リンク増強のための指標として最大固有値を扱う場合，同時に複数リンクを対象にそれぞれ異なる程度の増強を施したときの効果を考える必要があるといえる．本章では，追加される重みの総量が定まっている状況で最大固有値を最大化するためには，どのリンクにどの程度の重みを追加するべきなのかを明らかにする最大固有値最大化問題を定式化し，簡易なネットワークに適用する．

総追加重み量，各リンクの追加重み量を制約条件に最大固有値最大化とする隣接行列を求める問題を次のように記述する．

$$\max_{\mathbf{B}} \lambda^* \tag{10}$$

subject to

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x} = \lambda^* \mathbf{x} \tag{11}$$

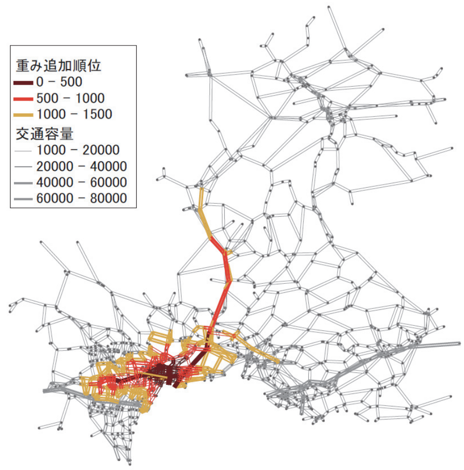
$$\|\mathbf{x}\| = 1 \tag{12}$$

$$\sum \mathbf{B}_{ij} \leq Y \tag{13}$$

$$B_{ij} \leq y_{ij} \tag{14}$$

$$B_{ij} = 0 \ \forall i = j \tag{15}$$

ただし，λ^*は最大固有値，$\mathbf{x}$は対応する固有ベクトル，$\mathbf{A}$は既存の重み付き隣接行列，$\mathbf{B}$は追加する重みを表す隣接行列，Yは総重み追加量の上限値，y_{ij}はノードiからノードjへ接続するリンクが持つことができる重みの上限値とする．目的関数を満たす行列$\mathbf{B}$を求めることでリンク補強プランを導く．この問題は，$\mathbf{x}$がデザイン変数$\mathbf{B}$により内生的に決まる非線形計画問題となっている．そのため，B_{ij}を要素とする組み合わせ問題の解法として本研究では遺伝的アルゴリズムを用いて以下の手順により最大固有値を最大とする解を抽出する．



図−7　岐阜県ネットワークの既存容量と重み追加順位

1. 決められた要素数の初期個体群をランダムに生成する．
2. 各個体群の適合度から成績の良い個体を選択する．
3. 個体の中から一部の入れ換えをおこなう．（交叉）
4. ある確率で個体の一つに乱数を代入する．（突然変異）
5. 最も適合度の高い個体群を解とする．

交叉率0.8，突然変異0.01として上記のアルゴリズムを1000回試行し，目的関数が最大になるものを最適解とした．

図−1に示すテストネットワークに対する隣接行列$\mathbf{A}$を既存の状態として，総重み追加量の制約Yを500，600，700，800とした場合の既存リンクへの重み追加量，新規リンクの追加状況を**図−8**，**図−9**に示す．なお，各リンクの重みの上限y_{ij}は既存リンク，新規リンクどちらも100とし，既存ネットワークの総重み量は770である．**図−8**より，総重み追加量の制約が大きくなるにつれて最大固有値も単調に増加している．それぞれのリンクに対する重みの追加量（**図−9**）では，Yが500から600に増加する変化においては，重みが追加されるリンクの構成は変わらず，ノード1，2，3の接続を強固にする解となっている．Yが700となると，新たなリンクとしてノード1，4を接続する両方向のリンクが新設され，Yを800とした場合においても同じリンク集合を対象にさらなる重みの追加をおこなう結果となった．Yが増加するにつれて強く接続する部分を拡張するように新たなリンクや重みが追加されていることがわかる．また，新設または重みを追加するリンク数に上限はないが，少量の重みを多くのリンクへ均一的に追加する補強ではなく，各リンクの重み上限値$y_{ij} = 100$のもと少数リンクに重点的に重みを与える傾向がみられた．

あくまで非常に簡単なテストネットワークを用いた検

証ではあるが，与えられた総重み追加量の制限のもと最大固有値最大化のためのリンク補強箇所について，既存リンク，新規リンクを組み合わせた重み配分が可能であることが確認できた．

6. おわりに

本研究では，重み付き有向グラフにおける最大固有値と対応する固有ベクトルの定義を示し，重みの追加によるリンク補強時に最大固有値が示す性質について検証した．ネットワーク内の重みの総和が増加するにつれて最大固有値も増加し，かつ複数のリンクに同時に重みを追加することによる相乗効果があらわれることを確認した．そのうえで，道路の特徴を示すネットワークにおける重みの分布と接続状況について，大きな重みを持つリンクが互いに接続する強固な部分の存在が最大固有値に大きな影響を及ぼすことがわかった．さらに，最大固有値を指標とするリンク補強では，既存のネットワークにおいて強く接続する部分をより補うように重みが追加される傾向にあることが確認された．そのため，最大固有値に基づく道路ネットワーク接続性評価という観点は，非常に強固に接続する部分の確立と拡張に対する指標であるといえる．最後に，リンク補強時における最大固有値の性質を踏まえ，与えられた容量制約条件のもと最大固有値を最大とするにはどのリンクをどの程度補強するべきかを明らかにする最大固有値最大化問題を示し，簡単なネットワークにおいて試算した．

今後の課題として，本研究で明らかにした最大固有値の性質では接続性が弱い部分ではなく強い部分のみに着目した指標となっているため，道路ネットワークの接続性向上を検討するための評価指標として最大固有値を活用する場合には今後何らかの工夫が必要だと考えられる．そのためにも，道路の特徴をもつネットワークに対する最大固有値の性質をより定量的に分析する必要があると考えられるため，道路ネットワークが持つ構造的な特性を示す指標との関連性を深くみていきたい．また，今回は重みの追加によるリンクの補強を対象としているが，リンクが欠損した場合の影響について，欠損により両方向リンクから片方向リンクとなることがもたらす接続性への変化等を検証したいと考えている．

謝辞：本研究は，JSPS科研費JP18H01557の助成を受けて遂行された．ここで記して謝意を表する．

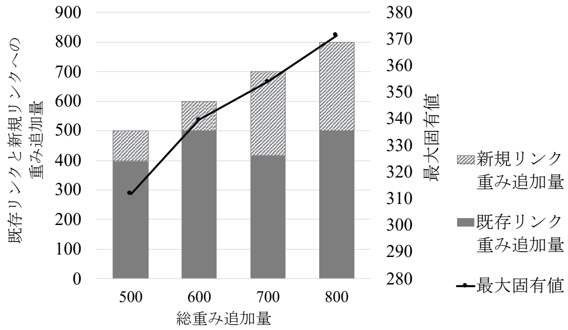


図-8 総重み追加量と最大固有値

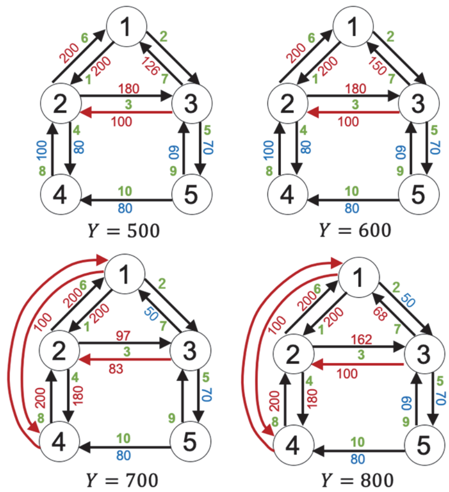


図-9 試算に使用したネットワークと計算結果

参考文献

1) Wakabayashi, H. and Iida, Y., Upper and lower bounds of terminal reliability of road networks: an efficient method with Boolean algebra. Journal of Natural Disaster Science, 14, 29-44, 1992.
2) 朝倉康夫，柏谷増男，藤原健一郎，交通ネットワークにおける迂回の限界を考慮した OD ペア間信頼度の指標，土木学会論文集，No.555/IV-34，pp.41-49，1997.
3) Kurauchi, F., Uno, N., Sumalee, A. and Seto, Y. Network Evaluation Based on Connectivity Vulnerability, Transportation and Traffic Theory 2009: Golden Jubilee, pp637-649, 2009.
4) D'Este, G M, & Taylor, M A P, Network vulnerability: An approach to reliability analysis at the level of national strategic transport networks, In M. G. H. Bell, & Y. Iida (Eds.), The network reliability of transport,23-44, 2003.
5) Bell, M G H, and Iida, Y., Transportation Network Analysis, NY, John Wiley & Sons, 1997.
6) Ng, M, Szeto, W, Y and Waller, S, T, Distribution-free travel time reliability assessment with probability inequalities, Transportation Research Part B: Methodological, 45, 852-866, 2011.
7) Heydecker, B G and Lam, W H K, Use of travel demand satisfaction to assess road network reliability, Transportmetrica, 3, 2, 139-171, 2007.
8) Chen, A, Yang, H., Lo, H.K. and Tang, W. H., Capacity reliability of a road network: an assessment methodology and numerical results, Transportation Research Part B : Methodological, 36(3), 225-252, 2002.
9) Mattsson, L. G. and Jenelius, E., Vulnerability and Resilience of Transport Systems - A Discussion of Recent

Research, Transportation Research Part A: Policy and Practice, 81, pp.16-34, 2015.
10) Duan, Y and Lu, F.: Robustness of City Road Networks at Different Granularities, *Physica A*, 411, pp.21-34, 2014.
11) Crucitti, P. Latora, V and Porta, S.: Centrality Measures in Spatial Networks of Urban Streets, *Physical Review E*, 73, 2006.
12) 中南孝晶，中山晶一朗，小林俊一，山口裕通，固有値解析による固有ベクトルを利用した緊急輸送道路ネットワークの脆弱性，土木学会論文集 D3（土木計画学），Vol.74, 1141-1148, 2018.
13) Bell, MGH, Kurauchi, F, Perera, S and Wong, W., Investigating transport network vulnerability by capacity weighted spectral analysis, Transportation Research Part B: Methodological, Vol. 99, May 251-266, 2017.
14) Wang, H., & Van Mieghem, P., November. Algebraic connectivity optimization via link addition. In: Proceedings of the 3rd International Conference on Bio-Inspired Models of Network, Information and Computing Sytems. ICST (Institute for Computer Sciences, Social-Informatics and Telecommunications Engineering). p22, 2008.
15) Barabási, A. L., and Albert, R., Emergence of scaling in random networks. science, 286(5439), 509-512, 1999.
16) Bonacich, P., Factoring and Weighting Approaches to Status Scores and Clique Identification, Journal of Mathematical Sociology, 2, pp.113-20, 1972.
17) Wang, Y., Cullinane, K., Measuring container port accessibility: An application of the Principal Eigenvector Method (PEM). Marit. Econom. Logist. 10 (1–2), 75–89, 2008.
18) 安藤宏恵，倉内文孝，Network Topology 指標による道路ネットワーク整備の効果検証に関する研究，土木学会論文集 D3（土木計画学）, Vol.75, 445-454, 2020.
19) Cheung, K. F, Bell, M G H, Pan, J. J., and Perera, S., An eigenvector centrality analysis of world container shipping network connectivity. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 140, 101991, 2020.
20) Kurauchi, F., Uno, N., Sumalee, A. and Seto, Y., Network evaluation based on connectivity vulnerability, Transportation and Traffic Theory 2009: Golden Jubilee, pp.637-649, 2009.
21) 安藤宏恵，倉内文孝，明光就平，交通ネットワーク信頼性解析に向けた Network Science 指標の適用関係性に関する考察，第 56 回土木計画学研究講演集，2017.
22) Meyer, C. D., Matrix analysis and applied linear algebra, Vol.71, Siam, 2000.

(2020. 10. 2 受付)

STUDY ON IMPROVING ROAD NETWORK CONNECTIVITY BY LARGEST EIGENVALUE

Hiroe ANDO, Fumitaka KURAUCHI, Yasuo ASAKURA and Wataru NAKANISHI