

# プローブデータと感知器データを組み合わせた交通状態の時空間推定

峪 龍一<sup>1</sup>・内田 賢悦<sup>2</sup>

<sup>1</sup>学生会員 北海道大学大学院 工学院 (〒060-8628 北海道札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

E-mail: ryuichitani@eis.hokudai.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 北海道大学大学院 工学研究院 (〒060-8628 北海道札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

E-mail: uchida@eng.hokudai.ac.jp

本研究は、プローブカーデータと感知器データを組み合わせて、道路ネットワーク全体におけるリンク交通量を推定する手法を提案する。道路ネットワーク全体において、感知器が設置される箇所は限られている。また、ある時間帯に着目したとき、プローブカーが走行して交通状態を観測するリンクは限られている。道路ネットワーク全体のうち、部分的なリンクで観測されたデータを用いて、観測されたリンクにおける、リンク交通量とリンク遅れ時間の尤度を計算し、これを最大化することによって、ある時間帯において観測されていない交通状態を推定する。本研究では観測されていないリンクにおける交通量および遅れ時間は確率変数として推定される。さらに、各時間帯別の OD 交通需要の平均と分散を推定するための手法もあわせて示す。最後に、テストネットワークにおける簡単な数値計算例を示し、本研究で提案する手法の妥当性を確認する。

**Key Words:** *travel time reliability, stochastic traffic demand, probe data, traffic counter data*

## 1. はじめに

道路ネットワーク全体の交通状態を推定するために、プローブカーデータが利用されている。プローブカーデータは安価で大量のデータを取得できることから、先進国・新興国問わず、広く利用されることが期待されている。プローブカーデータは各車両の挙動を軌跡として観測できる。しかし、同時時間帯におけるネットワーク規模での交通状態の網羅的な観測はプローブカーの密度に依存しており、プローブカーの密度が低い場合には、同時時間帯におけるネットワーク全体の交通状態を推定することは困難である。したがって、同時時間帯において、プローブカーで観測できていないリンクの交通状態を推定することが課題となっている。

プローブカーデータを用いて、道路ネットワークにおける未観測な交通状態を推定する研究がいくつか行われている。原ら(2016)、Hara et al. (2018)はそれぞれプローブカーデータを用いて、道路ネットワーク全体における、リンク速度の補完推定を行っている。原ら(2016)はグラフィカルラッソを用いて、リンク間の共分散構造を推定するモデルを提案した。Hara et al. (2018)は同様な問題に対して、混合ガウシアングラフィカルモデルを利用している。対象とする道路ネットワークの規模が大きくなる

と推定するべき共分散構造に対して、推定するべきパラメータは増大する。そのため、共分散構造のスパース性に着目して、交通状態推定を行った。

プローブカーデータの利用が検討されている一方で、日本では交通量を観測するために交通感知器が一部のリンクに設置されている。交通感知器を設置して運用するための費用は高いことから、道路ネットワークを網羅するように交通感知器を設置することは財政的な都合上、現実的ではないのが実情である。しかし、固定的かつ連続的に交通量を観測できるという特徴は、プローブカーデータにはない側面である。プローブカーデータと交通感知器データを補完的に利用することによって、効率的な交通状態観測が実現される可能性がある。

複数の交通状態観測手法を組み合わせる研究はすでに行われている。例えば、Seo et al. (2015)は交通感知器とフローティングカーからそれぞれ観測されたデータを組み合わせることによって、道路リンクにおける動的な密度推定を行う手法を提案している。

本研究では、日々観測される交通データから、全時間帯のリンクフローと移動時間を確率的に推定する手法を提案する。本研究の特徴は、交通感知器とプローブカーからそれぞれ得られたデータを組み合わせて、交通状態を推定しようとするものである。道路ネットワーク全体

の全てのリンクの交通量と遅れ時間を多変量対数正規分布で表現する。提案する手法は、観測されたリンクの交通流量と移動時間について、尤度を最大化することによって、交通状態を推定するものである。また、リアルタイムな交通観測から、推定される交通状態の精度を向上させる手法も提案する。

本稿の構成は以下のとおりである。第 2 章では提案するモデルの詳細を説明する。第 3 章では提案するモデルの挙動を検証するため、テストネットワークにおける数値計算を実施し、その結果を示す。最後に、本研究の内容をまとめる。

## 2. モデル

### (1) 交通流

時間帯別の総交通需要  $Q$  を定義する。 $Q$  は対数正規分布に従うものとする。 $(Q \sim LN(\mu_Q, \sigma_Q^2))$ 。OD ペア  $i$  の交通需要  $Q_i$  は OD ペア  $i$  に固有な割合  $p_i$  と総交通需要を用いて、 $Q_i = p_i \cdot Q \forall i \in I$  と表される。ここで、OD ペア  $i$  に固有な割合  $p_i$  は  $\sum_{i \in I} p_i = 1$  を満たすものとする。OD 交通需要  $Q_i$  は対数正規分布に従い ( $Q_i \sim LN(\mu_{Q_i}, \sigma_{Q_i}^2) \forall i \in I$ )、そのパラメータはそれぞれ  $\mu_{Q_i} = \mu + \ln(p_i) \forall i \in I$  と  $\sigma_{Q_i}^2 = \sigma^2 \forall i \in I$  である。

経路交通量  $F_{ij}$  は、OD 交通需要  $Q_i$  と、確率的利用者均衡配分モデルによって推計される経路選択確率  $p_{ij}$  の積によって表現されるものとする。

$$F_{ij} = p_{ij} \cdot Q_i = p_{ij} \cdot p_i \cdot Q \quad \forall i \in I, \forall j \in J_i \quad (1)$$

経路交通量は対数正規分布に従い、そのパラメータはそれぞれ以下の通りである。

$$F_{ij} \sim LN(\mu_{F_{ij}}, \sigma_{F_{ij}}^2) \quad \forall i \in I, \forall j \in J_i \quad (2)$$

$$\mu_{F_{ij}} = \mu + \ln(p_{ij} \cdot p_i) \quad \forall i \in I, \forall j \in J_i \quad (3)$$

$$\sigma_{F_{ij}}^2 = \sigma^2 \quad \forall i \in I, \forall j \in J_i \quad (4)$$

リンク交通量はそのリンクを通過する経路交通量の和として表される。

$$\begin{aligned} V_a &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \delta_{aj} \cdot F_{ij} \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \delta_{aj} \cdot p_{ij} \cdot Q_i = \hat{p}_a \cdot Q \quad \forall a \in A \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、

$$\hat{p}_a = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \delta_{aj} \cdot p_{ij} \cdot p_i \quad \forall a \in A \quad (6)$$

$$= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \delta_{aj} \cdot p_{ij} \cdot Q_i = \hat{p}_a \cdot Q \quad \forall a \in A$$

上記までの定式化によって、リンク交通量は総交通需要のスカラー倍として定義されることがわかる。つまり、リンク交通量はスカラー量  $\hat{p}_a$  と総交通需要の積として定義される。したがって、リンク交通量もまた、対数正

規分布に従い、そのパラメータは  $\hat{p}_a$  と総交通需要のパラメータ、 $\mu$  と  $\sigma$  によっていずれも定義される。

$$V_a \sim LN(\mu_{V_a}, \sigma_{V_a}^2) \quad \forall a \in A \quad (7)$$

$$\mu_{V_a} = \ln(\hat{p}_a) + \mu \quad \forall a \in A \quad (8)$$

$$\sigma_{V_a}^2 = \sigma^2 \quad \forall a \in A \quad (9)$$

### (2) 移動時間

ネットワークの不確実性を考慮した交通量配分モデルを扱う既存研究と同様にして、リンク移動時間は以下に示す BPR 関数に基づいて定義されるものとする。

$$t_a(v_a, c_a) = t_a^0 \left( 1 + \gamma_a \cdot \left( \frac{v_a}{c_a} \right)^{\lambda_a} \right) \quad \forall a \in A \quad (10)$$

ただし、リンク交通量は確率変数として定義されているため、リンク移動時間を確率変数として以下のように定義する。

$$t_a(V_a, c_a) = t_a^0 \left( 1 + \gamma_a \cdot \left( \frac{V_a}{c_a} \right)^{\lambda_a} \right) \quad \forall a \in A \quad (11)$$

上に示す、確率的なリンク移動時間は確定項と確率項に分離することができる。

$$t_a(V_a, c_a) = t_a^0 + \frac{t_a^0 \cdot \gamma_a}{c_a^{\lambda_a}} \cdot (V_a)^{\lambda_a} \quad (12)$$

$$= t_a^0 + \hat{\gamma}_a \cdot \left( \frac{V_a}{c_a} \right)^{\lambda_a} \quad \forall a \in A$$

ここで、

$$\hat{\gamma}_a = t_a^0 \cdot \gamma_a \quad \forall a \in A \quad (13)$$

確定項は外生的に決まることから、以下では内生的に決まる確率項（リンク遅れ時間）に注目して議論を進める。リンク交通容量がリンク間で互いに統計的に独立な対数

正規分布に従う確率変数 ( $T'_a = \hat{\gamma}_a \cdot \left( \frac{V_a}{c_a} \right)^{\lambda_a}$ ) であると仮定すると、リンク遅れ時間は以下のように表現される。

$$T'_a = \hat{\gamma}_a \cdot \left( \frac{V_a}{c_a} \right)^{\lambda_a} \quad \forall a \in A \quad (14)$$

リンク遅れ時間の両辺の対数をとると以下のような関係を得る。

$$\begin{aligned} \ln(T'_a) &= \ln \left( \hat{\gamma}_a \cdot \left( \frac{V_a}{c_a} \right)^{\lambda_a} \right) \\ &= \ln(\hat{\gamma}_a) + \lambda_a \cdot \ln(\hat{p}_a \cdot Q) - \lambda_a \cdot \ln(c_a) \\ &= \ln(\hat{\gamma}_a) + \lambda_a \cdot \ln(\hat{p}_a) + \lambda_a \cdot (\ln(Q) - \ln(c_a)) \end{aligned} \quad \forall a \in A \quad (15)$$

リンク遅れ時間は対数正規分布に従い、そのパラメータはそれぞれ以下のように表される。

$$T'_a \sim LN(\mu_{T'_a}, \sigma_{T'_a}^2) \quad \forall a \in A \quad (16)$$

$$\mu_{T'_a} = \ln(\hat{\gamma}_a) + \lambda_a \ln(\hat{p}_a) + \lambda_a \cdot (\mu - \mu_{c_a}) \quad (17)$$

$$\sigma_{T'_a}^2 = (\lambda_a)^2 \cdot (\sigma^2 + \sigma_{c_a}^2) \quad (18)$$

同一のリンクにおけるリンク交通量とリンク移動時間間の共分散、2つのリンク間におけるリンク交通量とリンク移動時間間の共分散と2つのリンク間におけるリンク移動時間間の共分散はそれぞれ以下のように表され

る.

$$\begin{aligned} \text{cov}[V_a, T'_a] &= \exp\left(\mu_{V_a T'_a} + \frac{1}{2} \cdot \sigma_{V_a T'_a}^2\right) \\ &\quad - \exp\left(\mu_{V_a} + \mu_{T'_a} + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{V_a}^2 + \sigma_{T'_a}^2)\right) \quad \forall a \in A \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}[V_a, T'_b] &= \exp\left(\mu_{V_a T'_b} + \frac{1}{2} \cdot \sigma_{V_a T'_b}^2\right) \\ &\quad - \exp\left(\mu_{V_a} + \mu_{T'_b} + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{V_a}^2 + \sigma_{T'_b}^2)\right) \quad \forall a, b \in A \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}[T'_a, T'_b] &= \exp\left(\mu_{T'_a T'_b} + \frac{1}{2} \cdot \sigma_{T'_a T'_b}^2\right) \\ &\quad - \exp\left(\mu_{T'_a} + \mu_{T'_b} + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{T'_a}^2 + \sigma_{T'_b}^2)\right) \quad \forall a, b \in A \end{aligned} \quad (21)$$

上の 3 つの共分散それぞれの導出過程を付録 1 に示す。なお、付録 2 より、リンク移動時間は  $T_a = t_a^0 + T'_a$  と表されることから、異なる 2 つのリンクの間における移動時間の共分散と遅れ時間の共分散は一致する ( $\text{cov}[T_a, T_a] = \text{cov}[T'_a, T'_a]$ )。また、本研究におけるリンク移動時間の定義により、リンク移動時間は shifted 対数正規分布に従う。リンク移動時間の取りうる範囲は  $[t_{a0}, +\infty)$  の間である。すなわち、リンク移動時間の分布はリンク遅れ時間の分布を確定項の分だけ、正の方向に平行移動したものとなる。

経路移動時間は、その経路を構成するリンクの移動時間の和として表現される。

$$\Xi_{ij} = \sum_{a \in A} T_a \cdot \delta_{aj} \quad \forall i \in \mathbf{I}, \forall j \in \mathbf{J}_i \quad (22)$$

経路移動時間の平均と分散は、それぞれ以下のように表される。

$$E[\Xi_{ij}] = \sum_{a \in A} E[T_a] \cdot \delta_{aj} \quad \forall i \in \mathbf{I}, \forall j \in \mathbf{J}_i \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{var}[\Xi_{ij}] &= \sum_{a \in A} \text{var}[T_a] \cdot \delta_{aj} + 2 \\ &\quad \cdot \sum_{a \in A} \sum_{b (\neq a) \in A} \delta_{aj} \cdot \delta_{bj} \\ &\quad \cdot \text{cov}[T_a, T_b] \quad \forall i \in \mathbf{I}, \forall j \in \mathbf{J}_i \end{aligned} \quad (24)$$

なお、リンク移動時間の平均と分散はそれぞれリンク遅れ時間のパラメータを用いて以下のように表される。

$$E[T_a] = t_a^0 + E[T'_a] \quad (25)$$

$$= t_a^0 + \exp\left(\mu_{T'_a} + \frac{1}{2} \cdot \sigma_{T'_a}^2\right) \quad \forall a \in A$$

$$\text{var}[T_a] = \text{var}[T'_a] \quad (26)$$

$$= \exp\left(2\mu_{T'_a} + \sigma_{T'_a}^2\right) \left(\exp\left(\sigma_{T'_a}^2\right) - 1\right) \quad \forall a \in A$$

### (3) 均衡配分モデル

ドライバーの経路選択の基準となる、各経路の一般化費用を以下のように定義する。

$$c_{ij}(\mathbf{F}) = E[\Xi_{ij}] + \eta \cdot \text{var}[\Xi_{ij}] \quad \forall i \in \mathbf{I}, \forall j \in \mathbf{J}_i \quad (27)$$

本研究では経路移動時間の平均と分散の和を一般化費用とする。ここで、 $\eta$  はドライバーのリスク開度を表すパラメータである。上に示す経路選択基準を用いて、ロジット型の確率的利用者均衡配分モデルを構築する。均衡配分モデルは経路交通量に関する不動点問題として定式化される。

$$E[F_{ij}] = p_{ij}(\mathbf{c}(\mathbf{F})) \cdot E[Q_i] \quad \forall i \in \mathbf{I}, \forall j \in \mathbf{J}_i \quad (28)$$

ここで、

$$p_{ij} = \frac{\exp(-\phi \cdot c_{ij}(\mathbf{F}))}{\sum_{j=1}^{|\mathbf{J}_i|} \exp(-\phi \cdot c_{ij}(\mathbf{F}))} \quad \forall i \in \mathbf{I}, \forall j \in \mathbf{J}_i \quad (29)$$

$$\mathbf{c} = (c_{11}(\mathbf{F}), \dots, c_{i|\mathbf{J}_i|}(\mathbf{F})) \quad (30)$$

$$\mathbf{F} = (F_{11}, \dots, F_{|\mathbf{I}||\mathbf{J}_i|}) \quad (31)$$

### (4) 推定する交通状態

本研究では、原ら(2016)と同様に、各道路リンク  $a$  における交通状態  $\mathbf{X}_a$  を観測する問題を考える。本研究で推定の対象とする交通状態はリンク交通量[pcu/hour]とリンク移動時間[hour]である。道路ネットワーク全体のリンク交通量とリンク移動時間は多変量確率分布から生成されるものと仮定する。原ら(2016)では交通状態が多変量正規分布に従うことを仮定している。多変量正規分布は分布形状の対称性と負値をとりうるという点で、現実の観測と差異があるものの、柔軟なモデリングを可能とする。一方で、本研究では、リンク交通量は多変量対数正規分布に従い、リンク移動時間は多変量の shifted 対数正規分布に従うものと仮定する(Tani and Uchida, 2018)。

各リンクの交通状態を表すベクトルを  $\mathbf{X}_a = (V_a \quad T'_a)$  と定義すると、 $\mathbf{X}_a$  は以下に示す、リンク  $a$  における交通量と遅れ時間に 2 変量対数正規分布に従う。

$$\mathbf{X}_a \sim LN(\boldsymbol{\mu}_a, \boldsymbol{\Sigma}_{aa}) \quad \forall a \in A \quad (32)$$

パラメータはそれぞれ以下の通りである。

$$\boldsymbol{\mu}_a = (\mu_{V_a} \quad \mu_{T'_a}) \quad (33)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{aa} \quad (34)$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{V_a}^2 & \text{cov}[\ln(V_a), \ln(T'_a)] \\ \text{cov}[\ln(V_a), \ln(T'_a)] & \sigma_{T'_a}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma^2 & \lambda_a \cdot \sigma^2 \\ \lambda_a \cdot \sigma^2 & (\lambda_a)^2 \cdot (\sigma^2 + \sigma_{\epsilon_a}^2) \end{pmatrix}$$

道路ネットワーク全体を対象とした交通状態を、 $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 \quad \dots \quad \mathbf{X}_{|\mathbf{A}|})$  と定義すると、 $\mathbf{X}$  は以下に示す多変量対数正規分布に従う。

$$\mathbf{X} \sim LN(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (35)$$

それぞれのパラメータは以下のように表される。

$$\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{\mu}_{|\mathbf{A}|}) \quad (36)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \cdots & \Sigma_{1|A|} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{|A|1} & \cdots & \Sigma_{|A||A|} \end{pmatrix} \quad (37)$$

ここで、 $a \neq b$  のとき、異なる 2 つのリンク間の分散共分散行列  $\Sigma_{ab}$  は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \Sigma_{ab} &= \begin{pmatrix} \text{cov}[\ln(V_a), \ln(V_b)] & \text{cov}[\ln(V_a), \ln(T'_b)] \\ \text{cov}[\ln(V_b), \ln(T'_a)] & \text{cov}[\ln(T'_a), \ln(T'_b)] \end{pmatrix} \quad (38) \\ &= \begin{pmatrix} \sigma^2 & \lambda_b \cdot \sigma^2 \\ \lambda_a \cdot \sigma^2 & \lambda_a \cdot \lambda_b \cdot \sigma^2 \end{pmatrix} \\ &\quad \ln(T'_a) = \ln(\hat{v}_a) + \lambda_a \cdot \ln(\hat{p}_a) \\ &\quad + \lambda_a \cdot (\ln(Q) - \ln(C_a)) \end{pmatrix} \quad (39) \end{aligned}$$

リンク交通量の両辺の自然対数をとると、 $\ln(V_a) = \ln(\hat{p}_a) + \ln(Q)$  となる。これと(17)の関係から、以下の 2 つが確認される。

$$\begin{aligned} \text{cov}[\ln(V_a), \ln(T'_b)] &= \lambda_b \cdot \sigma^2 \\ \text{cov}[\ln(T'_a), \ln(T'_b)] &= \lambda_a \cdot \lambda_b \cdot \sigma^2 \end{aligned}$$

上記の一連の関係は、道路ネットワーク全体のリンク交通量とリンク移動時間は多変量対数正規分布に従うことを意味する。

### (5) 交通状態の推定手法

本項では、ある特定の時間帯に道路ネットワーク全体のうち、交通感知器とプローブカーによって、部分的に交通状態（リンク交通量とリンク遅れ時間）が観測されている場合を想定して、道路ネットワーク全体の交通状態を推定する手法について述べる。

道路ネットワーク全体のうち、交通感知器が設置されているリンクは限られている。また、時間帯ごとに、プローブカーが通過するリンクの組み合わせは異なる。交通感知器が設置されているリンクでは常にリンク交通量が観測される。一方で、遅れ時間が観測されるリンクの組み合わせは日々変化する。

ある特定の時間帯を対象として、過去  $G$  日間観測して得られたリンクの交通状態を用いて、道路ネットワーク全体の交通状態を推定することを考える。 $g \in \{1, \dots, G\}$  日目に交通状態が観測されたリンクの集合を  $A_g^0$  とする。リンク  $a$  において観測された交通状態のパターンを  $K_a$  とする。ここで、 $K_a$  は  $\{v\}$ ,  $\{t\}$ ,  $\{v, t\}$  の 3 種類があるものとし、各観測機会において、いずれかのパターンをとるものとする。3 種類のパターンはそれぞれ、リンク交通量のみが観測される場合、リンク遅れ時間のみが観測される場合、リンク交通量とリンク遅れ時間の双方が観測される場合に相当する。つまり、 $g \in \{1, \dots, G\}$  日目にリンク  $a \in A_g^0$  において  $k \in K_a$  が観測された結果が、各観測の単位となる。リンク  $a \in A_g^0$  における観測状況を表すベクトルを以下のように定義する。

$$\mathbf{m}_{ak} = (\phi_{kv} \quad \phi_{kt}) \forall a \in A_g^0, \forall k \in K_a \quad (40)$$

ここで、 $\phi_{kl} \forall l \in \{v, t\}$  は  $k = l$  のときに 1、それ以外のときに 0 をとる変数である。なお、何も観測されていないリンク  $a \in A/A_g^0$  については以下のベクトルを定義する。

$$\tilde{\mathbf{m}}_a = (0 \quad 0) \forall a \in A - A_g^0 \quad (41)$$

次に、 $g \in \{1, \dots, G\}$  日目の、道路ネットワーク全体の観測パターンに対応する行列  $\mathbf{M}_g$  を以下のように定義する。

$$\mathbf{M}_g = \left( \bigcup_{a \in A_g^0, k \in K_a} \mathbf{m}_a^k \right) \quad (42)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_a^k &= (\tilde{\mathbf{m}}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{m}}_{a-1} \quad \mathbf{m}_{ak} \quad \tilde{\mathbf{m}}_{a+1} \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{m}}_{|A|}) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\forall a \in A_g^0, \forall k \in K_a$$

である。以上の表現を簡単なテストネットワークを用いて説明する。例えば、3 本のリンクから構成される道路ネットワークにおいて、 $g \in \{1, \dots, G\}$  日目にリンク 1 において交通量と遅れ時間が観測され、リンク 2 において遅れ時間のみが観測され、リンク 3 では何も観測されない場合、 $K_1 = \{v, t\}, K_2 = \{t\}$  となるため、 $\mathbf{M}_g$  は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_g &= \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1^v \\ \mathbf{m}_1^t \\ \mathbf{m}_2^t \end{pmatrix} \quad (44) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{m}_{1v} & \tilde{\mathbf{m}}_2 & \tilde{\mathbf{m}}_3 \\ \mathbf{m}_{1t} & \tilde{\mathbf{m}}_2 & \tilde{\mathbf{m}}_3 \\ \tilde{\mathbf{m}}_1 & \mathbf{m}_{2t} & \tilde{\mathbf{m}}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \forall g \in \{1, \dots, G\} \end{aligned}$$

次に、 $g \in \{1, \dots, G\}$  日目に道路ネットワーク全体で観測される交通状態を表すベクトルを以下のように定義する。

$$\mathbf{d}_g = (\hat{v}_1 \quad \hat{t}_1 \quad \cdots \quad \hat{v}_a \quad \hat{t}_a \quad \cdots \quad \hat{v}_{|A|} \quad \hat{t}_{|A|}) \quad (45)$$

ここで、 $\hat{v}_a$  と  $\hat{t}_a$  ( $\forall a \in A$ ) は、リンク  $a$  において観測された、0 より大きい観測値の自然対数をとったものである。なお、リンク  $a$  において、いずれかの観測がない場合、あるいは観測値が 0 以下である場合は、便宜的に  $-\infty$  などの小さい値をとるものとする。例えば、法定速度よりも高い速度で走行する自動車の遅れ時間は 0 以下で観測される。本研究では対数正規分布で表現できる、0 より大きい観測値を想定するため、0 以下で観測された観測値は異常値として取り扱うものとする。

ある時間帯に交通量と遅れ時間の双方が観測されるリンクに注目すると、その時間帯で観測される交通量は 1 つであるが、遅れ時間は時間帯内で複数観測される場合が想定される。遅れ時間が時間帯内で複数観測される場合、時間帯内に観測される 0 より大きい遅れ時間の平均の自然対数をとった値を、時間帯の代表値とする。例えば、3 本のリンクから構成されるテストネットワークを



考える場合、 $g \in \{1, \dots, G\}$  日目にリンク 1 において交通量が 100、遅れ時間が 3 と観測され、リンク 2 において遅れ時間が 5 と観測され、リンク 3 では何も観測されない場合、 $\mathbf{d}_g$  は以下のように表される。

$$\mathbf{d}_g = (\ln(100) \quad \ln(3) \quad -\infty \quad \ln(5) \quad -\infty \quad -\infty) \quad (46)$$

$g \in \{1, \dots, G\}$  日目に観測されるデータ数を  $n(g)$  とすると、道路ネットワーク全体における交通状態に対応する多変量分布は、以下に示す、欠測を考慮した多変量正規分布の尤度関数を最大化することによって推計することができる。

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (47)$$

$$= \prod_{g=1}^G \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{d}}_g - \boldsymbol{\mu}_g)^T \boldsymbol{\Sigma}_g^{-1}(\hat{\mathbf{d}}_g - \boldsymbol{\mu}_g)\right)}{2\pi^{n(g)/2} |\boldsymbol{\Sigma}_g|^{1/2}}$$

ここで、

$$\boldsymbol{\Sigma}_g = \mathbf{M}_g \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{M}_g^T \quad (48)$$

$$\boldsymbol{\mu}_g = \mathbf{M}_g \boldsymbol{\mu}^T \quad (49)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_g = \mathbf{M}_g \mathbf{d}_g^T \quad (50)$$

上記の尤度関数は、道路ネットワーク全体の交通状態に対応する多変量分布のパラメータに関する問題である。多変量分布のパラメータは 2 (1)-(4) で定式化した確率的利用者均衡配分問題を解くことによって求まる。この確率的利用者均衡配分問題は総交通需要の平均・分散パラメータ  $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})$  と総交通需要を各 OD ペアに配分する割合  $p_i \forall i \in I$  によって決まる問題となっている。したがって、上記の問題は、 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, p_i (\forall i \in I)$  が規定する確率的利用者均衡配分問題によって制約された尤度最大化問題となる。

道路ネットワーク全体の交通状態の推計値が多変量正規分布に従い、 $\mathbf{X} \sim LN(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  と表現されることはすでに述べた。この交通状態の自然対数をとった確率変数は対数正規分布に従い、 $\ln(\mathbf{X}) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  と表現される。ここで、両者のパラメータは同一である。したがって、多変量対数正規分布に従う交通状態の観測値を尤度として最尤推定をしたときの推定値と、その交通状態を対数変換して多変量正規分布について最尤推定をしたときの推定値は一致する。本研究で用いる手法は、この性質を利用して、多変量正規分布に従う、対数変換した交通状態を用いて最尤推定を実施し、パラメータを推定するものである。道路ネットワーク全体のうち、交通感知器が設置されるリンクは限定的であり、遅れ時間を観測できるリンクの組み合わせは観測機会ごとにバラバラであるという状況に対応できるような尤度関数を用意している。多変量対数正規分布に従う交通状態を、対応する多変量正規分布に変換して、パラメータを推計するというアプローチは次項に示す、交通状態の事後分布の推定手法においても用いられている。

## (6) 事後分布の推定

前項では、不完全に観測されたデータに基づき、道路ネットワーク全体の交通状態を最尤法によって推定する手法を構築した。本項では、過去の観測データから推計された交通状態の確率分布を事前分布として、リアルタイムで観測される交通状態の事後分布を推計する手法を提案する。前項の最尤推定法から推計される多変量対数正規分布に従う交通状態を事前分布とする。

$$\mathbf{X} \sim LN(\boldsymbol{\mu}_p, \boldsymbol{\Sigma}_p) \quad (51)$$

ここで、 $\boldsymbol{\mu}_p$  と  $\boldsymbol{\Sigma}_p$  はそれぞれ交通状態の平均ベクトルと分散共分散行列である。Dominici et al. (2000) は、多変量正規分布に従うある確率変数の分散共分散行列が既知であり、その平均パラメータの事後分布  $\boldsymbol{\mu}$  は、以下に示す多変量正規分布に従うことを指摘している。

$$\boldsymbol{\mu} \sim N(\tilde{\mathbf{m}}, \tilde{\mathbf{B}}) \quad (52)$$

ここで、

$$\tilde{\mathbf{B}} = \left( \sum_{\hat{g}=1}^{\hat{G}} (q_{\hat{g}} + n_{\hat{g}}) \cdot \mathbf{M}_{\hat{g}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{g}}^{-1} \mathbf{M}_{\hat{g}} \right)^{-1} \quad (53)$$

$$\tilde{\mathbf{m}} = \tilde{\mathbf{B}} \sum_{\hat{g}=1}^{\hat{G}} (q_{\hat{g}} + n_{\hat{g}}) \cdot \mathbf{M}_{\hat{g}}^T \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{g}}^{-1} \mathbf{M}_{\hat{g}} \mathbf{M}_{\hat{g}}^T \tilde{\mathbf{d}}_{\hat{g}} \quad (54)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{g}} = \mathbf{M}_{\hat{g}} \boldsymbol{\Sigma}_p \mathbf{M}_{\hat{g}}^T \quad (55)$$

$$\tilde{\mathbf{d}}_{\hat{g}} = \frac{q_{\hat{g}} \cdot \mathbf{a}_{\hat{g}} + n_{\hat{g}} \cdot \hat{\mathbf{d}}_{\hat{g}}}{q_{\hat{g}} + n_{\hat{g}}} \quad (56)$$

$$\mathbf{a}_{\hat{g}} = \boldsymbol{\mu}_p \mathbf{M}_{\hat{g}}^T \quad (57)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_{\hat{g}} = \frac{1}{n_{\hat{g}}} \cdot \sum_{k_{\hat{g}}=1}^{n_{\hat{g}}} \mathbf{M}_{\hat{g}} \mathbf{d}_{k_{\hat{g}}}^T \quad (58)$$

なお、 $\mathbf{M}_{\hat{g}}$  は (44) の  $\mathbf{M}_g$  と同様の考え方によって定義される行列である。しかし、 $\mathbf{M}_{\hat{g}}$  は  $g$  日目に観測した交通状態のパターンに対応する行列であるのに対して、 $\mathbf{M}_{\hat{g}}$  はリアルタイムに観測される観測データ群の個別の観測グループ  $\hat{g} \in \{1, \dots, \hat{G}\}$  に対応する行列であるところが異なる。ここで、 $\hat{G}$  はリアルタイムに観測される観測データ群の総数である。ある時間帯における観測データは  $\hat{G}$  個の観測グループに分類される。また、観測グループ  $\hat{g}$  に属する観測データのセット数を  $n_{\hat{g}}$  と表記する。

$\mathbf{d}_{k_{\hat{g}}}$  ( $k_{\hat{g}} = 1, \dots, n_{\hat{g}}$ ) は  $\mathbf{d}_g$  と同様な考え方によって定義される観測された交通状態を表すベクトルである。なお、 $q_{\hat{g}}$  は事前分布の超パラメータである。

## (7) Within-day における交通状態推定への拡張

上記までの議論では、ある特定の時間帯において day-to-day で観測された交通状態を推計する問題を扱ってきた。本項では、1 日の中において、複数の時間帯における交通状態を推定する手法を構築する。

対数正規分布に従う日生成交通量を想定する。この日生成交通量は時間変動係数によって、各時間帯に配分され、時間帯生成交通量を定義する。このとき、各時間帯における時間帯生成交通量の分散パラメータが $\sigma^2$ はそれぞれ等しいことに注意が必要である。時間帯 $l$ ( $l = \{1, \dots, L\}$ )の時間帯生成交通量は $LN(\mu_l^*, \sigma^2)$ に従う。 $\mu_l^*$ は最尤推定の結果、推定された平均パラメータである。このとき、 $\mu_l^* = \ln(p_l) + \mu$ 、 $\sum_l p_l = 1$ となる $\mu, p_l > 0$ が存在する。詳しい証明は付録 C に示す。ここで、 $p_l$ は時間帯 $l$ における時間帯生成交通量が日生成交通量に占める比率(時間帯 $l$ の時間変動係数)である。すなわち、日生成交通量は $LN(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数として表すことができる。ここで、日生成交通量の分散パラメータ $\sigma^2$ が所与であるとき、各時間帯ごとにおいて最尤推定問題を解くと、1日全体における尤度の積、 $\prod_l L_l$ も最大化される。

次に、時間変動係数が所与であり、日生成交通量の分散パラメータ $\sigma^2$ が未知である場合を考える。1日全体における尤度の積、 $\prod_l L_l$ を最大化する $\sigma^2$ を $\sigma_a^2$ と表すと、 $\frac{\partial \prod_l L_l}{\partial \sigma^2} \Big|_{\sigma^2 = \sigma_a^2} = 0$ という関係を得る。

本項で示す 2 つの問題を交互に解くことによって、1日全体における日生成交通量のパラメータおよび時間変動係数を推計するアルゴリズムが構築される。このアルゴリズムの特徴は、1日全体の全時間帯の交通状態を同時に解く必要がないことである。1日全体のうち、各時間帯別の問題を個別に解くことを繰り返すことによって、1日全体の交通状態を推計することが可能となる。

また、2.(6)と関連して、ネットワークレベルの時空間の相関を反映して、リアルタイムに観測される交通状態に基づいて、交通状態を更新することが可能となる。例えば、ある時間帯 $l$ までに観測されたデータを用いて、時間帯 $l + 1$ 以降の時間帯の交通状態を事後分布として推計することが可能となる。

### 3. 数値計算例

#### (1) 条件設定

本節では、本研究で提案した定式化のうち、2.(1)-2.(5)によって定義される尤度を、図 1 に示すテストネットワークを用いて計算して例証する。リンクコスト関数のパラメータ、 $\alpha_a$ と $n_a$ をそれぞれ 2, 6 とする。各リンク交通容量の平均は 1000[pcu/hour]、変動係数は 0.2 とする。OD 交通需要の平均は 1250[pcu/hour]、変動係数は 0.2 とする。リンク交通量とリンク遅れ時間のサンプルを 10 組取得した。これらのサンプルは、事前に得られた均衡解としてのリンク交通量とリンク遅れ時間からランダムに

生成したものである。リンク 2 には交通感知器は設置されず、リンク交通量は観測されないものとした。2 つのリンク遅れ時間はランダムに観測されるものと仮定した。リンク遅れ時間が観測されない確率(欠測率)を 0.7 と設定した。

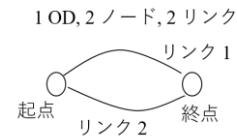


図 1 テストネットワーク

#### (2) 結果

図 2 に交通需要の平均と変動係数をそれぞれ変化させたときの交通状態(リンク交通量とリンク遅れ時間)についての尤度の変化を示す。本数値計算では観測データは、交通状態の真値からサンプリングし、さらにリンク遅れ時間のサンプルを欠測率に基づき、削除しているため、最終的なサンプリングの結果によって、図 2 に示される尤度関数の形状は変化することに注意が必要である。

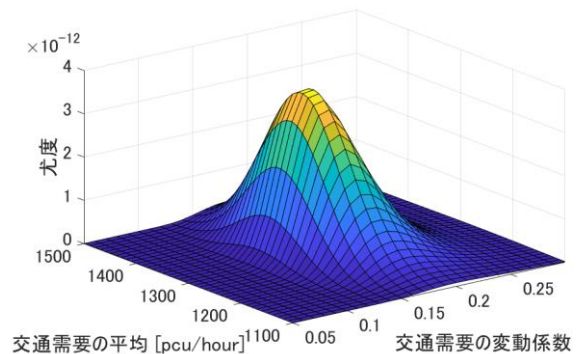


図 2 交通需要の平均と変動係数を变化させたときの尤度の変化

#### 4. まとめ

本研究では、プローブカーデータと交通感知器データを用いて、道路ネットワーク全体の交通状態を推定する手法を提案した。本手法では、道路ネットワーク全体の移動時間と交通量について、異なるリンク同士、異なる時間帯同士の確率的相関を考慮することができる。過去の交通観測から推定された確率的な交通状態を用いることで、現在の交通状態をリアルタイムに更新することが可能となる。

謝辞：本研究は、科学研究費補助金基盤研究(B)(課題番号：18H01550)と科学研究費補助金特別研究員奨励費

(課題番号：20J10083) の助成を受けたものである。

## 付録 A

$\text{cov}[V_a, T'_a]$  と  $\text{cov}[V_a, T'_b]$ ,  $\text{cov}[T'_a, T'_b]$  の導出過程をそれぞれ以下に示す。

### 1. $\text{cov}[V_a, T'_a]$ の導出過程

同一のリンクにおけるリンク交通量とリンク遅れ時間の積は以下のように表される。

$$\begin{aligned} V_a \cdot T'_a &= \hat{p}_a \cdot Q \cdot \hat{\gamma}_a \cdot \left( \frac{\hat{p}_a \cdot Q}{C_a} \right)^{\lambda_a} \\ &= \hat{p}_a^{\lambda_a+1} \cdot Q^{\lambda_a+1} \cdot (C_a)^{-\lambda_a} \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

ここで、

$$\hat{p}_a^{\lambda_a} = \hat{\gamma}_a \cdot (\hat{p}_a)^{\lambda_a+1} \quad (\text{A2})$$

である。上式の両辺の対数をとると、以下の関係を得る。

$$\begin{aligned} \ln(V_a \cdot T'_a) &= \ln(\hat{p}_a^{\lambda_a+1}) + (\lambda_a + 1) \cdot \ln(Q) \\ &\quad - \lambda_a \cdot \ln(C_a) \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

したがって、リンク交通量とリンク遅れ時間の積は対数正規分布に従い、そのパラメータはそれぞれ以下の通りである。

$$V_a \cdot T'_a \sim \text{LN}(\mu_{V_a T'_a}, \sigma_{V_a T'_a}^2) \quad (\text{A4})$$

ここで、

$$\mu_{V_a T'_a} = \ln(\hat{p}_a^{\lambda_a}) + (\lambda_a + 1) \cdot \mu - \lambda_a \cdot \mu_{C_a} \quad (\text{A5})$$

$$\sigma_{V_a T'_a}^2 = (\lambda_a + 1)^2 \cdot \sigma^2 + (\lambda_a)^2 \cdot \sigma_{C_a}^2 \quad (\text{A6})$$

以上から、同一のリンク内における、リンク交通量とリンク移動時間の間の共分散は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \text{cov}[V_a, T'_a] &= E[V_a \cdot T'_a] - E[V_a] \cdot E[T'_a] \\ &= \exp\left(\mu_{V_a T'_a} + \frac{1}{2} \cdot \sigma_{V_a T'_a}^2\right) \\ &\quad - \exp\left(\mu_{V_a} + \mu_{T'_a} + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{V_a}^2 + \sigma_{T'_a}^2)\right) \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

### 2. $\text{cov}[V_a, T'_b]$ の導出過程

異なる 2 つのリンクにおけるリンク交通量とリンク遅れ時間の積は以下のように表される。

$$\begin{aligned} V_a \cdot T'_b &= \hat{p}_a \cdot Q \cdot \hat{\gamma}_b \cdot \left( \frac{\hat{p}_b \cdot Q}{C_b} \right)^{\lambda_b} \\ &= \hat{p}_b^{\lambda_b} \cdot Q^{\lambda_b+1} \cdot (C_b)^{-\lambda_b} \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

ここで、

$$\hat{p}_b^{\lambda_b} = \hat{\gamma}_a \cdot \hat{p}_a \cdot (\hat{p}_b)^{\lambda_b} \quad (\text{A9})$$

である。上式の両辺の対数をとると、以下の関係を得る。

$$\begin{aligned} \ln(V_a \cdot T'_b) &= \ln(\hat{p}_b^{\lambda_b}) + (\lambda_b + 1) \cdot \ln(Q) \\ &\quad - \lambda_b \cdot \ln(C_b) \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

したがって、リンク交通量とリンク遅れ時間の積は対数正規分布に従い、そのパラメータはそれぞれ以下の通りである。

$$V_a \cdot T'_b \sim \text{LN}(\mu_{V_a T'_b}, \sigma_{V_a T'_b}^2) \quad (\text{A11})$$

ここで、

$$\mu_{V_a T'_b} = \ln(\hat{p}_b^{\lambda_b}) + (\lambda_b + 1) \cdot \mu - \lambda_b \cdot \mu_{C_b} \quad (\text{A12})$$

$$\sigma_{V_a T'_b}^2 = (\lambda_b + 1)^2 \cdot \sigma^2 + (\lambda_b)^2 \cdot \sigma_{C_b}^2 \quad (\text{A13})$$

以上から、異なる 2 つのリンクにおける、リンク交通量とリンク移動時間の間の共分散は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \text{cov}[V_a, T'_b] &= E[V_a \cdot T'_b] - E[V_a] \cdot E[T'_b] \\ &= \exp\left(\mu_{V_a T'_b} + \frac{1}{2} \cdot \sigma_{V_a T'_b}^2\right) \\ &\quad - \exp\left(\mu_{V_a} + \mu_{T'_b} + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{V_a}^2 + \sigma_{T'_b}^2)\right) \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

### 3. $\text{cov}[T'_a, T'_b]$ の導出過程

異なる 2 つのリンクにおけるリンク遅れ時間の共分散の積は以下のように表される。

$$\begin{aligned} T'_a \cdot T'_b &= \hat{\gamma}_a \cdot \left( \frac{\hat{p}_a \cdot Q}{C_a} \right)^{\lambda_a} \cdot \hat{\gamma}_b \cdot \left( \frac{\hat{p}_b \cdot Q}{C_b} \right)^{\lambda_b} \\ &= \hat{p}_{ab} \cdot Q^{\lambda_a+\lambda_b} \cdot (C_a)^{-\lambda_a} \\ &\quad \cdot (C_b)^{-\lambda_b} \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

ここで、

$$\hat{p}_{ab} = \hat{\gamma}_a \cdot \hat{\gamma}_b \cdot (\hat{p}_a)^{\lambda_a} \cdot (\hat{p}_b)^{\lambda_b} \quad (\text{A16})$$

である。上式の両辺の対数をとると、以下の関係を得る。

$$\begin{aligned} \ln(T'_a \cdot T'_b) &= \ln(\hat{p}_{ab}) + (\lambda_a + \lambda_b) \cdot \ln(Q) \\ &\quad - \lambda_a \cdot \ln(C_a) - \lambda_b \cdot \ln(C_b) \end{aligned} \quad (\text{A17})$$

したがって、リンク遅れ時間の積は対数正規分布に従い、そのパラメータはそれぞれ以下の通りである。

$$T'_a \cdot T'_b \sim \text{LN}(\mu_{T'_a T'_b}, \sigma_{T'_a T'_b}^2) \quad (\text{A18})$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mu_{T'_a T'_b} &= \ln(\hat{p}_{ab}) + (\lambda_a + \lambda_b) \cdot \mu - \lambda_a \cdot \mu_{C_a} \\ &\quad - \lambda_b \cdot \mu_{C_b} \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

$$\sigma_{T'_a T'_b}^2 = (\lambda_a + \lambda_b)^2 \cdot \sigma^2 + (\lambda_a)^2 \cdot \sigma_{C_a}^2 + (\lambda_b)^2 \cdot \sigma_{C_b}^2 \quad (\text{A20})$$

以上から、異なる 2 つのリンクにおける、リンク遅れ時間の共分散は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \text{cov}[T'_a, T'_b] &= E[T'_a \cdot T'_b] - E[T'_a] \cdot E[T'_b] \\ &= \exp\left(\mu_{T'_a T'_b} + \frac{1}{2} \cdot \sigma_{T'_a T'_b}^2\right) \\ &\quad - \exp\left(\mu_{T'_a} + \mu_{T'_b} + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{T'_a}^2 + \sigma_{T'_b}^2)\right) \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

## 付録 B

異なる 2 つのリンクの移動時間の共分散と遅れ時間の共分散は以下に示すように、一致する。

$$\text{cov}[T_a, T_b] = E[(t_a^0 + T'_a) \cdot (t_b^0 + T'_b)] \quad (\text{B1})$$

$$= \text{cov}[T'_a, T'_b] \quad \forall a, b \in A$$

## 付録 C

$\mu = \mu_l - \ln p_l$  ( $l = 1, \dots, L$ ),  $\sum_l p_l = 1$  を満たす  $\mu, p_l$  が存在することを示す.  $p_l = \exp(\mu_l - \mu)$  であるから,  $\sum_l \exp(\mu_l - \mu) = 1$  となる. これを満たす  $\mu$  が存在すると仮定し, これを  $\mu^*$  とする. このとき,  $p_l$  の解  $p_l^*$  は  $p_l^* = \exp(\mu_l - \mu^*)$  となる. 一方で,  $\sum_l \exp(\mu_l - \mu)$  は  $\mu$  に関して連続な減少関数であり,  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_l \exp(\mu_l - \mu) = 0$  かつ  $\lim_{\mu \rightarrow -\infty} \sum_l \exp(\mu_l - \mu) = \infty$  であることから,  $\sum_l \exp(\mu_l - \mu^*) = 1$  となる有限の  $\mu^*$  が唯一存在する.

## 参考文献

- 1) Bureau of public road: Traffic assignment Manual, U.S. Department of Commerce, Urban Planning Division, Washington D.C., 1964.
- 2) Dominici, F., Parmigiani, G. and Clyde, M.: Con-jugate analysis of multivariate normal data with incom-plete observations. *The Canadian Journal of Statistics*, Vol. 28, No. 3, pp. 533–550, 2000.
- 3) Seo, T., Kusakabe, T., and Asakura, Y. Estimation of flow and density using probe vehicles with spacing measurement equipment. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol. 53, pp. 134–150, 2015.
- 4) Hara, Y., Suzuki, J. and Kuwahara, M.: Network-wide traf-fic state estimation using a mixture Gaussian graphical model and graphical lasso. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol. 86, pp. 622–638, 2018.
- 5) 原祐輔, 花岡洋平, 桑原雅夫. 道路ネットワーク内の関係性に着目した長期観測プローブデータによるプローブ未観測リンクの交通状態補間, 交通工学論文集, Vol. 2, No. 1, pp. 1-10.

(?)

## A method for spatiotemporal estimation of traffic states based on probe car data and traffic counter data

Ryuichi TANI and Kenetsu UCHIDA

This study proposed a method to estimate link flows of the whole road network by using probe car data and traffic counter data. In the whole road network, the number of traffic counters to be installed is limited. Likewise, the link travel time that is observed by the probe car is also limited in a certain time slot. We propose the method to estimate traffic states of the whole road network in a certain time slot by maximizing the likelihood of link flows and link delay times that are observed by traffic counters and probe cars. In this study, the link flows and the link delay times are estimated as random variables. We also show the method to estimate the mean and variance of OD traffic demands within a day. Finally, we show the results of numerical calculation in a simple test network and verify our proposed model.