

単調なパスを仮定した 2 ノード間の総経路数の計算手法について

北倉 大地¹・小林 俊一²・Hai Tran Thanh³・中山 晶一郎⁴・山口 裕通⁵

¹学生会員 金沢大学大学院 自然科学研究科 環境デザイン学専攻 (〒920-1192 石川県金沢市角間町)
E-mail:d-ktkr0829@stu.kanazawa-u.ac.jp

²正会員 金沢大学准教授 理工研究域 地球社会基盤学系 (同上)
E-mail:koba@se.kanazawa-u.ac.jp

³学生会員 金沢大学大学院 自然科学研究科 環境デザイン学専攻 (同上)
E-mail: @stu.kanazawa-u.ac.jp

⁴正会員 金沢大学教授 理工研究域 地球社会基盤学系 (同上)
E-mail:nakayama@se.kanazawa-u.ac.jp

⁵正会員 金沢大学助教 理工研究域 地球社会基盤学系 (同上)
E-mail:hyamaguchi@se.kanazawa-u.ac.jp

著者らは道路ネットワークの接続性を評価する指標として 2 ノード間を結ぶ総経路数について関心がある。道路の物理的な接続を考えると、完全に独立した経路数は始点あるいは終点ノードの次数で決まる。一方、部分的に重複を許す経路の総数はネットワークの規模拡大につれて組み合わせ爆発が起こる。このため、実道路ネットワークデータに対して部分重複経路数の総数を計算することは事実上困難である。そこで、本論文では交通工学的な観点から許容可能な部分重複経路数の近似計算手法を提案する。提案手法の要点は経路が経路するノードについてある種の単調性を制約として課すことであり、これらの経路を単調パスと定義する。この単調パスであれば総経路数を非常に簡単に計算できることを示す。

Key Words: Number of path, Network, Accessibility, Monotony path, Dijkstra

1. はじめに

大規模災害発生時には、通行不能リンクの発生によってネットワークの接続性が失われる危険性がある。ネットワーク接続性の定量的なリスク評価については様々な方法が提案されているが、外的作用である災害の規模を事前に定量的に想定すること自体が大きな課題であり、また道路の通行不能が生じる要因も単純ではないため、シナリオに基づくリスク評価には困難を伴うと思われる。著者らは、通行不能によるネットワークの機能障害を考えるための基本情報として、まずはネットワークのトポロジーから接続性の強度を測る手法について関心がある。本研究では、ネットワークを介した 2 地点間の接続強度を測る尺度として、2 地点間を結ぶ経路数に着目する。つまり、2 地点間のあるリンクが何らかの理由で通行不能となった場合には、代替となる別の経路がいくつあるのか、経路数を知ることによって接続性の強度を測ろう

というアイデアである。情報通信分野でも代替経路による接続強度について *N-edge-connected-network*¹⁾ の概念がある。

2 地点間の経路数にも、いろいろな定義がありうる。ここでは、まずループを排除することとし、すべて異なるエッジを経由することを念頭に置く。

完全非重複経路、一部のエッジの部分的な重複を認める部分重複経路(以下、本論文では「非重複経路」と呼ぶ)を考えてみよう。実道路ネットワークにおいては道路接続の物理的な制約のため、1 ノードに接続可能なエッジは高々数個である。完全非重複経路は始点ノードと終点ノードの次数が上限となるため、2 点間の接続性の複雑さや冗長性を議論するためには不適當であり、2 点間の非重複経路数を利用した議論が必要となる。

さて、非重複経路数の計算が本質的に難しいことを以下に述べる。高等学校の数学では、 $m \times n$ の正方形グリッドの対角方向(例えば左上から右下)に向かう最短経路

の経路数計算を取り扱う。最短経路であれば、2つの運動方向(左から右、上から下)の組み合わせ問題となるので、総最短経路数は $(m+n)!/m!n!$ である。しかし、この問題の制約を少し緩め、最短距離に代わって同じノードは2度通らないという制約を課した非重複経路の計算に置き換えると、例えば 2×2 の格子では12通り、 3×3 では184通りとなるように、単純組み合わせでの数え上げは計算量が飛躍的に増加する。規模の増加に伴う計算量の急激な増加を組み合わせ爆発と呼ぶ。

この組み合わせ問題に対して、湊ら²⁾はZDDと呼ばれる効率的なデータ構造に基づく超高速グラフ列挙アルゴリズムを考案し、すべての非重複経路数を網羅的に数え上げる効率的な解法を提案した。しかし、この超高速グラフ列挙アルゴリズムを用いても高々 26×26 程度のグリッドに対してすべてを列挙するのに、30 CPU (Xeon E7-8837)、メインメモリ1400 GBで2日間の計算を必要とし³⁾、すべての結果(世界記録)を取り出すのに3週間を要する⁴⁾。

経路数に着目した交通計画分野の先行研究について、例えば瀬戸、倉内ら⁵⁾は、非重複経路数を最大化するモデルを経路の所要時間などから制約条件を課し線形計画問題で定式化した例、吉野・羽藤⁶⁾はデマンド交通の運航計画の検討にZDDを適用を検討した例が見られる。一方で非重複経路数そのものを利用したものは少ないようである。経路数の数え上げが困難なこともその一因であると思われる。

本研究では、組み合わせ爆発を生じる非重複経路を全て数え上げることは諦め、2地点間の経路に制約条件を課し、制約条件を満たす非重複経路の総数を計算する近似手法を提案する。提案手法の定式化と数値実験結果を以降の節で詳しく説明する。

2. 定式化

(1) 単調なパスの概念

まず1組のODペアが与えられたとき、この2地点を結ぶOD間の「単調パス」を定義する。この単調パスは本研究の根幹をなす重要な概念である。

地点を表す「ノード」、2地点間を接続する道路を「エッジ」として、ノードとエッジで道路ネットワークを表現する。各エッジの属性は始点ノード、終点ノード及び重みであり、重みはエッジ長や旅行時間などの正の値をとる量とする。

まず、複数始点を許すダイクストラ法を用いて、すべてのノードについて、ODいずれかの地点からの最短距離(最小コスト)と最上流ノード(つまりOノードあるいはDノード)を計算する。この計算結果を利用して、すべてのノードを3つの部分集合に分類する。

- O側ノード：最短距離が上限以下、かつ最上流ノードがOノードとなるノードの集合
- D側ノード：最短距離が上限以下、かつ最上流ノードがDノードとなるノードの集合
- その他のノード：最短距離が上限を超えるノードの集合

次に、ノードの所属する部分集合と最短距離を用いて、以下のルールでエッジリストの書き換えを行う。

- 始点、終点ノードともO側ノードに属する場合：始点ノードの最短距離が終点ノードの最短距離よりも小さければ、エッジリストに残す。さもなければエッジリストから抹消する。
- 始点、終点ノードともD側ノードに属する場合：始点ノードの最短距離が終点ノードの最短距離よりも大きければ、エッジリストに残す。さもなければエッジリストから抹消する。
- 始点ノードがO側ノードに、終点ノードがD側ノードに属する場合：エッジリストに残す。
- それ以外：エッジリストから抹消する。

上記で作成したエッジリストによれば、OノードからDノードに至るパスは、O側ノードにおいては必ず始点から遠ざかる方向に、O側ノードとD側ノードを結ぶエッジでは必ず始点側から終点側に、D側ノードにおいては必ず終点に近づく方向となる。このようなパスをOD間の「単調パス」と定義する。単調パスは最短経路よりも遠回りは許すが、任意の非重複経路とは異なり、経由する各ノードの最短距離について上記の単調性が制約条件として課されている。

(2) 非重複経路数の計算

前項(1)で求めたエッジリストに基づいて隣接行列を定義する。総ノード数 n とすると、隣接行列 A は $n \times n$ の正方行列で、その成分は次式で定義される。

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

ここに E はリンクの集合を表しており、各成分はノードペア (i,j) がリンクで結ばれていれば1、結ばれていなければ0となる。隣接行列 A の m 乗 A^m の成分 (i,j) は、 m 個のエッジを経由して始点ノード i から終点ノード j に至る経路数を意味する。したがって、隣接行列 A のべき乗の成分 (i,j) は始点ノード i から終点ノード j に至る全経路数を意味する。

$$(i \text{ から } j \text{ への全経路数}) = \sum_{k=1}^{\infty} A^k(i,j) \quad (2)$$

前項で求めたエッジリストによれば、始点 s から終点 t に至るパスにはループは生じない。また単調性より、パスが経由するエッジ数は最大でも総エッジ数 m を超えることはない。したがって、単調パスに基づく非重複経路数は以下で計算できる。

$$\sum_{k=1}^m A^k(s, t) \quad (3)$$

最後に提案手法の計算量を見積もっておく。総ノード数を V 、総エッジ数を E とする。前半のエッジリストの書き換えでは、ダイクストラ法が計算上の律速過程であるので、計算量は $O(V^2)$ となる。後半の経路数計算では、行列のべき乗の有限和であるので計算量は $O(EV^3)$ となる。このように提案手法の計算量は多項式オーダーである。

(3) 単純なネットワークを用いた解析例

正方格子を用いて提案手法を説明する。上記の手順を用いて有向グラフで表現した、正方格子から成るネットワークを図-1 に示す。

図中の S 、 G はそれぞれスタートとゴールを示している。青色はスタート側のノード、緑色はゴール側のノードである。スタート側では S から遠ざかる方向のみ、ゴール側では G に近づく方向のみ通行可能である。また両グループを橋渡しするリンクでは、図中の赤色矢印で示すように、スタート側からゴール側に向かう方向のみ通行可能である。

この中で、提案手法による計算に関わる領域を考えると、図-2 で示すような流入リンクのみが接続するスタート側ノード及び流出リンクのみが接続するゴール側ノードは、提案する非重複経路数の計算に関係しない。

図-1 の例では格子端点がこれに値し、ネットワークから除外される。このようなステップを繰り返すと、最終的に単調パスの非重複経路数計算に寄与する領域を図-3 のように求めることができる。

実際に図-3 のネットワーク例で非重複経路数を計算してみる。その結果、経由リンク数 7 の経路が 35、リンク数 9 の経路が 8、リンク数 11 の経路が 10 という結果が得られた。ここで、経由リンク数 7 というのは高校数学で取り扱われる組み合わせの問題のケースと一致している。つまり、 3×4 の格子において縦に 3 回横に 4 回の移動で対角上の始点から終点へ移動する経路の組み合わせ問題である。残りのリンク数 9、11 のケースについては、それぞれ移動可能な段数が 1 段、2 段増えた場合に相当している。このように、本研究で提案する計算手法は組み合わせ法の拡張であると捉えることもできる。道路ネットワークを格子状の正方形グリッドに対応させればこのことは自明である。

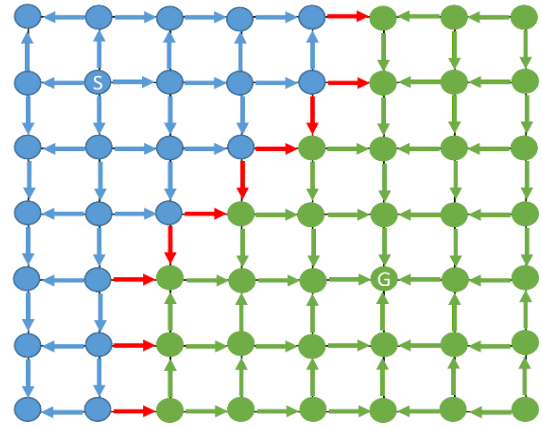


図-1 有向グラフ化例

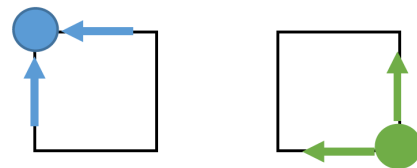


図-2 計算に寄与しないノード例

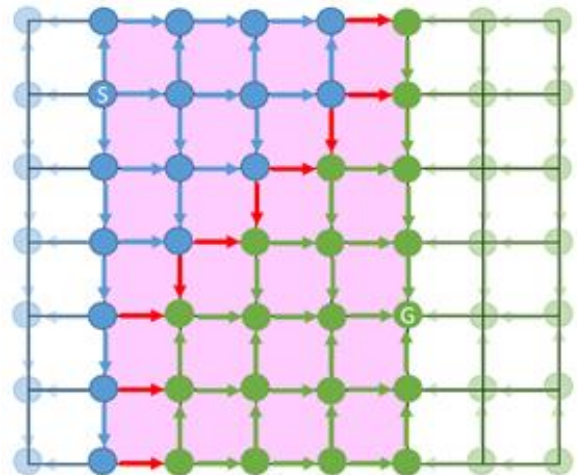


図-3 非重複経路数計算に関与する領域

3. 実ネットワークへの適用

第 1 節では経路数計算では本質的に組み合わせ爆発が生じることを述べた。そこで、実道路ネットワークデータを例に提案手法の適用性を確認する。

(1) 使用した実道路ネットワーク

ここでは金沢市域の道路ネットワークデータを使用し

た. 図-4 にその全体図を示す. データソースは OSM (OpenStreetMap) である⁷⁾. OSM 道路データの加工手順は以下の通りである.

- OSM データをシェープファイルに変換したデータを Geofabrik サーバ⁸⁾からダウンロード.
- QGIS 上で解析対象エリアを切り出し, さらに道路の 카테고리から自動車交通に関係の深い Motorway, Trunk, Primary, Secondary, Tertiary, 及びそれらの Link のみを利用し, その他のカテゴリ(生活道路, 農道, 作業用道路など)のデータを削除し, シェープファイル(加工シェープファイルデータと呼ぶ)として保存.
- GISF2E スクリプト⁹⁾を利用し, 加工シェープファイルデータからノードとエッジリストを切り出し¹⁰⁾.
- 次数 2 となるノードの除去. 次数 2 はエッジの中間接点とみなせるので, これを除去して変数である総ノード数を減らす.
- エッジ距離が閾値以下となるエッジの除去. 閾値は加工シェープファイルデータから, 図-5 のようにエッジ長を昇順に並べて得られる指数関数の係数より 15[m] と設定した.

GISF2E で切り出したネットワークデータ規模は, 総エッジ数 3308, 総ノード数 2610 であったのに対し, 次数 2 ノード及び閾値以下のエッジ長さのエッジの除去を行う総エッジ数 1859, 総ノード数 1171 となった. またエッジの平均長は 339.90[m] である. エッジ長の分布を 図-5 に示す. このネットワークデータに対して単調パスによる非重複経路数計算を行う.

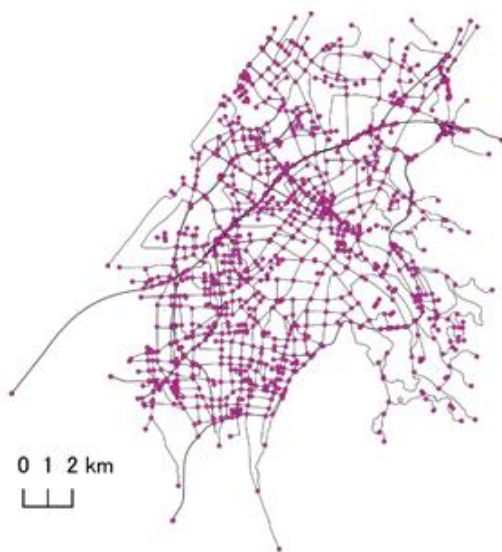


図-4 対象実道路ネットワーク：金沢市周辺

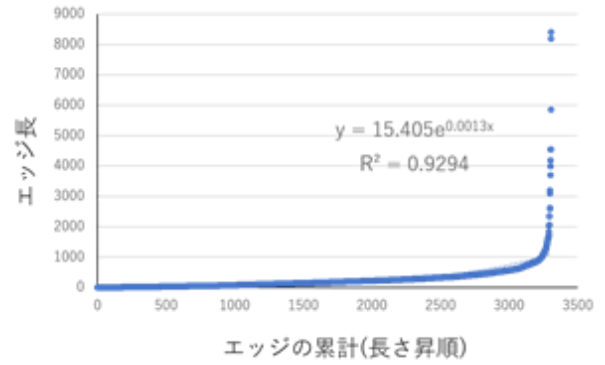


図-5 エッジ長の分布

(2) 解析結果

OD の組み合わせとして以下の 4 ケースを取り上げる. それぞれの地点と位置関係を 図-6 に示す. それぞれの立地上の特徴と計算結果は以下の通り.

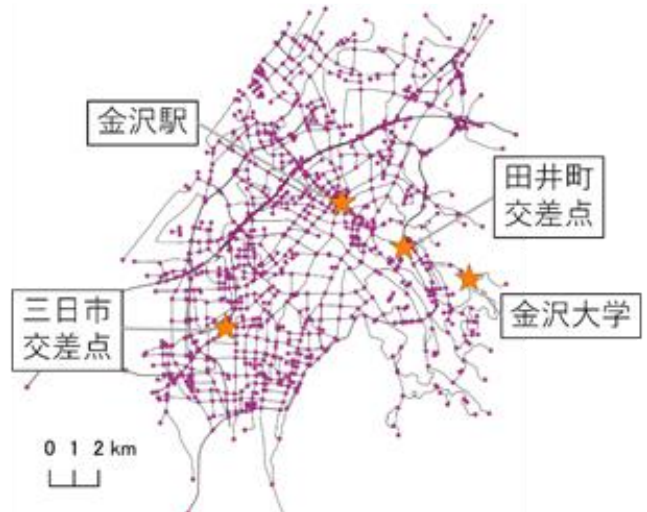


図-6 対象とする OD の位置

- ケース 1：金沢駅～金沢大学

始点はエッジが密集している市街地に位置する金沢駅. 終点は郊外の丘陵地に立地する金沢大学. 最短距離は 6,891.97[m]. 単調パスの非重複経路数は 530,862 個. 経路に含まれるエッジ数から見た経路数分布を 図-7 に, O側ノード(金沢駅側：赤), D側ノード(金沢大学側：青)の所属分布を 図-8 に示す.

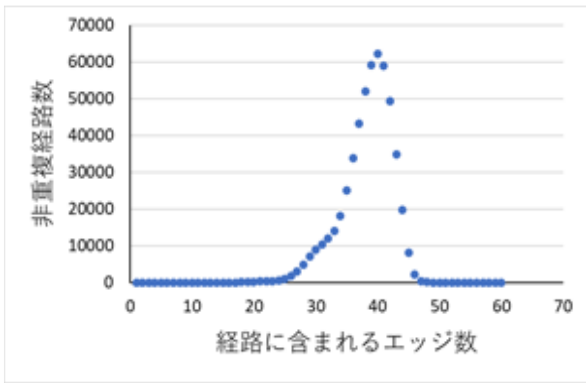


図-7 ケース1(金沢駅～金沢大学)非重複経路数分布

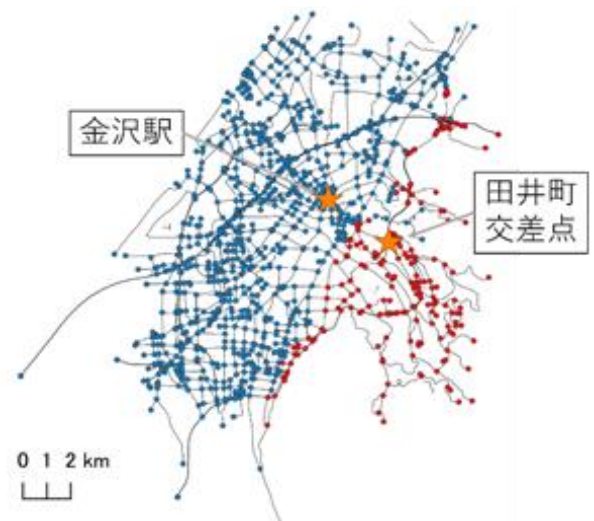


図-10 ケース2の各ノードの部分集合(OD所属)分布

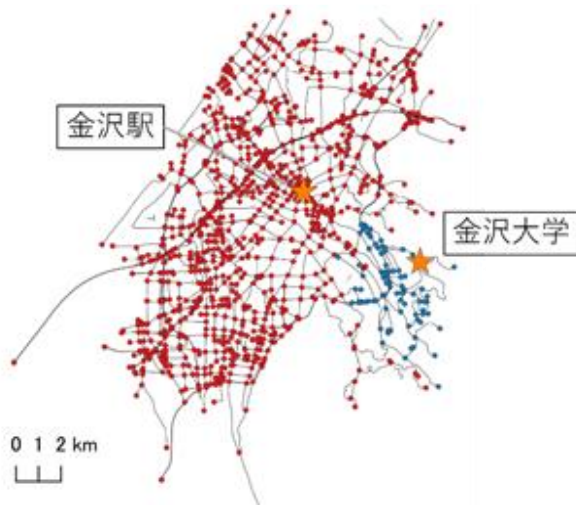


図-8 ケース1の各ノードの部分集合(OD所属)分布

- ・ケース2：田井町交差点～金沢駅
 始点はケース1の最短経路上でほぼ中間地点にあたる田井町交差点，終点は金沢駅．最短経路長は3,459.09[m]．単調パスの非重複経路数は274,179個．経路に含まれるエッジ数から見た経路数分布を図-9に，O側ノード(田井町交差点側：赤)，D側ノード(金沢駅側：青)の所属分布を図-10に示す．

- ・ケース3：田井町交差点～金沢大学
 始点はケース1の最短経路上でほぼ中間地点にあたる田井町交差点．終点は金沢大学．最短経路長は3,432.89[m]．単調パスの非重複経路数は170個．経路に含まれるエッジ数から見た経路数分布を図-11に，O側ノード(田井町交差点側：赤)，D側ノード(金沢大学側：青)の所属分布を図-12に示す．

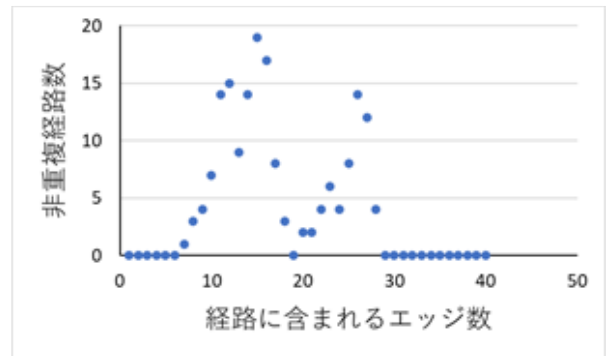


図-11 ケース3(田井町交差点～金沢大学)非重複経路数分布

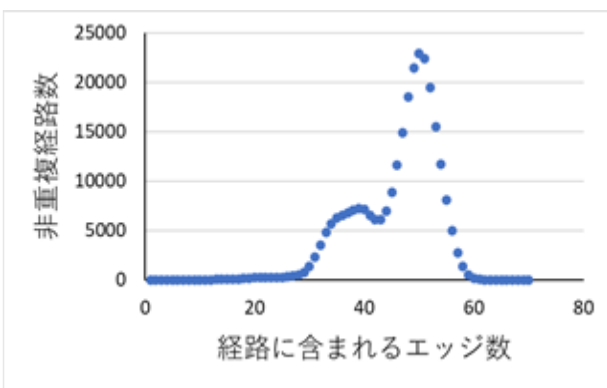


図-9 ケース2(田井町交差点～金沢駅)非重複経路数分布

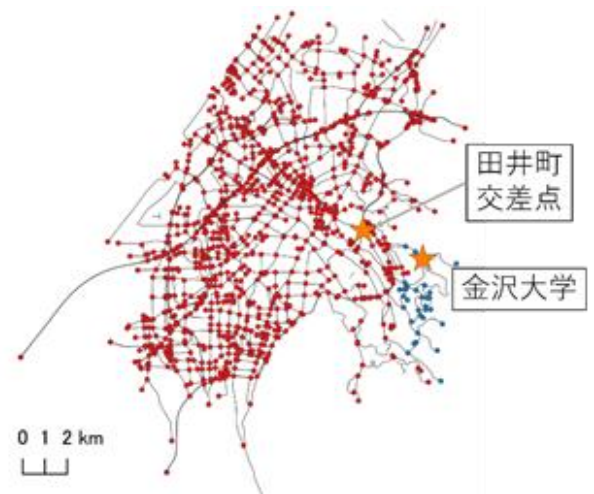


図-12 ケース3の各ノードの部分集合(OD所属)分布

・ケース 4：金沢駅～三日市交差点

始点はケース 1 と同じ。終点は幹線道路である国道 8 号線上にある市街地の三日市交差点。最短経路長は 7,639.18[m]。単調パスの非重複経路数は 12,133,204 個。経路に含まれるエッジ数から見た経路数分布を図-13 に、O 側ノード(金沢駅側：赤)、D 側ノード(三日市交差点側：青)の所属分布を図-14 に示す。

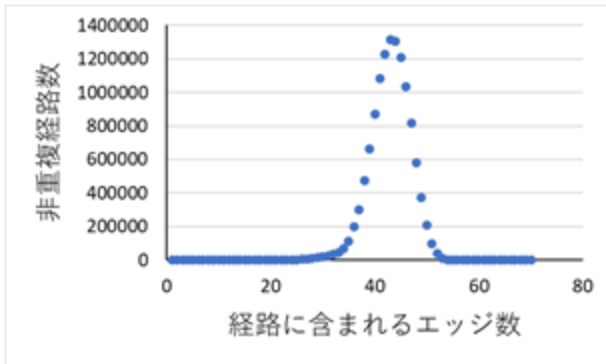


図-13 ケース 4(金沢駅～三日市交差点)非重複経路数分布

ケース 1 について、O 側ノード(金沢駅)と D 側ノード(金沢大学)を図-8 に示す。始点の金沢駅が金沢中心市街地に近く道路網の発達した地域に位置するのに対し、金沢大学は金沢外環状道路山側幹線の外側の末端部に位置する。丘陵地やそれに接続する山岳地帯という地形的制約のため山側幹線から外側末端部へ向かう道路網の発達には貧弱である。この違いをネットワーク接続性の観点から調べるため、ケース 2、ケース 3 では、山側幹線近くの市街地に位置する田井町交差点からほぼ等距離にある金沢駅と金沢大学を取り上げ、単調パス非重複経路数を比較した。その結果、経路数には約 1600 倍の顕著な差が生じた。

ケース 4 は OD ともに市街地に位置するほか、平野部で地形的制約が小さく、山側から海側にかけて道路網が十分発達している特徴を有する。このため単調パスの非重複経路数はケース 1 の約 23 倍となった。

ノードの部分集合(OD 所属)の分布の様子から読み取れる通り、提案手法では OD 間の最短経路と直交する方向に遠回りを許す。また数え上げた経路は単調パスである。これらから部分集合の界面と始点、あるいは界面と終点を結ぶ三角形領域におけるネットワークの密度と、界面をまたぐエッジの密度の積の形で単調パスの非重複経路数が支配されることが分かる。

上記の例題では、地形的制約によって、丘陵地にある金沢大学と平野部に展開する金沢市街地では道路網の形状が異なることが、2 つのノード部分集合の界面の大き

さに影響を与えていることが理解できよう。

4. 本研究のまとめ

本研究では、ネットワーク上の OD2 ノード間の接続性を測る指標として非重複経路数に着目し、その計算法について論じた。経路数計算は本質的に組み合わせ爆発を生じるため、厳密に解くことは極めて困難である。そこで、本研究では、交通工学的にも受け入れ可能な仮定を設けて非重複経路数を計算する近似手法を検討した。

具体的には、まず各エッジのコストを利用し、始点あるいは終点からの最小コスト(最短距離)から各ノードのスコア値を計算する。始点から終点に至るパスのうち、始点側ではノードのスコア値が必ず増加し、終点側ではスコア値が必ず減少するという単調性を制約として課し、これを満たすパスを「単調パス」と定義した。この単調パスにはループが含まれないため、OD 間の単調パスの非重複経路数は有限である。また単調パスを構成するエッジに基づく隣接行列を利用すれば、非重複経路の総数は多項式オーダーで計算可能である。

提案手法の実道路ネットワークへの適用性を確認するため、金沢市付近の実道路ネットワークを用いた例題を取り上げた。エッジ数 1800 個程度、ノード数 1100 個程度の計算では、普通の事務用 PC で 1 分以内に計算できる非常に簡単な計算であった。一方、組み合わせ数は一千万通りを超えるため、これ以上規模が大きくなる場合には桁あふれに注意する必要があると思われる。

また提案手法の特徴として、ノードを始点側と終点側の部分集合に分けるため、部分集合の要素の界面は最短距離方向と直交する方向に進展する。このため始点と界面部分、あるいは終点と界面部分で構成される三角形領域での経路の複雑性、及び界面を横断するエッジの個数が要因となって単調パス非重複経路数が支配されると考えられる。過度に遠方のノードを排除するためには、部分集合への分離時に、上限距離の制約を課すことが有効であろう。これらについては報を改めて報告したい。

参考文献

- 1) Grötschel, M. : Design of survivable networks. Handbook in Operations Research and Management Science, 7, pp.617-672, 1995
- 2) 湊真一：BDD/ZDD を用いたグラフ列挙索引化技法, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 57, No. 11, pp. 597-602, 2012.
- 3) H. Iwata, Y. Nakazawa, J. Kawahara, T. Uno, and S. Minato : Efficient Computation of the Number of Paths in a Grid Graph with Minimal Perfect Hash Functions, TCS

- Technical Report, TCS-TR-A-13-64, Hokkaido University, April 26, 2013.
- 4) Number of nonintersecting (or self-avoiding) rook paths joining opposite corners of an $n \times n$ grid : The on-line encyclopedia of integer sequences, <https://oeis.org/A007764>
 - 5) 瀬戸由美子, 倉内文孝, 宇野伸宏 : 脆弱性の概念を用いた道路網接続性評価に関する研究, 土木計画学研究・講演集, 2008.
 - 6) 吉野大介, 羽藤英二 : ゼロサプレス型二分決定グラフを用いたデマンド交通の運行経路の高速列挙手法の提案, 土木学会論文集 D, Vol. 72, No. 5, pp. 1229-1239, 2016.
 - 7) Open Street Map, <http://openstreetmap.org>
 - 8) Geofabrik Download Server, <https://download.geofabrik.de/asia/japan.html>
 - 9) GIST2E : GIS Features to Edge List Tool (2D and 3D OSM version), <https://csun.uic.edu/codes/GISF2E.html>
 - 10) Karduni, A., Kermanshah, A. & Derrible, S. : A protocol to convert spatial polyline data to network formats and applications to world urban road networks, Sci Data 3, 160046(2016), <https://www.nature.com/articles/sdata201646>

(2020.10.2 受付)

MONOTONIC PATH ON NETWORK AND ITS APPLICATION ON THE CALCULATION OF TOTAL NUMBER OF PATHS BETWEEN TWO NODES

Daichi KITAKURA, Shunichi KOBAYASHI, Hai Tran Thanh,
Shoichiro NAKAYAMA and Hiromichi YAMAGUCHI