

災害時の多階層ロジスティクスネットワークにおける最適な確率的在庫配送戦略の提案

河瀬理貴¹・井料隆雅²

¹学生会員 東北大学大学院 情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

E-mail: r-kawase@dc.tohoku.ac.jp

²正会員 東北大学大学院 情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

E-mail: iryo@tohoku.ac.jp

被災地の物資需要を予測し配送するプッシュ型戦略は、物資需要の把握に時間を要する中で迅速に救援物資を支援するのに重要な役割を果たす。従来、被災地の物資需要を早期に満たすためには、被災地外の広域物流拠点・被災地内の地域物流拠点・避難所の三層で構成される多階層ネットワークに基づく物資支援が有効であると考えられてきた。しかし、実際には被災地内の道路や拠点の損傷により配送経路にボトルネックが発生するなど、従来の多階層ネットワークの有効性に疑念を生む実例が報告されている。このような問題意識のもと、本論文では、従来の多階層ネットワークを拡張し、階層を超えたリンクを有するネットワークにおけるプッシュ型在庫配送戦略を分析する。その結果、プッシュ型戦略において被災地外の広域物流拠点から避難所に直接配送する戦略が望ましいネットワークの被災状況及びその復旧過程を明らかにした。

Key Words: *inventory distribution systems, multi-echelon logistics network, push-mode strategy, stochastic problem, optimal control theory*

1. はじめに

迅速かつ的確な救援物資配送は災害の被害を緩和するのに不可欠であり、人道支援ロジスティクスにおける重要な課題となっている。EM-DAT¹⁾のデータベースによれば、1994年から2013年の間に世界で6873件の自然災害が人々を襲い、年間平均2億1800万人が被害を受けている²⁾。今後50年間で自然災害は約5倍増加すると推定されており³⁾、被害を緩和するためには、人道支援ロジスティクスのさらなる研究が不可欠である。

救援物資配送が困難である主たる要因は、被災地で生じる物資需要の不確実性にある。想定外の状況が生じる発災後の環境での的確な物資配送を行うには、被災地の要請に応じた戦略を取るのが望ましい。しかし、発災後に被災地から得られる需要情報は限られる。迅速な物資配送のためには、被災者が求める物資を把握する前に、事前に想定した値を頼りに物資を配送する必要がある。数週間経過し通信が復旧すれば、被災地の要請に応じた物資配送も可能になる。実際の災害対応計画では、前者はプッシュ型戦略、後者はプル型戦略と呼称される。このように物資需要の把握状況に応じて、物資配送戦略も適切な対応をしなければならない。

平時の商業ロジスティクスでは、複数階層で構成さ

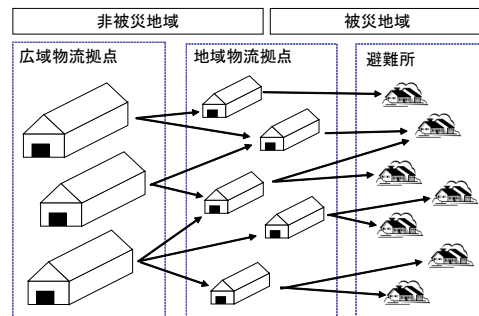


図-1 災害時のロジスティクス・ネットワークの構造

れるネットワークの各層に在庫を確保し下流の発注に対応することで、需要の不確実性に対処している。この種の在庫は安全在庫と呼ばれ、物流運用費用を最小化する在庫量を評価する確率的在庫モデルが多く開発されてきた。1960年代初頭にその基礎となる理論モデル⁴⁾が開発されて以降、実践への理解を深めるために、分岐や合流構造をもつ現実的なネットワークを扱うことができるよう、在庫モデルは拡張されてきた⁵⁾。

人道支援ロジスティクスモデルにおいても、図-1に示すような多階層ネットワークを前提とした数値解析が伝統的に行われてきた。災害時のロジスティクスネットワークは、主に被災地外の広域物流拠点、被災地内や

周辺の地域物流拠点、および避難所の三種類の階層で構成される。例えば Sheu⁶⁾ は、三階層のネットワークにおけるプル型の在庫配送システムを開発した。このシステム上で地域物流拠点は、被災地の要請に応じて救援物資の流入・流出を調整するハブとして機能する。その後 Shue⁷⁾ は、三階層のネットワークを拡張し、広域物流拠点から避難所への直接配送を含む在庫配送システムを提案した。直接的なリンクは地域物流拠点による調整のない配送として定義される。このように多階層システムにおける地域物流拠点は、被災地の要請に応じて救援物資の在庫を調整することが求められる。

数値解析による人道支援ロジスティクスの研究は多くなされている一方、商業ロジスティクスと異なり、その理論研究は限られる。特に、多階層ネットワークを扱った人道支援ロジスティクスの理論モデルは筆者の知る限り無い。Lodree⁸⁾ は、商業ロジスティクスの古典的な経済発注量モデルを拡張し、災害時に急増する物資需要に対する在庫方策を検討した。Beamon and Kotleba^{9),10)} や McCoy and Brandeau¹¹⁾ は、難民の人道的支援を改善するために、商業ロジスティクスの基在庫方策を拡張した。彼らの理論モデルは、物流拠点と被災地域の二層で構成されるネットワークを分析対象としており、実際が多階層システムで起こり得る現象を分析できない。

実際には、被災により地域物流拠点から避難所への配送が困難である場合、従来の多階層ネットワークは望ましくない状況を招く。最大フロー最小カット定理に基づけば、階層間のリンク容量の最小値が配送量の最大値となる。極論、何れかの階層間に接続性がなければ避難所に物資を配送できない。実際に熊本地震では、被災地内の配送でボトルネックが発生した事例が報告されている¹²⁾。一方、被災地外の広域物流拠点から避難所へ物資を直接配送する成功例も報告されている¹³⁾。こうした実証例のように、多階層ネットワークを前提とした戦略は予期せぬ結果を生む可能性がある。

被災地の要請に応じたプル型戦略においては、伝統的な多階層ネットワークの解析は適するかもしれないが、プッシュ型戦略をとる場合、それが適切であるとは限らない。商業ロジスティクスの在庫モデルは、商品の発注、すなわち物資の要請を前提としたプル型システムの解析モデルである。災害直後のように情報が限られる場合、地域物流拠点のような中間拠点で在庫を調整することは困難である。実際に東日本大震災では、被災地から情報が届かず地域物流拠点に物資が滞留した¹⁴⁾。発災直後のプッシュ型戦略は迅速に物資需要を満たす上で重要であり、適切なネットワーク構造を前提とした評価手法の開発が急務である。

以上の背景を踏まえ、本研究では、従来のネットワークを拡張し、階層を超えたリンクを有する多階層ネッ

トワークにおけるプッシュ型戦略の確率的在庫配送システムを取り扱う。このシステムは、物資需要の不確実性に加え、平時では生じ得ないネットワークの被害に起因する配送の困難性によって複雑になる。この状況で意思決定者が考慮すべき選択肢は次の二つである。

- 商業ロジスティクスと同様、ネットワークの各層に在庫を持ち、複数の地域物流拠点を經由して段階的に避難所に物資を配送する。
 - 広域物流拠点から避難所に直接物資を配送し、避難所に在庫を確保することで需要の不確実性に対処する。
- 本論文を通して、これらの二つの選択肢を *multistage logistics* と *direct logistics* と呼称する。一般的に、地域物流拠点と避難所を繋ぐ被災地内の道路は、被災地外の広域物流拠点が利用する幹線道路に比べて甚大な被害を受ける可能性が高い。この場合は *direct logistics* が優れた性能を発揮するが、*multistage logistics* が利用する被災地内の道路が復旧されれば、その限りではない。このように場合によっては、*multistage logistics* が *direct logistics* よりも優れた性能を発揮することを期待することは合理的である。従って、本研究では次に示すリサーチアクションを検討する。

災害時のプッシュ型戦略において、意思決定者が *direct logistics* もしくは *multistage logistics* を採用すべき条件は何か？

上記の問いに答えるために、災害時の在庫配送システムを近似する理論モデリングを構築し、被災状況に応じた在庫配送戦略を分析する。在庫配送戦略は、物流費用 (e.g., 在庫管理費用や配送費用) や物資不足の期待値を最小化する戦略に従って行われると想定し、需要の不確実性を考慮した確率的動学最適化問題として定式化する。この最適化問題より導出した在庫配送戦略を解析することで、*direct logistics* もしくは *multistage logistics* を採用すべき条件を明らかにする。

本論文は次のように構成する。2章では、災害時の在庫配送システムを定義し、確率的動学最適化問題を定式化する。3章では、最適化問題より在庫配送戦略を導出し、4章でその数理特性を明らかにする。最後に、結論と今後の研究の方向性を、5章にまとめる。

2. 確率的在庫配送モデルの構築

(1) 在庫配送システム

本研究では、災害時におけるプッシュ型の在庫配送システムを取り扱う。このシステムは、ロジスティクスネットワークとそのネットワーク上を流れる救援物資の二つの要素で構成され、その最適な状態は物流費用や物資不足の期待値を最小化する在庫配送戦略で与えられる。具体的には、計画期間内に生じる物資需要

表-1 ロジスティクスネットワークに関する表記方法

$G_N(N, A)$	N 階層で構成されるネットワークを示す有向グラフ
N	ノード集合 ($N = \{N_1, \dots, N_n, \dots, N_N\}$)
N_1	広域物流拠点集合 ($N_1 = \{1_1, \dots, o, \dots, N_1\}$)
N_n	n 層目の地域物流拠点集合 ($N_n = \{1_n, \dots, i_n, \dots, N_n\}$)
N_N	避難所集合 ($N_N = \{1_N, \dots, j, \dots, N_N\}$)
M	地域物流拠点集合 ($M = \{N_2, \dots, N_n, \dots, N_{N-1}\}$)
N^+	子ノードを有するノード集合 ($N^+ = \{N_1 \cup M\}$)
N^-	親ノードを有するノード集合 ($N^- = \{M \cup N_N\}$)
C_l	ノード $l \in N^+$ の子ノード集合 (e.g., $C_{i_3} = \{j, N_4\}$ in Fig.2)
P_k	ノード $k \in N^-$ の親ノード集合 (e.g., $P_{N_2} = \{i_2, N_2\}$ in Fig.2)
A	有向リンク集合 ($A = \{A^+ \cup A^-\}$)
A^+	ラストワンマイルリンク集合 ($A^+ = \{(l, j) \forall j \in N_N, l \in P_j\}$)
A^-	中間リンク集合 ($A^- = \{(l, i) \forall i \in M, l \in P_i\}$)
r_{lk}	リンク $(l, k) \in A$ の配送時間と起終点ノード l, k での搬入出時間の和 (以下では、リード時間と呼称する)
r_m	広域物流拠点からノード $m \in N$ までの最短リード時間 ($r_o = 0 \forall o \in N_1$)

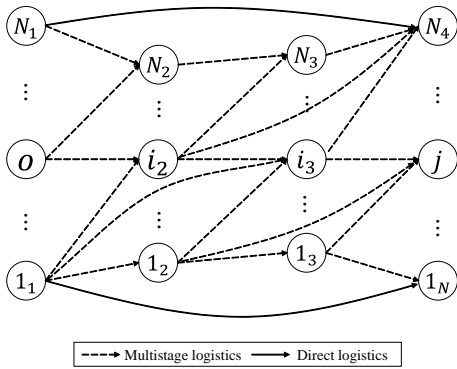


図-2 4 階層のロジスティクスネットワークの例

を想定し、その想定値に基づき、広域物流拠点や地域物流拠点から配送する物資量と、地域物流拠点や避難所で保管する在庫量を決定する。本節では、ロジスティクスネットワークの設計と救援物資の流れについて説明する。

a) ロジスティクスネットワーク

本研究は、広域物流拠点と地域物流拠点と避難所の三種類の層で構成される多階層ロジスティクスネットワーク (e.g., 図-2) を分析対象とする。ネットワークのレイアウトを示す集合やパラメータを表-1 に示す。このネットワークは、合流と分岐構造が混在する多階層ネットワークであり、全てのノードの地理的關係は既知とする。ただし施設位置の選択自体が、在庫配送戦略の性能に影響する重要な要素であることには留意する。救援物資は広域物流拠点 $o \in N_1$ から地域物流拠点 $i \in M$ を経由して避難所 $j \in N_N$ へ段階的に、もしくは広域物流拠点から避難所へ直接配送される。前者は *multistage logistics*、後者は *direct logistics* を表す。またネットワークの外部には、広域物流拠点の要請を常に満たすことができる外部の供給者が存在すると仮定する。地域物流拠点での詰替を考えれば、基本的に

表-2 救援物資の流れを表す変数やパラメータの表記方法

制御変数 $S(t)$	
$S_{lk}^D(t)$	時刻 t にリンク $(l, k) \in A$ の上流ノード $l \in N^+$ を流れるフロー (正：上流から下流，負：下流から上流)
$S_{lk}^A(t)$	時刻 t にリンク $(l, k) \in A$ の下流ノード $k \in N^-$ を流れるフロー
$S_k^A(t)$	時刻 t に下流ノード $k \in N^-$ を流れるフローの総和 ($S_k^A(t) := \sum_{l \in P_k} S_{lk}^A(t)$)
状態変数 $IN(t)$	
$IN_k(t)$	時刻 t におけるノード $k \in N^-$ の正味在庫量
パラメータ	
$S_{lk}(t)$	$S_{lk}^D(t)$ の初期パラメータ ($S_{lk}(t) \geq 0 \forall t \in [-r_{lk}, r_l], dS_{lk}(t)/dt = 0$)
$\bar{D}_j(t)$	時刻 t におけるノード $j \in N_N$ の単位時間あたりの物資需要の想定値 (以下、需要と呼称する) の平均パラメータ ($d\bar{D}_j(t)/dt = \dot{\bar{D}}_j, \bar{D}_j(t) \geq 0$)
$D_j^{SD}(t)$	需要の分散パラメータ ($D_j^{SD}(t) \geq 0$)
$z_j(t)$	需要のバラツキを示す独立な標準ワイナー過程

は *direct logistics* がより早く避難所に物資を届けることができる。ただし、リンク $(l, k) \in A$ のリード時間 r_{lk} は確定的であり、ネットワーク混雑や道路網・地域物流拠点の被災状況に関する不確実性は考慮していない。

b) 救援物資の流れ

救援物資の流れを表す変数やパラメータの定義を表-2 に示す。本研究では、最上流の広域物流拠点の組を意思決定者とし、ネットワーク上の全ての物流拠点に対して、流入・流出する単位時間あたりの物資量 (以下、フローと呼称する) $S(t)$ を指示できる状況を想定する。地域物流拠点は意思決定者の指示に従い、下流の地域物流拠点や避難所に救援物資を配送する。ただし、時間経過によって使用不可とならないストック可能な物資のみを対象とする。リンク $(l, k) \in A$ を流れるフローは保存則を満たし、時刻 t に上流ノード l を流れるフロー $S_{lk}^D(t)$ と時刻 $t + r_{lk}$ に下流ノード k を流れるフロー $S_{lk}^A(t + r_{lk})$ は等しい。

各ノードの正味在庫量 $IN(t)$ は、そのノードに流入・流出するフローと需要に応じて変化する。地域物流拠点に在庫を積む場合は *multistage logistics*、そうでない場合は *direct logistics* の在庫戦略である。意思決定者は、事前に想定した物資需要を頼りにプッシュ型の在庫配送戦略を行うが、実際の物資需要は不完全情報である。以上の在庫配送システムを想定し、救援物資の流れを次で定式化する：

$$dIN_j(t) = \left[\sum_{l \in P_j} S_{lj}^A(t) - \bar{D}_j(t) \right] dt - D_j^{SD}(t) dz_j(t) \quad \forall j \in N_N, \quad (1)$$

$$\dot{IN}_i(t) = S_i^A(t) - \sum_{k \in C_i} S_{ik}^D(t) \quad \forall i \in M, \quad (2)$$

$$IN_j(0) < 0 \quad \forall j \in N_N, \quad (3)$$

$$IN_i(0) \geq 0 \quad \forall i \in M, \quad (4)$$

$$S_{lk}^D(t) = S_{lk}(t) \quad \forall (l, k) \in A, t \in [-r_{lk}, r_l], \quad (5)$$

$$S_{lk}^A(t) = S_{lk}^D(t - r_{lk}) \quad \forall (l, k) \in A. \quad (6)$$

式 (1)(2) に示すように、正味在庫量の変化は流入・流出する単位時間あたりの物資量で構成される。式 (3)(4) はその初期条件を示し、地域物流拠点 $i \in \mathbf{M}$ には下流に配送する物資備蓄がある一方で、避難所 $j \in \mathbf{N}^N$ では物資が不足している状況を表す。式 (5) は制御変数の初期条件、式 (6) はフロー保存則を示す。この問題を解く上では変数の初期条件を外生的に与えるが、実際は $IN_i(0)$ は発災前の備蓄量を表す意思決定変数である。上記を含め以下に示す数式は、特に記載がない限り、任意の時刻 $t \in [0, T]$ において成り立つ。本研究では、式 (1)-(6) に示す救援物資の流れを分析することで、*direct logistics* もしくは *multistage logistics* を採用すべき条件を明らかにする。

(2) 動学最適化問題の定式化

本節では、2.1 節で定義した在庫配送システムの最適な状態を定義する。以下では、まず、システムの最適状態を与える最適化問題を示す。そして、システムの未知変数を解析的に導出するために、最適化問題を分解した問題を定式化する。

a) システム最適な在庫配送戦略の定義

在庫配送システムの最適な状態は、計画期間内の期待費用を最小化する在庫配送戦略である。期待費用は、ネットワーク上の在庫量を換算した正味在庫費用、各物流拠点が配送する救援物資の配送費用、および地域物流拠点での搬入量と搬出量の差異に応じて決まる荷捌き費用から構成される。具体的には、システム最適な在庫配送戦略を求める問題は、以下の確率的動学最適化問題として表現される：

システム最適化問題

$$\min V = E \int_0^T TC(t) dt, \quad (7)$$

subject to Eqs.(1) – (6) and

$$TC(t) = \sum_{k \in \mathbf{N}^-} TC_{IN_k}(t) + \sum_{(l,k) \in \mathbf{A}} TC_{S_{lk}}(t) + \sum_{i \in \mathbf{M}} TC_{S_i}(t), \quad (8)$$

$$TC_{IN_k}(t) = h_k [f_I([IN_k(t)]^+) + f_B([IN_k(t)]^-)] \quad \forall k \in \mathbf{N}^-, \quad (9)$$

$$TC_{S_{lk}}(t) = c_{lk} f_S(S_{lk}^A(t)) \quad \forall (l,k) \in \mathbf{A}, \quad (10)$$

$$TC_{S_i}(t) = c_i f_{TS}(S_i^A(t) - \sum_{k \in \mathbf{C}_i} S_{ik}^D(t)) \quad \forall i \in \mathbf{M}. \quad (11)$$

ここで $[\cdot]^+$ は $\max\{0, \cdot\}$ 、 $[\cdot]^-$ は $-\min\{0, \cdot\}$ を表す。 $f(\cdot)$ は在庫量等の物理量を費用に変換する関数を示し、任意の要素 $x \in \mathbb{R}$ に対して連続する増加関数であり導関数も連続する増加関数である。

これは、ロジスティクスネットワークの設計および状況設定から決まる制約条件 (1)-(6) の下、システムの

期待費用が最小となる在庫配送戦略を求める問題であり、確率的最適制御問題として定式化される。具体的には、式 (7) は計画期間 $[0, T]$ におけるシステムの期待総費用、式 (8) は時刻 t にシステムで発生する費用 $TC(t)$ を表す。式 (9) は各ノード $k \in \mathbf{N}^-$ での正味在庫費用 $TC_{IN_k}(t)$ を示し、在庫があれば在庫管理費用、物資が足りなければ被災者の深刻度を示すペナルティ費用となる。 h_k は正味在庫量に関する費用係数を表し、次式で与える：

$$h_k := \begin{cases} h'_k & \text{if } IN_k(t) \geq 0 \\ b_k & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall k \in \mathbf{N}^-. \quad (12)$$

ここで h'_k は在庫管理に関する費用係数、 b_k は物資不足による被害者の深刻度の尺度を示すペナルティ費用係数である。被災者の深刻度の尺度を在庫管理費用に対して相対的に十分大きな値と定義し $h'_k \ll b_k$ とする。 h'_k は在庫を管理する人件費や機材費、およびその作業効率で計算されるが、被災規模が大きい地域ほど作業効率は低下するため、 h'_k は増加する。リンク $(l, k) \in \mathbf{A}$ 上の配送費用を表す $TC_{S_{lk}}(t)$ は、式 (10) に示すように、フロー $S_{lk}^A(t)$ と配送費用係数 c_{lk} から構成される。 c_{lk} は、配送車両を調達する費用とその積載量を用いて算出できるが、一般的に被災地に近いほど配送可能な車両規格が制限されるため、 c_{lk} は増加する。また、任意の時刻における荷捌き量を搬入量と搬出量の差異と定義し、地域物流拠点 $i \in \mathbf{M}$ の荷捌き費用 $TC_{S_i}(t)$ を式 (11) で与える。 c_i は荷捌きに要する労働力を調達する費用と荷捌き効率を用いて算出される費用係数を示す。式 (9)-(11) に示す費用は各変数に対して狭義に凸であるため、期待総費用が最小となる各費用の負担はほぼ等しい状態となる。

意思決定者は、本来ならば、このシステム最適化問題を与える在庫配送戦略に従い、ネットワーク上の救援物資の流れを制御すべきである。しかし、この問題を解く過程で、 $|\mathbf{N}^-|$ 次元の非線形連立微分方程式を扱う必要があるため、最適な在庫配送戦略を解析的に得ることは非常に難しい。

b) 最適化問題の分解

本研究では、前節で定式化したシステム最適化問題（以下、原問題と呼称する）を二つの問題に分解することで、在庫配送システムの未知変数の近似解を解析的に求める。具体的には、中間リンク $(l, i) \in \mathbf{A}^-$ を流れるフロー $S_{li}^A(t)$ を変数とする下位問題と、それ以外の変数を解く上位問題に分解する。この二段階の最適化問題を次式で定式化する：

上位問題

$$\min V_{main} = E \int_0^T TC_{main}(t) dt, \quad (13)$$

subject to Eqs.(1) – (6), (9) – (11) and

$$TC_{main}(t) = \sum_{k \in \mathbf{N}^-} TC_{IN_k}(t) + \sum_{(l,j) \in \mathbf{A}^+} TC_{S_{lj}}(t) + \sum_{i \in \mathbf{M}} TC_{S_i}(t). \quad (14)$$

下位問題

$$\min V_{sub} = \int_0^T TC_{sub}(t) dt, \quad (15)$$

subject to Eqs.(5)(6)(10) and

$$TC_{sub}(t) = \sum_{(l,i) \in \mathbf{A}^-} TC_{S_{li}}(t) = TC(t) - TC_{main}(t), \quad (16)$$

$$S_{li}^A(t) = g_{li}(S_i^A(t)), \quad \sum_{l \in \mathbf{P}_i} g_{li}(S_i^A(t)) = S_i^A(t) \quad \forall (l,i) \in \mathbf{A}^-, t \in [r_i, T]. \quad (17)$$

ここで $g_{li}(S_i^A(t))$ は、ノード $i \in \mathbf{M}$ への搬入量 $S_i^A(t)$ をパラメータとしたときの upstream ノード $l \in \mathbf{P}_i$ への割当を示す関数である。式 (17) は割当関数の定義であり、ノード i を終点とするフローの保存則を表す。下位問題は、ある搬入量 $S_i^A(t)$ の下で、式 (16) に示す中間リンク $(l,i) \in \mathbf{A}^-$ の配送費用 $TC_{S_{li}}(t)$ を最小化する割当 $g_{li}^*(S_i^A(t))$ を決定する問題である。一方、上位問題は $\{IN_k(t)\}_{k \in \mathbf{N}^-}$ を状態変数、 $\{S_{lk}^D(t)\}_{(l,k) \in \mathbf{A}}, \{S_{lk}^A(t)\}_{(l,k) \in \mathbf{A}^+}, \{S_k^A(t)\}_{k \in \mathbf{N}^-}$ を制御変数とする確率的最適制御問題であり、下位問題の結果に基づいて変数を決定する問題である。以下、上位問題の制御変数を $\mathbf{S}_{main}(t)$ と表記する。式 (14) から分かるように、上位問題は割当 $g_{li}^*(S_i^A(t))$ によって生じる費用を含まないため、下位問題と上位問題を段階的に解くことによって、二段階の最適化問題の解を解析的に求めることができる。

上位問題は、式 (14) に示す被積分関数が変数について狭義に下に凸であること、及び、状態変数の微分方程式 (1)(2) が制御変数に関して線形であることから、マンガサリアンの十分性定理¹⁵⁾ を満たす。従って、確率的最適制御問題の極値の必要条件である最大値原理¹⁶⁾ によって特定される最適解は、上位問題の唯一の大域的な最適解である。同様にして、下位問題の目的関数の被積分関数も変数に関して狭義に下に凸であるため、一次の最適性条件であるオイラー・ラグランジュ方程式によって特定される最適解は、下位問題の唯一の大域的な最適解である。

提案する二段階の最適化問題は、原問題と明らかに等価ではないが、最適な在庫配送システムに近い状態を解析的に求めることができる。災害時にはラストワンマイルリンク $(l,j) \in \mathbf{A}^+$ が損傷する可能性が高いため、下位問題の費用関数である中間リンク $(l,i) \in \mathbf{A}^-$ の配送費用 $TC_{S_{li}}(t)$ は、ラストワンマイルリンクの配送費用 $TC_{S_{lj}}(t)$ に比べて小さくなる。この場合、下位

問題のパラメータかつ上位問題の変数である $S_i^A(t)$ の増加に伴う $TC_{S_{li}}(t)$ の増分は、システム全体の費用にとって、比較的小さいことが期待される。式 (14)(16) から分かるように、提案する最適化問題はシステム全体で生じる費用を、 $TC_{S_{li}}(t)$ とそれ以外の費用に分割して別々に最小化する問題であるため、この最適化問題より得られる解が原問題の近似解であることが示唆される。

3. 最適性条件

本章では、2.3 節で定式化した二段階の最適化問題より最適な在庫配送戦略の近似解を導出する。はじめに、下位問題と上位問題の最適性条件を示す。次に、その最適性条件より各問題の最適解を明らかにする。以下では、関数 f を $f(x) = x^\alpha$, $\alpha = 2$ ($\alpha > 1$ であれば関数 f の条件は満たされる) と与え、最適化問題を解析的に解く。 α は費用負担の偏りを示し、1 に近い (変数に関して線形な費用関数に近い) ほど偏った費用負担を表すパラメータである。

(1) 下位問題の最適性条件

下位問題を解き、最適な割当関数 $g_{li}^*(\cdot)$ を求める。一次の最適性条件であるオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_{li}^A} = 2c_{li}S_{li}^A(t) + \theta_i(t) = 0 \quad \forall (l,i) \in \mathbf{A}^-, t \in [r'_{li}, T], \quad (18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = \sum_{l \in \mathbf{P}_i} S_{li}^A(t) - S_i^A(t) = 0 \quad \forall i \in \mathbf{M}, t \in [r_i, T]. \quad (19)$$

ここで $r'_{li} := r_{li} + r_l$, $\mathcal{L}(t)$ はラグランジュ関数、 $\theta_i(t)$ はラグランジュ乗数である。 r'_{li} は広域物流拠点からノード l を経由して地域物流拠点 i へ配送する場合の最短リード時間を表す。ラグランジュ関数 $\mathcal{L}(t)$ は次で定義される：

$$\mathcal{L}(t) = \sum_{(l,i) \in \mathbf{A}^-} c_{li} f_S(S_{li}^A(t)) + \sum_{i \in \mathbf{M}} \theta_i(t) \left[\sum_{l \in \mathbf{P}_i} S_{li}^A(t) - S_i^A(t) \right]. \quad (20)$$

式 (16) から分かるように、目的関数の被積分関数 $TC_{sub}(t)$ は変数 $S_{li}^A(t)$ に関して狭義に下に凸であるため、二次の最適性条件を満たす。式 (5)(6) 及びオイラー・ラグランジュ方程式 (18)(19) より、最適な割当関数 $g_{li}^*(\cdot)$ は次で与えられる：

$$g_{li}^*(S_i^A(t)) = \begin{cases} S_{li}(t - r_{li}) & t \in [0, r'_{li}) \\ \frac{c_{P_{it}}}{c_{li}} [S_i^A(t) - S_{P_{it}}(t)] & t \in [r'_{li}, r_{P_i}) \\ \frac{c_{P_{it}}}{c_{li}} S_i^A(t) & t \in [r_{P_i}, T] \end{cases} \quad \forall (l,i) \in \mathbf{A}^-. \quad (21)$$

ここで $\mathbf{P}_{it} := \{l | r'_{li} \leq t, l \in \mathbf{P}_i\}$, $c_{\mathbf{P}_{it}}^{-1} := \sum_{l \in \mathbf{P}_{it}} c_{li}^{-1}$, $\mathcal{S}_{\mathbf{P}_{it}}(t) := \sum_{l \in \mathbf{P}_i \setminus \mathbf{P}_{it}} \mathcal{S}_{li}(t - r_{li})$, $r_{\mathbf{P}_{it}} := \max\{0, r'_{li} | l \in \mathbf{P}_{it}\}$ である。 \mathbf{P}_{it} は $r'_{li} \leq t$ を満たす地域物流拠点 i の親ノード集合, $c_{\mathbf{P}_{it}}$ は時刻 t における地域物流拠点 i への配送困難性を表し, \mathbf{P}_{it} の要素数が多いほど $c_{\mathbf{P}_{it}}$ は小さくなる。

(2) 上位問題の最適性条件

上位問題の一次の最適性条件を示す。確率的最適制御問題の一次の最適性条件である最大値原理は,

$$\mathbf{S}_{main}^*(t) = \arg \min_{\mathbf{S}_{main}(t)} H(t), \quad (22)$$

$$d\lambda_{IN_j}(t) = -2h_j IN_j(t) dt + \Lambda_{IN_j}(t) dz_j(t), \quad (23)$$

$$\lambda_{IN_j}(T), \Lambda_{IN_j}(T) = 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_N,$$

$$\dot{\lambda}_{IN_i}(t) = -2h_i IN_i(t), \lambda_{IN_i}(T) = 0 \quad \forall i \in \mathbf{M}, \quad (24)$$

に微分方程式 (1)(2) と初期条件 (3)-(5) およびフロー保存則 (6) を加えたものである。確率的最適制御問題はマンガサリアンの十分性定理を満たすため, 最大値原理によって特定される最適解は, 唯一の大域的な最適解である。式 (22) はハミルトン関数 $H(t)$ の最小化, 式 (23)(24) は随伴変数 $\lambda_{IN_i}(t)$, $\lambda_{IN_j}(t)$, $\Lambda_{IN_j}(t)$ が満たす条件 (随伴方程式) を示す。 $\lambda_{IN_i}(t)$ と $\lambda_{IN_j}(t)$ はそれぞれ価値関数を状態変数 $IN_i(t)$ と $IN_j(t)$ で偏微分したもの, $\Lambda_{IN_j}(t)$ は $IN_j(t)$ で二回偏微分したものである。ハミルトン関数 $H(t)$ は次で定義される:

$$H(t) = TC(t) + \sum_{j \in \mathbf{N}_N} \lambda_{IN_j}(t) \left[\sum_{l \in \mathbf{P}_j} S_{lj}^A(t) - \bar{D}_j(t) \right]$$

$$+ \sum_{i \in \mathbf{M}} \lambda_{IN_i}(t) \dot{IN}_i(t) - \sum_{j \in \mathbf{N}_N} \Lambda_{IN_j}(t) D_j^{SD}(t). \quad (25)$$

式 (22) より, 制御変数 $\mathbf{S}_{main}(t)$ が最適であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial H}{\partial S_{ok}^D} = 0 \quad \forall o \in \mathbf{N}_1, k \in \mathbf{C}_o, \quad (26)$$

$$\frac{\partial H}{\partial S_i^A} = -\frac{\partial H}{\partial S_{ik}^D}$$

$$= \lambda_{IN_i}(t) + 2c_i \left[S_i^A(t) - \sum_{k \in \mathbf{C}_i} S_{ik}^D(t) \right] = 0 \quad (27)$$

$$\forall i \in \mathbf{M}, k \in \mathbf{C}_i, t \in [r_i, T],$$

$$\frac{\partial H}{\partial S_{ij}^A} = \lambda_{IN_j}(t) + 2c_{lj} S_{ij}^A(t) = 0 \quad (28)$$

$$\forall (l, j) \in \mathbf{A}^+, t \in [r'_{lj}, T],$$

を満たすことである。これらに, 初期条件 (5) とフロー保存則 (6) を代入すると次の最適制御を得る:

$$S_{lk}^{D*}(t) = \begin{cases} S_{lk}^{A*}(t + r_{lk}) & t \in [0, T - r_{lk}) \\ \text{不定} & t \in [T - r_{lk}, T] \end{cases} \quad \forall (l, k) \in \mathbf{A}, \quad (29)$$

$$S_i^{A*}(t) = \begin{cases} \mathcal{S}_{\mathbf{P}_{it}=\emptyset}(t) & t \in [0, r_i) \\ -\frac{\lambda_{IN_i}(t)}{2c_i} + \sum_{k \in \mathbf{C}_i} S_{ik}^{D*}(t) & t \in [r_i, T] \end{cases} \quad \forall i \in \mathbf{M}, \quad (30)$$

$$S_{lj}^{A*}(t) = \begin{cases} \mathcal{S}_{lj}(t - r_{lj}) & t \in [0, r'_{lj}) \\ -\frac{\lambda_{IN_j}(t)}{2c_{lj}} & t \in [r'_{lj}, T] \end{cases} \quad \forall (l, j) \in \mathbf{A}^+. \quad (31)$$

最適解が不定となる区間については, リンク $(l, k) \in \mathbf{A}$ の起点 l を流れる物資が計画終了時刻 T までに終点 k に到達しないことに起因する。これらに, 随伴方程式 (23)(24) を満たす最適な随伴変数 $\lambda_{IN_i}^*(t)$, $\lambda_{IN_j}^*(t)$ を代入することで, 最適解 $\mathbf{S}_{main}^*(t)$ が与えられる。

(3) 最適制御戦略の導出

はじめに, 物流集積拠点 $i \in \mathbf{M}$ の正味在庫量 $IN_i(t)$ と, その上流から流れるフローの総和 $S_i^A(t)$ の最適解を求めるために, 最適な随伴変数 $\lambda_{IN_i}^*(t)$ を導出する。詳しい導出過程は付録 I に示すが, $\lambda_{IN_i}^*(t)$ は次となる:

$$\lambda_{IN_i}^*(t) = 2\sqrt{c_i h_i} \frac{1 - y_i^2(t)}{1 + y_i^2(t)} IN_i(t) \quad \forall t \in [r_i, T]. \quad (32)$$

ここで $y_i(t)$ は

$$y_i(t) := \exp\left[(t - T) \sqrt{\frac{h_i}{c_i}}\right] \quad \forall t \in [r_i, T] \quad (33)$$

と定義され, $0 \leq y_i(t) \leq 1$ である。随伴変数 $\lambda_{IN_i}^*(t)$ を式 (30) に代入すると,

$$S_i^{A*}(t) = -\sqrt{\frac{h_i}{c_i}} \frac{1 - y_i^2(t)}{1 + y_i^2(t)} IN_i(t) + \sum_{k \in \mathbf{C}_i} S_{ik}^{D*}(t) \quad \forall t \in [r_i, T] \quad (34)$$

を得る。最適解 $S_i^{A*}(t)$ を得るには, 微分方程式 (2) を満たす最適な状態変数 $IN_i^*(t)$ を代入する必要がある。以下では $IN_i^*(t)$ を求める。式 (34) を $IN_i(t)$ の微分方程式 (2) に代入すると, 次の微分方程式を得る:

$$\dot{IN}_i(t) = -\sqrt{\frac{h_i}{c_i}} \frac{1 - y_i^2(t)}{1 + y_i^2(t)} IN_i(t) \quad \forall t \in (r_i, T]. \quad (35)$$

この微分方程式を解くと, 初期条件 (5) とフロー保存則 (6) より, $IN_i^*(t)$ が次で与えられる:

$$IN_i^*(t) = \begin{cases} IN_i(0) + \left[\int_0^t \{ \mathcal{S}_{\mathbf{P}_{it}=\emptyset}(r) - \sum_{k \in \mathbf{C}_i} \mathcal{S}_{ik}(r) \} dr \right] & t \in [0, r_i] \\ IN_i^*(r_i) y_i(r_i - t + T) \times \frac{1 + y_i^2(t)}{1 + y_i^2(r_i)} & t \in (r_i, T]. \end{cases} \quad (36)$$

さらに、これを式 (34) に代入すると、次の最適制御 $S_i^{A*}(t)$ を得る：

$$S_i^{A*}(t) = -IN_i^*(r_i) \sqrt{\frac{h_i}{c_i}} y_i(r_i - t + T) \times \frac{1 - y_i^2(t)}{1 + y_i^2(r_i)} + \sum_{k \in C_i} S_{ik}^{D*}(t) \quad \forall t \in [r_i, T]. \quad (37)$$

地域物流拠点 $i \in M$ を終点とするフロー $S_i^{A*}(t)$ は、その下流ノード $k \in C_i$ を流れるフロー $S_{ik}^{D*}(t)$ の関数であるため、帰納的に最下流の避難所 $j \in N_N$ を流れるフローの関数である。また、地域物流拠点 i の上流ノード $l \in P_i$ への割当 S_{li}^{A*} は式 (21) で与えられる。

次に、避難所 $j \in N_N$ の正味在庫量 $IN_j(t)$ に関する最適な随伴変数 $\lambda_{IN_j}^*(t)$ を求める。地域物流拠点 $i \in M$ の最適解を導出する手順と同様に、正味在庫量 $IN_j(t)$ とラストワンマイルリンク $(l, j) \in A^+$ を流れるフロー $S_{lj}^A(t)$ の最適解を導出することができる。詳しい導出過程は付録 II に示すが、 $\lambda_{IN_j}^*(t)$ は $t \in [r_j, T]$ において次となる：

$$\lambda_{IN_j}^*(t) = \psi_{IN_j}(t) IN_j(t) + \phi_{IN_j}(t), \quad (38)$$

$$\psi_{IN_j}(t) = 2\sqrt{c_{P_{jt}} h_j} \frac{\mathcal{Y}_{P_{jt}}^+(t)}{\mathcal{Y}_{P_{jt}}^-(t)}, \quad (39)$$

$$\phi_{IN_j}(t) = -2c_{P_{jt}} \left[\{\bar{D}_j(t) - \mathcal{S}_{P_{jt}}(t)\} + \frac{\psi_{IN_j}(t) \dot{\bar{D}}_j}{2h_j} \right] + \frac{4y_{P_{jt}}(t) \mathcal{C}_{P_{jt}} \sqrt{c_{P_{jt}} h_j}}{\mathcal{Y}_{P_{jt}}^-(t)}. \quad (40)$$

ここで、 $\psi_{IN_j}(t)$ と $\phi_{IN_j}(t)$ は $t \in [r_j, T]$ において連続かつ、 $t \in [r_{P_{jt}}^{st}, r_{P_{jt}}^{en}]$ において区分的に微分可能な関数であり、

$$y_{P_{jt}}(t) := \exp\left[(t - r_{P_{jt}}^{en}) \sqrt{\frac{h_j}{c_{P_{jt}}}}\right] \quad \forall t \in [r_j, T], \quad (41)$$

$$\mathcal{Y}_{P_{jt}}^\pm(t) := [\psi_{IN_j}(r_{P_{jt}}^{en}) + 2\sqrt{c_{P_{jt}} h_j}] \pm [\psi_{IN_j}(r_{P_{jt}}^{en}) - 2\sqrt{c_{P_{jt}} h_j}] y_{P_{jt}}^2(t) \quad \forall t \in [r_j, T], \quad (42)$$

$$\mathcal{C}_{P_{jt}} := \phi_{IN_j}(r_{P_{jt}}^{en}) + 2c_{P_{jt}} \left[\{\bar{D}_j(r_{P_{jt}}^{en}) - \mathcal{S}_{P_{jt}}(r_{P_{jt}}^{en})\} + \frac{\psi_{IN_j}(r_{P_{jt}}^{en}) \dot{\bar{D}}_j}{2h_j} \right], \quad (43)$$

$$r_{P_{jt}}^{st} := \max\{0, r'_{lj} | l \in P_{jt}\}, \quad (44)$$

$$r_{P_{jt}}^{en} := \min\{T, r'_{lj} | l \in P_j \setminus P_{jt}\}$$

である。それぞれの変数は次の関係を有する、

$$0 \leq y_{P_{jt}}(t) \leq 1, \quad 2\psi_{IN_j}(r_{P_{jt}}^{en}) y_{P_{jt}}(t) \leq \mathcal{Y}_{P_{jt}}^+(t), \quad (45)$$

$$4\sqrt{c_{P_{jt}} h_j} y_{P_{jt}}(t) \leq \mathcal{Y}_{P_{jt}}^-(t), \quad \mathcal{Y}_{P_{jt}}^+(t) \leq \mathcal{Y}_{P_{jt}}^-(t).$$

随伴変数 $\lambda_{IN_j}^*(t)$ を式 (31) に代入すると、

$$S_{lj}^{A*}(t) = -\frac{\psi_{IN_j}(t)}{2c_{lj}} IN_j(t) + \frac{c_{P_{jt}}}{c_{lj}} \left[\{\bar{D}_j(t) - \mathcal{S}_{P_{jt}}(t)\} + \frac{\psi_{IN_j}(t) \dot{\bar{D}}_j}{2h_j} \right] - \frac{2y_{P_{jt}}(t) \mathcal{C}_{P_{jt}} \sqrt{c_{P_{jt}} h_j}}{c_{lj} \mathcal{Y}_{P_{jt}}^-(t)} \quad \forall t \in [r'_{lj}, T] \quad (46)$$

となる。これに最適な状態変数 $IN_j^*(t)$ を代入することで、他の変数を含まない最適解 $S_{lj}^{A*}(t)$ を得る。微分方程式 (1) を満たす $IN_j^*(t)$ を求める。式 (46) を微分方程式 (1) に代入すると、

$$dIN_j(t) = \left[-\frac{\psi_{IN_j}(t)}{2c_{P_{jt}}} \left(IN_j(t) - \frac{c_{P_{jt}} \dot{\bar{D}}_j}{h_j} + \frac{2y_{P_{jt}}(t) \mathcal{C}_{P_{jt}}}{\mathcal{Y}_{P_{jt}}^+(t)} \right) dt - D_j^{SD}(t) dz_j(t) \right] \quad \forall t \in (r_j, T] \quad (47)$$

の確率微分方程式を得る。この確率微分方程式を解くと、初期条件 (5) とフロー保存則 (6) より、 $IN_j^*(t)$ は次となる：

$$IN_j^*(t) = \begin{cases} IN_j(0) + \int_0^t [\mathcal{S}_{P_{jt}=\emptyset}(r) - \bar{D}_j(r)] dr - \int_0^t D_j^{SD}(r) dz_j(r) & t \in [0, r_j] \\ U_{P_{jt}}(t) \left[IN_j^*(r_{P_{jt}}^{st}) - \frac{c_{P_{jt}} \dot{\bar{D}}_j}{h_j} - \int_{r_{P_{jt}}^{st}}^t \frac{D_j^{SD}(r)}{U_{P_{jt}}(r)} dz_j(r) \right] + \frac{c_{P_{jt}} \dot{\bar{D}}_j}{h_j} - y_{P_{jt}}^{-1}(t) \mathcal{C}_{P_{jt}} \frac{y_{P_{jt}}^2(t) - y_{P_{jt}}^2(r_{P_{jt}}^{st})}{\mathcal{Y}_{P_{jt}}^-(r_{P_{jt}}^{st})} & t \in (r_j, T]. \end{cases} \quad (48)$$

ここで

$$U_{P_{jt}}(t) = y_{P_{jt}}(r_{P_{jt}}^{st} - t + T) \frac{\mathcal{Y}_{P_{jt}}^-(t)}{\mathcal{Y}_{P_{jt}}^-(r_{P_{jt}}^{st})} \quad \forall t \in (r_j, T] \quad (49)$$

を示し、 $U_{P_{jt}}(t)$ は時刻 t に関して単調減少関数であり、かつ $0 \leq U_{P_{jt}}(t) \leq 1$ である。式 (48) を式 (46) に代入すると、次の最適制御が得られる：

$$S_{lj}^{A*}(t) = \frac{c_{P_{jt}}}{c_{lj}} \{S_j^{A*}(t) - \mathcal{S}_{P_{jt}}(t)\} \quad \forall t \in [r'_{lj}, T], \quad (50)$$

$$S_j^{A*}(t) = -\frac{\psi_{IN_j}(t)}{2c_{P_{jt}}} \left[U_{P_{jt}}(t) \left\{ IN_j^*(r_{P_{jt}}^{st}) - \frac{c_{P_{jt}} \dot{\bar{D}}_j}{h_j} - \int_{r_{P_{jt}}^{st}}^t \frac{D_j^{SD}(r)}{U_{P_{jt}}(r)} dz_j(r) \right\} + \frac{y_{P_{jt}}(t) \mathcal{C}_{P_{jt}}}{\mathcal{Y}_{P_{jt}}^+(t)} \right] \times \left\{ 2 - \frac{\mathcal{Y}_{P_{jt}}^+(t)}{\mathcal{Y}_{P_{jt}}^-(r_{P_{jt}}^{st})} (1 - y_{P_{jt}}^2(r_{P_{jt}}^{st} - t + T)) \right\} + \bar{D}_j(t) \quad \forall t \in [r_j, T]. \quad (51)$$

ここで $S_j^{A*}(t)$ はノード $j \in N_N$ を終点とするフローの総和を示す。 $S_j^{A*}(t)$ は時刻 t の関数であるので、他の制御変数に依らず一意に与えられる。式 (37) より、地域物流拠点 $i \in M$ を流れるフローは、避難所 $j \in N_N$ を流れるフローの関数であるので、下流から順次計算

することで最適なフローと在庫量を全て求めることができる。

導出した解を解釈しやすくするために、4章の解析では一貫して、以下に示す妥当な条件を与える：

- 全ての広域物流拠点及び地域物流拠点は同時に配送を開始する ($S_{lk}(t) = 0 \quad \forall l \in N^+, k \in C_l, t \in [-r_{lk}, 0)$).
- 需要は時間経過とともに減少し、全ての避難所の需要がなくなったときに配送を終了する ($\dot{D}_j \leq 0, \bar{D}_j(T) = 0 \quad \forall j \in N_N$)
- 3層のロジスティクス・ネットワークを想定する。式(36)(37)から分かるように、地域物流拠点 $i \in M$ の正味在庫量 $IN_i^*(t)$ は、どの階層でも 0 に漸近する変化を示すので、地域物流拠点集合 M を単一層 N_2 に縮約しても解の解釈に変化はない。

また、特に指定がない限り、全ての変数がフローの初期パラメータ $S_{lk}(t)$ に依存しない状況 (i.e., $r'_{ij} > t$ を満たす避難所 $j \in N_3$ の親ノードがなく、 $P_{jt} = P_j$ である状況) を想定する。このとき、最適解は次で与えられる：

$$S_{ii}^{A*}(t) = \frac{c_{P_i}}{c_{l_i}} S_i^A(t) \quad \forall (l, i) \in A^-, \quad (52)$$

$$S_{ij}^{A*}(t) = \frac{c_{P_j}}{c_{l_j}} S_j^A(t) \quad \forall (l, j) \in A^+, \quad (53)$$

$$S_j^A(t) = -\sqrt{\frac{h_j}{c_{P_j}} \frac{1 - y_{P_j}^2(t)}{1 + y_{P_j}^2(t)}} \left[U_{P_j}(t) \{ IN_j^*(r_{P_j}^{st}) - \frac{c_{P_j} \dot{D}_j}{h_j} - \int_{r_{P_j}^{st}}^t \frac{D_j^{SD}(r)}{U_{P_j}(r)} dz_j(r) \} \right] + \bar{D}_j(t) \quad (54)$$

$\forall j \in N_N,$

$$IN_j^*(t) = U_{P_j}(t) \left[IN_j^*(r_{P_j}^{st}) - \frac{c_{P_j} \dot{D}_j}{h_j} - \int_{r_{P_j}^{st}}^t \frac{D_j^{SD}(r)}{U_{P_j}(r)} dz_j(r) \right] + \frac{c_{P_j} \dot{D}_j}{h_j} \quad (55)$$

$\forall j \in N_N.$

$IN_i^*(t)$ と $S_i^*(t)$ はそれぞれ式(36)と式(37)で与えられる。

4. 在庫配送戦略の数理解析

本節では、意思決定者がプッシュ型戦略を行う場合に、実務的に生じ得る質問：*direct logistics* もしくは *multi-stage logistics* を最小すべき条件を明らかにするために、3.3節で導出した解の特性を検証する。はじめに在庫管理と物資配送戦略を分析し、その後、ネットワークの復旧に応じた在庫配送戦略の変化を明らかにする。解の特性を検証するために、 $P_{jt} = P_j$ となるまでの避難所 $j \in N_3$ の正味在庫量 $IN_j^*(t)$ に関して、次に示す補題を証明する：

補題 1 避難所 $j \in N_3$ の正味在庫量 $IN_j(t)$ の期待値は、 $t \in (r_j, r_{P_j}^{st}]$ において $c_{P_j} \dot{D}_j / h_j$ を下回る。

この補題は、命題 1,3-7 を証明する過程で用いられる。

証明. 式(47)より、避難所 $j \in N_3$ の正味在庫量 $IN_j^*(t)$ の確率微分方程式は、 $t \in (r_j, r_{P_j}^{st}]$ において、

$$dIN_j^*(t) = \left[-\frac{\psi_{IN_j}(t)}{2c_{P_{jt}}} \left\{ IN_j^*(t) - \frac{c_{P_{jt}} \dot{D}_j}{h_j} + \frac{2y_{P_{jt}}(t) C_{P_{jt}}}{\mathcal{Y}_{P_{jt}}^+(t)} \right\} \right] dt - D_j^{SD}(t) dz_j(t), \quad (47)$$

である。 $-\psi_{IN_j}(t)/2c_{P_{jt}} \leq 0$ より、この確率微分方程式は $IN_j^*(t)$ が

$$\begin{aligned} \mu &:= \frac{c_{P_{jt}} \dot{D}_j}{h_j} - \frac{2y_{P_{jt}}(t) C_{P_{jt}}}{\mathcal{Y}_{P_{jt}}^+(t)} \\ &= \frac{c_{P_j} \dot{D}_j}{h_j} \left\{ \frac{c_{P_{jt}}}{c_{P_j}} - \frac{2y_{P_{jt}} \psi_{IN_j}(r_{P_{jt}}^{en})}{\mathcal{Y}_{P_{jt}}^+(t)} \left(\frac{c_{P_{jt}}}{c_{P_j}} - 1 \right) \right\} \\ &\quad - \frac{4y_{P_{jt}}(t)}{\mathcal{Y}_{P_{jt}}^+(t)} (c_{P_{jt}} - c_{P_j}) \bar{D}_j(r_{P_{jt}}^{en}) \quad (\because \text{式(43)}) \\ &\leq \frac{c_{P_j} \dot{D}_j}{h_j} - \frac{4y_{P_{jt}}(t)}{\mathcal{Y}_{P_{jt}}^+(t)} (c_{P_{jt}} - c_{P_j}) \bar{D}_j(r_{P_{jt}}^{en}) \\ &(\because \dot{D}_j < 0, 2\psi_{IN_j}(r_{P_{jt}}^{en}) y_{P_{jt}}(t) \leq \mathcal{Y}_{P_{jt}}^+(t), c_{P_j} < c_{P_{jt}}) \\ &< \frac{c_{P_j} \dot{D}_j}{h_j} \end{aligned} \quad (56)$$

に回帰する確率過程であることを表す。従って、 $t \in (r_j, r_{P_j}^{st}]$ において $IN_j^*(t)$ の期待値は $\mu < c_{P_j} \dot{D}_j / h_j$ に漸近する。□

(1) 在庫管理戦略の解析

はじめに、避難所 $j \in N_3$ の正味在庫量 $IN_j^*(t)$ の解析を行い、避難所の在庫管理戦略を明らかにする。式(47)より、 $\forall t \in (r_{P_j}^{st}, T]$ における $IN_j^*(t)$ の確率微分方程式は次となる：

$$dIN_j^*(t) = v_j(t) \left\{ IN_j^*(t) - \mu_j^\infty \right\} dt - D_j^{SD}(t) dz_j(t), \quad (57)$$

$$\mu_j^\infty := \lim_{T \rightarrow \infty} E [IN_j^*(T)] = c_{P_j} \dot{D}_j / h_j \leq 0, \quad (58)$$

$$v_j(t) := -\sqrt{\frac{h_j}{c_{P_j}} \frac{1 - y_{P_j}^2(t)}{1 + y_{P_j}^2(t)}} \leq 0. \quad (59)$$

ここで $v_j(t)$ は長期的な期待値 μ_j^∞ へ回帰する速度を示す。 $v_j(t) \leq 0$ より、式(57)の確率微分方程式は $\mu_j^\infty = c_{P_j} \dot{D}_j / h_j \leq 0$ へ回帰する確率過程であるが、式(12)に示す費用係数 h_j の定義から分かるように、正味在庫量 $IN_j(t)$ の符号によって、回帰速度 $v_j(t)$ と長期的な期待値 μ_j^∞ は変化する。災害時には物資不足による被災者の深刻度が在庫管理費用より十分大きい ($h'_m \ll b_m$)

と考えられるため、避難所 j に在庫がある時の $v_j(t)$ よりも、物資が不足している時のほうが速く μ_j^∞ に回帰する。さらに b_j が大きいほど、長期的な期待値 μ_j^∞ は 0 に近づき、回帰する速さ $|v_j(t)|$ は大きくなる。この正味在庫量の変化は、避難所 j に在庫を確保することが望ましい在庫管理戦略であることを意味する。ただし、需要が完全情報である場合 (i.e., $D_j^{SD}(t) = 0$)、補題 1 より、 $IN_j^*(t)$ は $IN_j^*(r_{P_j}^{st}) < \mu_j^\infty$ から μ_j^∞ へ漸近する動学性を示す。以上の解析結果より、次の命題が得られる：

命題 1 必要とする物資需要が不完全情報である避難所 $j \in N_3$ では、正の在庫を確保すべきである。

災害時の物資需要は不完全情報である可能性が非常に高いため、避難所に救援物資の在庫を確保する戦略が望ましい。また、この命題は避難所により多くの在庫を抱える戦略が望ましいことを意味するものではない。避難所 j で在庫管理をすることが困難で費用係数 h_j' が大きいほど、長期的な期待値 μ_j^∞ へ回帰する速さ $|v_j(t)|$ が大きくなるため避難所 j に積むべき在庫量は小さくなる。

次に、地域物流拠点 $i \in N_2$ の正味在庫量 $IN_i^*(t)$ の解析を行う。 $IN_i^*(t)$ が 0 であれば *direct logistics* が、 $IN_i^*(t)$ が正であれば *multistage logistics* が適した戦略であることを表す。式 (35) より、 $IN_i^*(t)$ は $IN_i(r_i)$ から 0 に漸近する変化を有することが分かる。 $IN_i(r_i)$ は外生パラメータ $IN_i(0), S_{li}(t), S_{ik}(t)$ で与えられる。目的関数 $V^* := V(IN^*(t), S^*(t))$ を最小化する $IN_i^*(r_i)$ は、その最適性条件

$$\frac{\partial V^*}{\partial IN_i(r_i)} = 4h_i IN_i^*(r_i) \int_{r_i}^T \frac{y_i^2(r_i - t + T)}{(1 + y_i^2(r_i))^2} \times (1 + y_i^4(t)) dt = 0 \quad (60)$$

より $IN_i^*(r_i) = 0$ である。さらに式 (36) より V^* を最小化する備蓄量 $IN_i^*(0)$ は、

$$IN_i^*(0) = \int_0^{r_i} \sum_{j \in C_i} S_{ij}(t) dt \quad (61)$$

となる。従って、地域物流拠点 i の正味在庫量 $IN_i^*(t)$ に関して、次式を得る：

$$IN_i^*(t) = \begin{cases} \int_t^{r_i} \sum_{j \in C_i} S_{ij}(r) dr & t \in [0, r_i] \\ 0 & t \in (r_i, T]. \end{cases} \quad (62)$$

以上の解析結果より、次の命題を得る：

命題 2 地域物流拠点 $i \in N_2$ では、広域物流拠点 $o \in N_1$ から物資が届くまでの間に避難所 $j \in C_i$ へ配送する分だけ備蓄すればよい。その後は地域物流拠点 i に在庫を保持する必要はない。

この命題はプッシュ型戦略において、地域物流拠点を利用しない *direct logistics* を採用するインセンティブを示

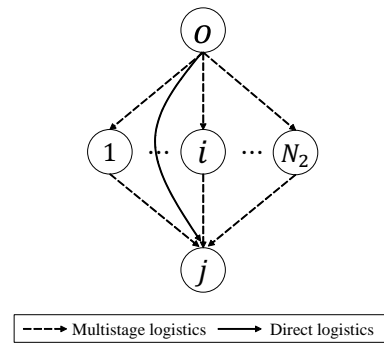


図-3 経路選択の分析に用いるロジスティクスネットワーク

す。ロジスティクスネットワークの中間層に位置する地域物流拠点は、プッシュ型戦略において、救援物資の流入・流出を調整するハブとしてではなく、救援物資の備蓄施設としての役割を持つ。

(2) 物資配送戦略の解析

制御変数 $S^*(t)$ の解析を行う。補題 1 を $E[S_j^{A^*}(t)]$ に代入すると、式 (54) より

$$\begin{aligned} E[S_j^{A^*}(t)] &= -\sqrt{\frac{h_j}{c_{P_j}}} \frac{1 - y_{P_j}^2(t)}{1 + y_{P_j}^2(t)} \left[U_{P_j}(t) \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ E[IN_j^*(r_{P_j}^{st})] - \frac{c_{P_j} \bar{D}_j}{h_j} \right\} \right] + \bar{D}_j(t) \\ &\geq \bar{D}_j(t) \geq 0 \quad \forall j \in N_N, \end{aligned} \quad (63)$$

となり、避難所 j を流れるフロー $S_j^{A^*}(t)$ の期待値は非負であることが分かる。式 (37)(52)(53) より、 $S^*(t)$ は全て $S_j^{A^*}(t)$ の関数であるため、次の命題を得る：

命題 3 ネットワーク上を流れる全てのフローの期待値は非負である。

本研究で提案するモデルは制御変数が負であることを許容しているが、期待値の観点で解は非負であり、上流から下流に流れる順流フローに限られる。

続いて、広域物流拠点から避難所に物資を配送する際の経路選択を分析する。具体的には、

$$\begin{aligned} |N_1| &= 1, |N_2| = N_2, |N_3| = 1, \\ A &= \{(i, j) | i \in N^+, j \in N^-, i \neq j\} \end{aligned}$$

を満たす 3 階層のロジスティクスネットワーク (e.g., 図-3) を対象に、広域物流拠点 o から避難所 j に直接配送するフロー $S^+(t) := S_{oj}^{D^*}(t)$ と、地域物流拠点 $i \in N_2$ に配送するフローの総和 $S^-(t) := \sum_{i \in N_2} S_{oi}^{D^*}(t)$ を比較する。前者は *direct logistics*、後者は *multistage logistics* を示す。 $S^-(t) > S^+(t)$ である場合、意思決定者は *multistage logistics* を採用すべきである。最適制御問題では、ハミルトン関数が制御変数に関して線形である場合、最適制御が実行可能領域の境界に位置するバ

ンバン解になる¹⁷⁾. 本研究で提案する最適制御問題は、式(8)-(11)および式(25)から分かるように、制御変数に関して非線形なハミルトン関数 $H(t)$ であるが、 $\alpha \rightarrow 1$ とすれば、ハミルトン関数 $H(t)$ が制御変数に関して線形に限りなく近くなる. この場合、 $S^-(t) > S^+(t)$ は、広域物流拠点から避難所へのフローが $S^-(t)$ に偏ることを意味する.

地域物流拠点 $i \in \mathbf{N}_2$ に配送するフローの総和 $S^-(t)$ が広域物流拠点 o から避難所 j に直接配送するフロー $S^+(t)$ より多く流れる条件を示す. 式(53)およびフロー保存則(6)より、 $S^+(t)$ は

$$S^+(t) = \frac{c_{P_j}}{c_{o_j}} S_j^{A*}(t + r_{oj}) \quad (64)$$

であり、式(37)に式(6)(53)(62)を代入すると、

$$\begin{aligned} S^-(t) &= \sum_{i \in \mathbf{N}_2} \frac{c_{P_j}}{c_{ij}} S_j^{A*}(t + r'_{ij}) \\ &\geq \frac{c_{P_j}}{\bar{c}_j} \sum_{i \in \mathbf{N}_2} S_j^{A*}(t + r'_{ij}) \end{aligned} \quad (65)$$

$$\bar{c}_j := \max \{c_{i'j} | \forall i' \in \mathbf{N}_2\} \quad (66)$$

を得る. *multistage logistics* と *direct logistics* のリード時間が等しい場合 (i.e., $r'_{ij} = r_{oj} \forall i \in \mathbf{N}_2$), 式(65)に式(64)を代入すると、

$$\begin{aligned} S^-(t) &= \left(\sum_{i \in \mathbf{N}_2} \frac{c_{oj}}{c_{ij}} \right) |\mathbf{N}_2| S^+(t) \\ &\geq \frac{c_{oj}}{\bar{c}_j} |\mathbf{N}_2| S^+(t) \end{aligned} \quad (67)$$

を得る. 式(67)から分かるように、 $r_{oj} = r'_{ij} \forall i \in \mathbf{N}_2$ かつ $c_{oj} > \bar{c}_j / |\mathbf{N}_2|$ である場合、 $S^-(t) > S^+(t)$ の関係が成り立つ. ここで、式(54)より

$$\begin{aligned} \frac{dE[S_j^{A*}(t)]}{dt} &= \frac{h_j}{c_{P_j}} \frac{1 - y_{P_j}^2(t)}{1 + y_{P_j}^2(t)} \left[U_{P_j}(t) \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ E[IN_j^*(r_{P_j}^{st})] - \frac{c_{P_j} \dot{D}_j}{h_j} \right\} \right] + \dot{D}_j \\ &< 0 \quad (\because \text{補題 1}) \end{aligned} \quad (68)$$

であるから、式(64)(65)から分かるように、 $S^+(t), S^-(t)$ はリード時間が大きいほど減少する. 従って、 $r_{oj} > r'_{ij} \forall i \in \mathbf{N}_2$ である場合も、 $c_{oj} \geq \bar{c}_j / |\mathbf{N}_2|$ を満たす限り、 $E[S^-(t)] > E[S^+(t)]$ の関係が成り立つことが分かる. 以上の解析結果より、次の命題を得る:

命題 4 広域物流拠点 o から避難所 j へと流れる直接的なフロー $S^+(t)$ よりも、地域物流拠点 $i \in \mathbf{N}_2$ を経由するフローの総和 $S^-(t)$ が多く流れるための十分条件は「 $r_{oj} \geq r'_{ij}$ かつ $c_{oj} > \bar{c}_j / |\mathbf{N}_2|$ 」もしくは「 $r_{oj} > r'_{ij}$ かつ $c_{oj} \geq \bar{c}_j / |\mathbf{N}_2|$ 」である.

この十分条件は、*direct logistics* が *multistage logistics* より配送が困難な極めて限られた条件である. 実際には、地域物流拠点 $i \in \mathbf{N}_2$ での詰替には多くの時間を要す

(i.e., $r_{oj} < r'_{ij}$) ことが見込まれるため、命題 4 の条件が災害時に満たされる可能性は低い. また、地域物流拠点から避難所までの道路は甚大な被害を受ける (i.e., $c_{oj} < c_{ij}$) ため、 $|\mathbf{N}_2| = 1$ とすれば、ある地域物流拠点 $i' \in \mathbf{N}_2$ を経由する *multistage logistics* よりも避難所に直接配送する *direct logistics* を採用すべきである. 従って、災害時のロジスティクスシステムでは、*direct logistics* が優れた性能を発揮する状況が往々として発生することが期待できる.

(3) 復旧戦略の解析

3.3 節で導出した解に対して配送費用係数の感度分析を行う. リンク $(l, k) \in \mathbf{A}$ の配送費用係数 c_{lk} はそのリンク周辺の被害が大きいほど大きくなるため、 c_{lk} を小さくすることは、リンク (l, k) もしくはその始終点を復旧することを表す. *multistage logistics* が使用するネットワークを復旧することで避難所の物資不足がより早く解消するならば、命題 4 の条件を満たす状況も考えられる. 式(55)より避難所 $j \in \mathbf{N}_3$ の正味在庫量の期待値 $E[IN_j^*(t)]$ は、 c_{P_j} に関して次の変化を示す:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[IN_j^*(t)]}{\partial c_{P_j}} &= \frac{\partial U_{P_j}(t)}{\partial c_{P_j}} \left[E[IN_j^*(r_{P_j}^{st})] - \frac{c_{P_j} \dot{D}_j}{h_j} \right] \\ &\quad + \frac{\dot{D}_j}{h_j} [1 - U_{P_j}(t)]. \end{aligned} \quad (69)$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{P_j}(t)}{\partial c_{P_j}} &= -\frac{\sqrt{h_j/c_{P_j}^3} y_{P_j}(r_{P_j}^{st} - t + T)}{2 \{1 + y_{P_j}^2(r_{P_j}^{st})\}^2} \\ &\quad \times \left[(r_{P_j}^{st} - t) \{1 - y_{P_j}^2(r_{P_j}^{st} + t - T)\} \right. \\ &\quad \left. + (r_{P_j}^{st} + t - 2T) y_{P_j}^2(t) \right. \\ &\quad \left. \times \{1 - y_{P_j}^2(r_{P_j}^{st} - t + T)\} \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (70)$$

である. 式(70)および補題 1 より $\partial E[IN_j^*(t)] / \partial c_{P_j} \leq 0$ となる. さらに、 $c_{P_j} \rightarrow \infty$ とすると、式(54)より

$$\begin{aligned} \lim_{c_{P_j} \rightarrow \infty} E[S_j^{A*}(t)] &= (-t + T) \dot{D}_j + \bar{D}_j(t) \\ &= 0 \quad (\because d\bar{D}_j(t)/dt = \dot{D}_j, \bar{D}_j(T) = 0) \end{aligned} \quad (71)$$

となることから、 c_{P_j} は避難所 j を流れるフローの配送困難性を示すことが分かる. $c_{P_j}^{-1} = \sum_{l \in P_j} c_{lj}^{-1}$ であるため、 c_{P_j} は避難所 j に接続するリンク (l, j) やその上流ノード $l \in P_j$ の被災状況も捉えている. c_{P_j} は c_{lj} に関して単調増加するため、避難所 j に接続するリンクを復旧し c_{lj} を小さくすることで、避難所 j の物資不足は解消に向かう. また、 c_{P_j} は c_{lj} に関して上に凸であるため、 c_{lj} の小さいリンクを復旧することで正味在庫量が効率的に増加 (i.e., 物資不足が解消) することが分かる. 以上の解析結果より、 c_{P_j} に対する正味在庫量 $E[IN_j^*(t)]$ の感度について以下の命題を得る:

命題 5 避難所 $j \in N_3$ に接続するリンク (l, j) の復旧により配送費用 c_{lj} を小さくすることで、避難所 j の正味在庫量 $E[IN_j^*(t)]$ が増加する。

命題 6 避難所 $j \in N_3$ の正味在庫量 $E[IN_j^*(t)]$ をより多く増やすには、避難所 j に接続するリンク (l, j) のうち、 c_{lj} の小さい、すなわち比較的被害の小さいリンクを復旧することが適切である。

$E[IN_j^*(t)]$ が c_{lj} に関して単調減少であることは、避難所 j までの経路数を増やすことで避難所 j の物資不足は解消に向かうことを示す。これはネットワークの冗長性が大きくすることがロジスティクスシステムの性能を引き上げることを意味する。ただし、渋滞により輸送時間が増加するなどの混雑現象を考慮していないことには留意する。また、災害時には被災地内の地域物流拠点や避難所、およびそれら繋ぐ道路は甚大な被害を受ける可能性が高いため、命題 6 より、広域物流拠点と避難所を結ぶ道路を復旧することを優先するケースが多い。従って、復旧戦略を考慮しても、*direct logistics* が *multistage logistics* よりも優れた性能を発揮することが期待される。

次に、避難所 $j \in N_3$ の正味在庫量の総和を効率的に増やすための復旧戦略を考える。 $\partial E[IN_j^*(t)]/\partial c_{P_j}$ は c_{P_j} に対して、次のような感度を示す：

$$\frac{\partial^2 E[IN_j^*(t)]}{\partial c_{P_j}^2} = \frac{\partial^2 U_{P_j}(t)}{\partial c_{P_j}^2} \left[E[IN_j^*(r_{P_j}^{st})] - \frac{c_{P_j} \dot{D}_j}{h_j} \right] - \frac{2\dot{D}_j}{h_j} \frac{\partial U_{P_j}(t)}{\partial c_{P_j}}. \quad (72)$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{P_j}(t)}{\partial c_{P_j}^2} &= \frac{h_j/c_{P_j}^3}{4} y_{P_j}(r_{P_j}^{st} - t + T) \\ &\times \left[(r_{P_j}^{st} - t)^2 \left\{ 1 + y_{P_j}^2(2r_{P_j}^{st} + t - 2T) \right\} \right. \\ &+ (r_{P_j}^{st} + t - 2T)^2 y_{P_j}^2(t) \left\{ 1 + y_{P_j}^2(2r_{P_j}^{st} - t) \right\} \\ &- 2[\sqrt{3}r_{P_j}^{st} - t - (\sqrt{3} - 1)T] [\sqrt{3}r_{P_j}^{st} + t - (\sqrt{3} + 1)T] \\ &\left. \times y_{P_j}^2(r_{P_j}^{st}) \left\{ 1 + y_{P_j}^2(t) \right\} \right] - \frac{3}{2c_{P_j}} \frac{\partial U_{P_j}(t)}{\partial c_{P_j}} \quad (73) \end{aligned}$$

である。 $\partial^2 E[IN_j^*(t)]/\partial c_{P_j}^2$ の変化を解析するために、計画終了時刻 T が十分大きい場合を考える。このとき、式 (72) より $[\partial^2 E[IN_j^*(t)]/\partial c_{P_j}^2]_\infty := \lim_{T \rightarrow \infty} \partial^2 E[IN_j^*(t)]/\partial c_{P_j}^2$ は

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 E[IN_j^*(t)]}{\partial c_{P_j}^2} \right]_\infty &= \frac{h_j}{4c_{P_j}^3} (r_{P_j}^{st} - t) y_{P_j}(r_{P_j}^{st} - t + T) \\ &\times \left[\left\{ (r_{P_j}^{st} - t) + 3\sqrt{\frac{c_{P_j}}{h_j}} \right\} E[IN_j^*(r_{P_j}^{st})] \right. \\ &\left. + \left\{ -(r_{P_j}^{st} - t) \frac{c_{P_j}}{h_j} + \sqrt{\frac{c_{P_j}^3}{h_j^3}} \right\} \dot{D}_j \right] \quad (74) \end{aligned}$$

である。式 (74) より、 $[\partial^2 E[IN_j^*(t)]/\partial c_{P_j}^2]_\infty = 0$ となる時刻は $t = r_{P_j}^{st}$ と、

$$\begin{aligned} t^* &= \sqrt{\frac{c_{P_j}}{h_j} \frac{3E[IN_j^*(r_{P_j}^{st})] + c_{P_j} \dot{D}_j/h_j}{E[IN_j^*(r_{P_j}^{st})] - c_{P_j} \dot{D}_j/h_j}} + r_{P_j}^{st} \\ &> r_{P_j}^{st} \quad (\because \text{補題 1}) \quad (75) \end{aligned}$$

である。 t^* は c_{P_j}/h_j に対して

$$\begin{aligned} \frac{\partial t^*}{\partial c_{P_j}/h_j} &= \frac{\sqrt{h_j/c_{P_j}} (3E[IN_j^*(r_{P_j}^{st})] - c_{P_j} \dot{D}_j/h_j)}{2(E[IN_j^*(r_{P_j}^{st})] - c_{P_j} \dot{D}_j/h_j)^2} \\ &\times (E[IN_j^*(r_{P_j}^{st})] + c_{P_j} \dot{D}_j/h_j) > 0 \quad (76) \end{aligned}$$

であり、 c_{P_j}/h_j が小さくなるほど、 t^* は $r_{P_j}^{st}$ に近づく。また、式 (72) より $\lim_{T \rightarrow \infty} \partial^2 E[IN_j^*(T)]/\partial c_{P_j}^2 = 0$ である。ここで、式 (74) より $t = r_{P_j}^{st} + \sqrt{c_{P_j}/h_j} \in (r_{P_j}^{st}, t^*)$ において、

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 E[IN_j^*(t)]}{\partial c_{P_j}^2} \right]_\infty &= -\frac{\exp(-1)}{c_{P_j}^2} \left[E[IN_j^*(r_{P_j}^{st})] \right. \\ &\left. + \frac{c_{P_j} \dot{D}_j}{h_j} \right] > 0 \quad (77) \end{aligned}$$

であり、また $t = t^* + 1 \in (t^*, T)$ において、

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 E[IN_j^*(t)]}{\partial c_{P_j}^2} \right]_\infty &= -\frac{h_j}{4c_{P_j}^4} (r_{P_j}^{st} - t^* - 1) \\ &\times y_{P_j}(r_{P_j}^{st} - t^* - 1) \left[E[IN_j^*(r_{P_j}^{st})] - \frac{c_{P_j} \dot{D}_j}{h_j} \right] \\ &< 0 \quad (\because \text{補題 1}) \quad (78) \end{aligned}$$

である。従って、計画終了時刻 T が十分大きい場合、 $\partial^2 E[IN_j(t)]/\partial c_{P_j}^2$ は次のような動学性を示す：

$$\begin{cases} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 E[IN_j^*(t)]}{\partial c_{P_j}^2} > 0 & t \in (r_{P_j}^{st}, t^*) \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 E[IN_j^*(t)]}{\partial c_{P_j}^2} < 0 & t \in (t^*, T) \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 E[IN_j^*(t)]}{\partial c_{P_j}^2} = 0 & t \in \{t^*, T\}. \end{cases} \quad (79)$$

式 (79) から分かるように、正味在庫量の期待値 $E[IN_j^*(t)]$ は、 $r_{P_j}^{st} < t < t^*$ において c_{P_j} に関して下に凸であるため、 c_{P_j} の小さい避難所へのリンクを復旧すれば良いことが分かる。 c_{P_j} が小さくなると、式 (76) から分かるように t^* は $r_{P_j}^{st}$ に近づくので、常に c_{P_j} の小さい避難所へのリンクを復旧すれば良いわけではない。 $t^* < t$ である場合、 $E[IN_j^*(t)]$ は c_{P_j} に関して上に凸となるため、 c_{P_j} の大きい避難所へのリンクを復旧することで、効率的に避難所の物資不足を解消することができる。上記の感度分析より次の命題を得る：

命題 7 避難所 $j \in N_3$ の正味在庫量の総和を効率的に増やすための、ノード $l \in P_j$ を始点とするラストワンマイルリンク $(l, j) \in A^+$ の復旧関数 $R_l(t)$ は次で与え

られる：

$$R_l(t) = \begin{cases} c_{P_j} \text{の小さい避難所に} & t \in (r_{P_j}^{st}, t^*) \\ \text{接続するリンクを復旧} & \\ c_{P_j} \text{の大きい避難所に} & t \in (t^*, T) \\ \text{接続するリンクを復旧} & \end{cases}$$

$$\forall j \in N_3, l \in P_j.$$

上記の解析結果は、災害直後の初動期においては高速道路や国道などの道幅が広く最大積載量の大きい車両が通行可能な幹線道路を啓開し、その後、道幅の小さい地方道の啓開にあたるのが、避難所の物資不足を解消する上で望ましいことを示唆する。本モデルはくしの歯作戦¹⁴⁾のようにネットワークの空間構造を捉えたものではないが、道路啓開のステップとして第一に被災地への幹線道路を啓開し、続いて全ての被災地へアクセスするための地方道を啓開するという一般的に好ましいと思われる道路啓開手順が、人道支援ロジスティクスに良い影響を与えることを解析的に示す。

5. まとめ

本研究は、階層を超えたリンクを有する多階層ネットワークにおけるプッシュ型の在庫配送戦略を検証した。発災から数日間は被災地から得られる情報は限られるため、その中で物資不足による被災者の苦しみを緩和するには、事前に想定した値を頼りにしたプッシュ型戦略で、生存のために必要な救援物資を迅速に届ける必要がある。災害時には、被災地周辺の道路や地域物流拠点が甚大な被害を受けるため、迅速な救援物資配送を達成する上での大きな障害となる。本研究の目的は、意思決定者が、ネットワークの各層に在庫を確保し地域物流拠点を經由して物資を配送する *multistage logistics* もしくは避難所にのみ在庫を確保し広域物流拠点から直接物資を配送する *direct logistics* のどちらを採用すべきか明らかにする。

上記の戦略を検討するために、最適な在庫配送システムに近い状態を解析的に求める確率的在庫配送モデルを構築した。具体的には、システム全体の費用を最小化する問題を、地域物流拠点を終点とするフローを変数とする下位問題と、それ以外の変数を求める上位問題の二つの問題に分解した。この二段階の最適化問題は、最適な在庫配送システムに近い解を解析的に求めることができる。

確率的在庫配送モデルより導出した解を分析することで、*direct logistics* もしくは *multistage logistics* を採用すべき条件を明らかにした。主要な分析結果は次のように要約される。

- 避難所で発生する物資需要は不完全情報である可能

性が非常に高いため、在庫を積むことで需要の不確実性に対処するのが望ましい（命題 1）。対象的に、地域物流拠点は在庫を積む必要はなく、広域物流拠点から物資が届くまでに避難所に配送する分だけ備蓄すればよい（命題 2）。

- ロジスティクスネットワークの被災状況が「 $r_{oj} \geq r'_{ij}$ かつ $c_{oj} > \bar{c}_{ij}/|N_2|$ 」もしくは「 $r_{oj} > r'_{ij}$ かつ $c_{oj} \geq \bar{c}_{ij}/|N_2|$ 」である場合、*multistage logistics* を採用すべきである（命題 4）。ただし、これらの条件は極めて限られた状況であり、災害後のプッシュ型戦略では *direct logistics* を採用すべき状況が発生する可能性が高い。
- 避難所の正味在庫量及びその総和をより増やす（i.e., 物資不足を解消する）には、広域物流拠点と避難所を繋ぐ幹線道路などの比較的被害が小さく容量の大きい道路の復旧を優先するのが望ましい（命題 6,7）。従って、*direct logistics* が使用する道路が先行して復旧されるため、*multistage logistics* が優れた性能を発揮する条件（命題 4）は満たされない。

本研究は、人道支援のための一貫した在庫配送戦略を開発する第一段階である。実際には需要情報の取得可能性に応じて、適切な戦略を取らなければならない。プッシュ型戦略は、発災から数日間の情報が限られる状況でも、事前の想定値を頼りに迅速な救援物資配送が可能である。被災者のニーズに合った物資配送のためには、ロジスティクスネットワークに情報ネットワークを構築し、プル型へと戦略を移行することが好ましい。プル型戦略の重要なポイントは、災害時の情報ネットワークにおいて継続的な接続が不可能であり鞭効果¹⁸⁾が生じ得ることである。商業ロジスティクスのコンテキストでは、鞭効果による影響は地域物流拠点の在庫調整により軽減すると考えられている。今後の研究では、各地域物流拠点が下流からの要請に応じて在庫配送戦略を決定する非集中的な制御を定量的に分析する。

最後に、提案した最適化問題より導出した解の質について言及しなければならない。本研究では、ネットワーク上で発生する費用を分解し、二段階の最適化問題として定式化することで解析的に解を導出した。将来的には、原問題の最適解と比較することで、提案した最適化問題の解の最適性を検証する必要がある。

謝辞： 本研究は、科学研究費補助金（基盤研究（A）「ポスト・ビッグデータ時代に向けた次世代交通システムの動的マネジメント手法の構築（課題番号 16H02368）」、代表：井料隆雅）の一環として実施された。

付録 I 随伴変数の導出

式 (9) と終点条件より, ノード $k \in \mathbf{N}^-$ に関する随伴変数 $\lambda_{IN_k}(t)$ の関数形は次と推測できる:

$$\begin{aligned} \lambda_{IN_k}(t) &= \psi_{IN_k}(t) IN_k(t) + \phi_{IN_k}(t), \\ \psi_{IN_k}(T) &= 0, \phi_{IN_k}(T) = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}^-. \end{aligned} \quad (80)$$

ここで, $\psi_{IN_k}(t), \phi_{IN_k}(t)$ は確定変数である. 地域物流拠点 $i \in \mathbf{M}$ に関する随伴変数 $\lambda_{IN_i}(t)$ を解く. 式 (80) の両辺を微分し, 式 (2)(30)(80) を代入すると

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{IN_i}(t) &= \dot{\psi}_{IN_i}(t) IN_i(t) - \frac{\psi_{IN_i}(t)}{2c_i} [\psi_{IN_i}(t) IN_i(t) \\ &\quad + \phi_{IN_i}(t)] + \dot{\phi}_{IN_i}(t) \quad \forall t \in [r_i, T] \end{aligned} \quad (81)$$

となる. これと随伴方程式 (24) を比較すると, 任意の $IN_i(t)$ において

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\psi}_{IN_i}(t) - \frac{\psi_{IN_i}^2(t)}{2c_i} &= -2h_i \end{aligned} \right. \quad (82)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\phi}_{IN_i}(t) - \frac{\phi_{IN_i}(t) \psi_{IN_i}(t)}{2c_i} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (83)$$

を満たす必要がある. この連立微分方程式を解く. $IN_i(t)$ は非制約であるので, 随伴変数 $\lambda_{IN_i}(t)$ は連続である. 終点条件 $\phi_{IN_i}(T), \psi_{IN_i}(T) = 0$ より,

$$\psi_{IN_i}(t) = 2\sqrt{c_i h_i} \frac{1 - y_i^2(t)}{1 + y_i^2(t)} \quad (84)$$

$$\phi_{IN_i}(t) = 0 \quad (85)$$

を得る.

付録 II 随伴変数の導出

避難所 $j \in \mathbf{N}_N$ に関する随伴変数 $\lambda_{IN_j}(t)$ を解く. 式 (80) の両辺を微分すると, $IN_j(t)$ の状態方程式 (1) 及び伊藤の公式を用いて,

$$\begin{aligned} d\lambda_{IN_j}(t) &= \left[\dot{\psi}_{IN_j}(t) IN_j(t) + \psi_{IN_j}(t) \left\{ \sum_{l \in \mathbf{P}_j} S_{lj}^{A*}(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \bar{D}_j(t) \right\} + \dot{\phi}_{IN_j}(t) \right] dt - \psi_{IN_j}(t) D_j^{SD}(t) dz_j(t) \end{aligned} \quad (86)$$

となる. これに式 (31)(80) を代入すると, $t \in [r_j, T]$ において,

$$\begin{aligned} d\lambda_{IN_j}(t) &= \left[\dot{\psi}_{IN_j}(t) IN_j(t) + \psi_{IN_j}(t) \left\{ \mathcal{S}_{\mathbf{P}_{jt}}(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\psi_{IN_j}(t) IN_j(t) + \phi_{IN_j}(t)) / 2c_{\mathbf{P}_{jt}} - \bar{D}_j(t) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \dot{\phi}_{IN_j}(t) \right] dt - \psi_{IN_j}(t) D_j^{SD}(t) dz_j(t) \end{aligned} \quad (87)$$

を得る. これと随伴方程式 (23) を比較すると, 任意の $IN_j(t)$ において

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\psi}_{IN_j}(t) - \psi_{IN_j}^2(t) / 2c_{\mathbf{P}_{jt}} &= -2h_j \end{aligned} \right. \quad (88)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\phi}_{IN_j}(t) - \psi_{IN_j}(t) \phi_{IN_j}(t) / 2c_{\mathbf{P}_{jt}} \\ = \{ \bar{D}_j(t) - \mathcal{S}_{\mathbf{P}_{jt}}(t) \} \psi_{IN_j}(t) \end{aligned} \right. \quad (89)$$

を満たす必要がある. この連立方程式を解く. $IN_j(t)$ は非制約であるので, 随伴変数 $\lambda_{IN_j}(t)$ は連続である.

終点条件 $\phi_{IN_j}(T), \psi_{IN_j}(T) = 0$ より,

$$\psi_{IN_j}(t) = 2\sqrt{c_{\mathbf{P}_{jt}} h_j} \frac{\mathcal{Y}_{\mathbf{P}_{jt}}^+(t)}{\mathcal{Y}_{\mathbf{P}_{jt}}^-(t)} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \phi_{IN_j}(t) &= -2c_{\mathbf{P}_{jt}} \left[\{ \bar{D}_j(t) - \mathcal{S}_{\mathbf{P}_{jt}}(t) \} + \frac{\psi_{IN_j}(t) \bar{D}_j}{2h_j} \right] \\ &\quad + \frac{4y_{\mathbf{P}_{jt}}(t) c_{\mathbf{P}_{jt}} \sqrt{c_{\mathbf{P}_{jt}} h_j}}{\mathcal{Y}_{\mathbf{P}_{jt}}^-(t)} \end{aligned} \quad (91)$$

を得る.

参考文献

- 1) EM-DAT: EM-DAT— The International Disaster Database, <https://www.emdat.be/>, [Accessed 25 Feb. 2020].
- 2) Wallemacq, P.: What is the human cost of natural disasters? (1994-2013), 2015.
- 3) Thomas, A. S. and Kopczak, L. R.: From logistics to supply chain management: the path forward in the humanitarian sector, *Fritz Institute*, Vol.15, pp.1-15, 2005.
- 4) Clark, A. J. and Scarf, H.: Optimal policies for a multi-echelon inventory problem, *Management science*, Vol.6, No.4, pp.475-490, 1960.
- 5) Van Houtum, G.-J.: Multiechelon production/inventory systems: optimal policies, heuristics, and algorithms, *Models, methods, and applications for innovative decision making*, pp. 163-199, INFORMS, 2006.
- 6) Sheu, J.-B.: An emergency logistics distribution approach for quick response to urgent relief demand in disasters, *Transportation Research Part E*, Vol.43, No.6, pp.687-709, 2007.
- 7) Sheu, J.-B.: Post-disaster relief-service centralized logistics distribution with survivor resilience maximization, *Transportation research part B: methodological*, Vol.68, pp.288-314, 2014.
- 8) Lodree, E. J.: Pre-storm emergency supplies inventory planning, *Journal of Humanitarian Logistics and Supply Chain Management*, 2011.
- 9) Beamon, B. M. and Kotleba, S. A.: Inventory modelling for complex emergencies in humanitarian relief operations, *International Journal of Logistics: Research and Applications*, Vol.9, No.1, pp.1-18, 2006.
- 10) Beamon, B. M. and Kotleba, S. A.: Inventory management support systems for emergency humanitarian relief operations in south sudan, *The International Journal of Logistics Management*, 2006.
- 11) McCoy, J. H. and Brandeau, M. L.: Efficient stockpiling and shipping policies for humanitarian relief: Unhcr's inventory challenge, *OR spectrum*, Vol.33, No.3, pp.673-698, 2011.
- 12) 河瀬理貴, 浦田淳司, 井料隆雅: 災害時の人道支援ロジスティクスの在り方: 東日本大震災と熊本地震をケーススタディとして, 第 59 回土木計画学会研究発表会, CD-ROM, 2019.
- 13) 福岡市: 平成 28 年熊本地震 福岡市被災地支援活動レポート, <http://www.bousai.go.jp/updates/h280414jishin/h28kumamoto/pdf/h281025sanko01.pdf>, 2020 年 6 月 17 日閲覧.
- 14) Holguín-Veras, J., Taniguchi, E., Jaller, M., Aros-Vera, F., Ferreira, F., and Thompson, R. G.: The tohoku disasters: Chief lessons concerning the post disaster humanitarian logistics response and policy implications, *Transportation research part A*, Vol.69, pp.86-104, 2014.
- 15) Mangasarian, O. L.: Sufficient conditions for the optimal

- control of nonlinear systems, *SIAM Journal on control*, Vol.4, No.1, pp.139–152, 1966.
- 16) Peng, S.: A general stochastic maximum principle for optimal control problems, *SIAM Journal on control and optimization*, Vol.28, No.4, pp.966–979, 1990.
 - 17) Krener, A. J.: The high order maximal principle and its application to singular extremals, *SIAM Journal on control and optimization*, Vol.15, No.2, pp.256–293, 1977.
 - 18) Chen, F., Drezner, Z., Ryan, J. K., and Simchi-Levi, D.: Quantifying the bullwhip effect in a simple supply chain: The impact of forecasting, lead times, and information, *Management science*, Vol.46, No.3, pp.436–443, 2000.

(Received 2020. 10. 2)

OPTIMAL STOCHASTIC INVENTORY DISTRIBUTION STRATEGY in a DAMAGED MULTI-ECHELON RELIEF LOGISTICS NETWORK

Riki KAWASE and Takamasa IRYO

A push-mode strategy to predict and distribute relief items is important for quick relief distribution in a chaos situation where it is hard to obtain relief demand information. Conventionally, a logistics network with three types of echelons, consisting of regional distribution centers (DCs) outside the affected area, local DCs and shelters in the affected area, was considered to be an effective way to satisfy the relief demand as possible as quickly. Unfortunately, in fact it has been reported that there are bottlenecks on distribution routes due to damaged roads and local DCs, which raises doubts about the effectiveness of the traditional multi-echelons logistics network. In this paper, we analyze the push-mode inventory distribution strategy in a multi-echelons logistics network with links across echelons, extending the traditional network. As a result, we showed the disaster situation and the recovery process in which direct logistics from regional DCs to shelters is preferable in terms of push-mode strategy.